مبادئ
المعادلات التفاضلية
وتطبيقاتها

مساق موجز

تأليف

وليم ر. ديرك و ستانلي غروسمان

ترجمة

د. أحمد سليم سعيدان

راجعه علمياً: الدكتور محمد عرفات النتشه

أشرف عليه: السيد كمال عوض الله

منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٤٠٤هـ - ١٩٨٤ م

ترجم هذا الكتاب وطبع ونشر على نفقة مجمع اللغة العربية الأردني .

تصدير المؤلفين

ما زالت المعادلات التفاضلية، من عهد نيوتن، تحتل مكانة أساسية في دراسة التحليل الرياضي وتطبيقاته؛ ذلك أنها وسيلة حاسمة لتفهم العلوم الفيزيائية. ولقد امتدت أهميتها مؤخرا الى حقول العلوم البيولوجية والاجتماعية. ولقد صدق من قال أن لا شيء يدوم الا التغير: فالمعلومات المستجدة عن نظرية المعادلات التفاضلية. وتطبيقاتها في الحقول العلمية، في تزايد مستمر، ومن ثمَّ فان أهميتها في الدراسة الجامعية تتزايد.

ولقد استهدفنا من وضع هذا الكتاب تحقيق غايات ثلاث:

أن نساعد الطالب على استيعاب طبيعة المعادلات التفاضلية، ومعادلات الفروق، ودلالاتها؛

٢ . ان نُتيح له الوسائل العددية اللازمة لحل مسائل تستعصي على الطرق المباشرة؛

٣ . ان نضع أمامه وفرة من الامثلة والمسائل ، مستمدة من العلوم البيولوجية والاجتماعية ، بالأضافة الى العلوم الفيزيائية . وقد أخذنا التطبيقات من حقول الكيمياء ، والهندسة الكيميائية ، وتلوث الهواء ، والوراثة ، والحركة السكانية ، وألعاب الحظ ، بالأضافة الى المسائل التقليدية عن الدوائر الكهربائية والميكانيكا .

ولأن الطلاب الذين يلتحقون بمساق أولي في المعادلات التفاضلية يكونون ، غالبا ، غير مؤهلين لمعالجة الموضوع معالجة رصينة ، لذلك استبعدنا الموضوعات التي تحتاج الى دراية في علم الحسبان فوق ما يتأتى عادة لطالب السنة الاولى . ولقد توخينا ان نجعل الكتاب سهل المأخذ : بالأكثار من الأمثلة ، وبإيجاز خطوات الحل ، كيلا يقع الطالب في حبائل عمليات حسابية معقدة .

ان علماء اليوم يجدون تحت متناول يدهم حاسبة الكترونية سريعة الاستجابة ، حتى المسائل التي كانت في الماضي مستعصية نجد لها اليوم بسهولة حلولا تقريبية مرضية ، بطرق عددية أساسية . وفي رأينا ان هذه الطرق يجب ان توضع تحت يد الطالب ، في مرحلة مبكرة من حياته الدراسية ، شريطة ان يعرف ما لهذه الحلول من حدود ، كيلا يعتمد على الحاسبة أكثر مما ينبغي .

لذلك جعلنا في هذا الكتاب ما يلي :

أ) فصلا أوليا يعطي الطالب الأسس الكافية للبرمجة بأشهر لغتين من لغات الحاسبة :

فورتران FORTRAN ، واللغة الأساسية BASIC

ب) فصلا في الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية ، فيه تفصيل للحلول وحدودها ، وبرامج نموذجية لحلها بالحاسبة الالكترونية .

وان معادلات الفروق ، كالمعادلات التفاضلية ، تتزايد أهميتها في هذه الايام ، لتطبيقاتها الواسعة في حقول العلوم البيولوجية والعلوم الاجتماعية . ودور معادلات

الفـروق في هذه الحقـول هو، على الغالب، الأهـم، لأن المعطيات هنا كثيرا ما تقتصر على قيم واضحـة التفـاوت ؛ والمسـائـل التي تطـرحهـا العمليـات البيولوجية المعقدة، والعـلاقـات الاقتصـادية المتداخلة، تفضي بطبيعتها الى قوالب كالبنيان الكبير يقسم عادة الى حجـرات . ولقـد جئنـا بعـدد من المسائل من هذه الحقول وببحث موجز عن تحليل الحجرات .

ان الفصول الثلاثة الأولى في الكتاب تبحث في طرق حل المعادلات التفاضلية الابتـدائيـة . وببحث البنـد ٢ ـ ٦ والفصل الرابع في ما يقابلها من معادلات الفروق . فاذا ضاق الـــوقت يمكن اهمال هذين دون أن يؤ ثـــر ذلـــك على سيـاق البحث . وفي الفصلين الخـــامس والســـادس بحث مفصـــل في متسلسـلات القـوى، ومتحـولات لابـلاس، واستخـدامهـا في حل المعـادلات التفـاضلية العادية . وفي الفصل السادس بحث موجز عن استعمال محولات لابلاس في حل معادلات الفَرُوق .

وفي الفصـل السـابـع ، نبحث في منظومات المعادلات التفاضلية، على نحو لا يستدعي معرفة بنظرية المصفوفات .

وفي الفصل الثامن نبحث في طرق عددية شتى (ذوات خطوة واحدة او خطوات عدة) مما يستعمل في تقريب الحلول للمعادلات التفاضلية . وهو يحتوي على بحوث في اخطاء التدوير وفي مخادعة الأعداد، وفي سرعة التقارب في الطرق المختلفة .

وفي الملحق ٥ نبحث في النظـريـات الأسـاسيـة لموجـوديـة الحل ووحدانيته، في المسائل ذات القيم الابتدائية، وهذا يقيم التبريـر النظري لكثير من مادة الكتاب

وفي تدريس هذا الكتـاب يمكن ان تتبـع مسارات مختلفة . والجدول التالي يبين كيف تعتمـد فصـول الكتـاب بعضهـا على بعض . وتشير الأقواس الى بنود معينة من الفصول، والى الفصول التي تعتمد عليها هذه البنود :

الفصل	يعتمد على الفصل :
١	—
٢	١
٣	٢
٤	٢ ، ٣
٥	٢ ، ٣
٦ (٦ - ٥)	٢ ، ٣ ، (٤)
٧ (٧ - ٨)	٢ ، ٣ ، (٦)
٨	٢ ، ٣

ففي مساق لغير المختصين بالرياضيات. مدته فصل دراسي واحد، يمكن ان يكتفي بالفصول ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦وأجزاء من الفصلين ٤ ، ٧ ، حسب الوقت. اما اذا كان المساق يستغرق سنة كاملة، فيمكن تدريس الفصول الثمانية مع مادة الملحق ٥

فاذا كان المطلوب مادة أوسع، فهناك طبعة مطولة لهذا الكتاب تحتوي على فصول في مسائل القيم الحاصرة، والمعادلات التفاضلية الجزئية، ونظرية الاستقرار، في المعادلات غير الخطية.

﴿ينهي المؤلفان هذا التصدير بشكر من ساعدوهما في اعداد الكتاب﴾

تصدير المترجم

هذا كتاب آخر نقدمه الى المكتبة العربية، في حملة مجمع اللغة العربية الأردني، لتعريب التعليم الجامعي، بخاصّة، وتعريب الفكر العلمي بوجه عام. وإنه ليسعدني أن أقوم بهذا الجهد بعد ان شاركت في ترجمة كتاب سوكوفسكي في التفاضل والتكامل، ذلك الكتاب الذي انتشر واستقبله الطلاب والاساتذة خير استقبال.

وقد اخترنا هذا الكتاب من بين العديد من الكتب التي تبحث في المعادلات التفاضلية العادية، لأنه يعرض المادة على نحو متطور يأخذ بعين الاعتبار الاتجاهات الحديثة في الموضوع التي يمليها التقدم العلمي، ولأننا توسمنا أن يكون هذا الكتاب ملائما لطلابنا في عهدهم الجديد إذ يدرسون بلغتهم فيستوعبون بسهولة ويسر ما ليس يستوعبون في غير لغتهم الا بمشقة وعناء. يكفي الطالب أنه يتعلم المعادلات التفاضلية العادية مما قد يكون بشهادة الكثيرين، خير كتاب في موضوعه وصل الى العالم العربى.

ولقد راعيت في الترجمة نقل كل أفكار المؤلف وإيحاءاته، نقلا صادقا. وإن أكن خالفتـه ففي مواضـع قليلة محدودة، في الإخـراج، إذ جزأت بعض الفقـرات، حيث رأيت التجزئة أدعى للانتباه.

وفي ترجمـة المصطلحـات العلمية تقيدت، على الغالب، بما تم الاتفاق عليه في مؤتمرات التعريب، وبما سبق أن استعملناه في كتاب حساب التفاضل والتكامل. وأما المصطلحـات التي لم أجـد لها مقـابـلا منـاسبـا في معـاجم الـرياضيات او العلوم، فقد اجتهدت في وضع مقابلات لها، مؤثرا الترجمة على التعريب، مسترشدا بالمنهجية التي أقرها مؤتمر التعريب في الرباط.

ولكن لم يغب عن بالي اننا في هذه المرحلة من حملتنا في تعريب الفكر العلمي، ما نزال نقوم بعمل رائد، قد يكتنفه الخطأ، لأننا نسير في طريق غير معبَّد. لذا ألقيت أذنا واعيـة لكـل اعـتراض أوتعليق وصل الى مسامعي من الزملاء الكرام عن ترجمة كتاب التفـاضـل والتكـامل. ولقد وزنت كل هذه الاعتراضات والتعليقات. فأخذت بما رآه الزملاء في حالات، وتشبثت بمخالفتي لهم في حالات أخرى، وأنا فيما أخذت به أكثر قناعة بوجهة نظرهم، وفيما خالفته أكثر إيمانا بأني أقرب منهم الى الصواب.

ولعل اهم ما نزلت به على رأي الزملاء الناقدين ثلاثة امور:

أولها: ان استعمال جاز، جتاز، ظاز، الخ، مقابل etc, tanh, cosh, sinh على التوالي، لا يخلو من لبس، ذلك ان جاز مثلا قد تؤخذ على انها ترمز الى جيب الزاوية ز. ولذا فقد غيرت رموز النسب المثلثية الزائدية الى جز، جتز، الخ.

أما الـرأي القـائـل بأن أخذ الرموز جب، تجب الخ فلم أجد له مبررا قويا، لا سيما وان جا، جتا، الخ مستعملة في أكثر العالم العربي من مطلع النهضة العربية الحديثة.

ثانيـا: ان استعمال لط مقابلا للرمز الأوروبي ln، للدلالة على اللوغرثم الطبيعي،

لا يستسيغه الذوق العربي، ولا ترتاح اليه الأذن. لم يسعني إلا ان أوافق على ذلك، ولكني لم أوافق على استعمال الرمز لن، وفضلت عليه الرمز لي وهو يوحي باللوغرثم للأساس e . وإني أرى أن لي رمز لطيف مميز، وأرجو أن يقبله الاساتذة والطلاب قبولا حسنا.

ثالثا: لقد ساهمت مع الفريق القومي الأردني لتطوير الرياضيات في وضع كلمة اقتران، مقابلا لكلمة function ، ولقد شاركت في الدفاع عن هذه الكلمة في مؤتمر التعريب، حتى أُقرت، ولقد شعرت يومها بأن «الدالة» قد مضت الى غير رجعة. ولكن هذا ما لم يحصل. ان الزملاء في أقطار العالم العربي يستعملون «الاقتران»، على مضض أحياناً، وان «الدالة» ما تزال تستعمل، وان تكن قد بدأت تغير مدلولها القديم. وإني قد رأيت الانصياع الى الرأي العام في ترجمتي هذه فأبقيت «الاقتران» مقابلا لكلمة function ، واستعملت «التابع» مقابلا للاصطلاح dependent function ، واستعملت ايضاً «الدالة» إشارة الى صورة المتغير المستقل في الاقتران. ففي المعادلة ق (س) = س^{٢} أُسمي ق (س) أحياناً بالدالة.

ولقد أتيح لي بعد الفراغ من ترجمتي هذه أن ألتقي بزملاء من بلد عربي شقيق فلقيتهم يستعملون الدالة مقابلا لكلمة function ويستعملون الاقتران مقابل functor .

وهذا كله دليل حركة وحياة وتطور، والزمن وحده هو الذي سيكون الحكم الفصل في أي هذه الاتجاهات سيبقى.

وكل ما أرجوه الا يضيق القاريء ذرعا بتغير المصطلحات. ففي عصر التفجر العلمي لا بد من هذا التغير، وربما كانت الكتب الأوروبية شاهداً على ما أقول. فهي تختلف في بعض مصطلحاتها ورموزها اكثر مما تختلف الكتب العربية.

وربما كان أهم ما خالفت فيه آراء بعض النقاد هو تمسكي بكتابة الرموز والمعادلات.

كما تكتب العربية، من اليمين الى اليسار. لقد أخذتُ بجميع الحروف اليونانية، واستعملت الحروف اللاتينية ذات القيمة الثابتة عالميا، مثل i , e . ولكنني استعمل هذه الحروف الدخيلة في بيئة عربية، وفي معادلات ومتباينات واقترانات تمضي كتابتها من اليمين الى اليسار، لا حفاظا على طابع العربية فحسب، بل حرصا على مصلحة الطالب، فأنا معلم، وأعرف التجربة كم يعاني الطالب من تشتيت في الفكر، واضطراب في الصور الذهنية، عندما تتقاذف ناظريه العبارات، من اليمين تارة، ومن اليسار تارة أخرى.

وفي آخر الكتاب ثبت بالمصطلحات والرموز الواردة فيه، وأشير هنا بصورة خاصة الى حالات قد يبدو فيها تناقض أو عدم إنسجام:
فأنا اترجم continuous بكلمة «متصل» أو «مستمر»، ولكل من الكلمتين حدودها ونقائضها، وكلاهما لا تعطي جميع المفاهيم الرياضية المعينة، ولا ضرر في ذلك، فالمصطلح علمي يلزم ان يطابق معناه اللغوي الدارج دلالاته العلمية. ولقد رأيت استعمال لفظتي الاتصال والاستمرار، لأن كلا منهما لها موضعها الذي هي فيه أنسب.

وانا أترجم independent variable بعبارة «متغير مستقل»، واترجم dependent variable بعبارة «تابع»، وأترجم linearly dependent variable بعبارة «متغيرات مترابطة خطيا». فليعذرني القاريء: ان العربية هنا أوضح وأدق من الانكليزية، فلا ينبغي أن تكون لغة الاصل قيداً. مثل هذا أقول في ترجمة system بكلمتي «نظام» و «منظومة»، وفي كلمات قليلة غيرها.

وإني لأرجـو أن يسـد هذا الجهد فراغا في المكتبة العربية ، وإنه ليسرني أن أتلقى من القراء كل ما يعنُّ لهم من ملاحظات وآراء حول الكتاب وترجمته .

والله من وراء القصد

احمد سعيدان
١٩٨١/٤/٢٥

المحتويات

الموضوع	الصفحة
الفصل الاول:	
مقدمة	
١ ـ ١ المعادلات التفاضلية	٣
١ ـ ٢ تصنيف المعادلات التفاضلية	١١
١ ـ ٣ معادلات الفروق	١٧
الفصل الثاني:	
معادلات الرتبة الاولى	
٢ ـ ١ طرق مباشرة	٣٤
٢ ـ ٢ طرق التعويض	٤٧
٢ ـ ٣ المعادلات الخطية	٥٦
٢ ـ ٤ معادلات خاصة لا خطية	٦٦
٢ ـ ٥ المعادلات المحكمة	٧٤
٢ ـ ٦ معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الاولى	٨٣
٢ ـ ٧ تطبيقات على معادلات الفروق ذات الرتبة الاولى.طريقة نيوتن.	٩٢

٢ - ٨ الدوائر الكهربائية البسيطة ١٠٠
٢ - ٩ منحنيات المطاردة ١٠٦
٢ - ١٠ التحليل؛ الحجرات ١١٥

الفصل الثالث:

معادلات الرتبة الثانية الخطية التفاضلية

٣ - ١ مقدمة ١٢٧
٣ - ٢ خصائص حلول المعادلات الخطية ١٣٠
٣ - ٣ استعمال حل لايجاد حل آخر ١٤١
٣ - ٤ المعادلة المتجانسة ذات المعاملات الثابتة والجذور الحقيقية ١٤٦
٣ - ٥ المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة والجذور المركبة ١٥٣
٣ - ٦ المعادلات اللامتجانسة؛ طريقة المعاملات غير المعينة ١٥٨
٣ - ٧ تغيير الثوابت ١٦٦
٣ - ٨ المعاملات المتغيرة: معادلة اويلر ١٧٣
٣ - ٩ حركة التأرجح ١٧٨
٣ - ١٠ الدوائر الكهربائية ١٩٠
٣ - ١١ تحليل الحجرات ٢ ١٩٦
٣ - ١٢ المعادلات الخطية ذات الرتب العالية ٢٠٤

الفصل الرابع:

معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية

٤ - ١ مقدمة ٢٢٥
٤ - ٢ خصائص حلول المعادلات الخطية ٢٢٩
٤ - ٣ استعمال حل لايجاد حل آخر ٢٣٧
٤ - ٤ المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة: حالة الجذور الحقيقية ٢٤٢
٤ - ٥ المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة: حالة الجذور المركبة ٢٤٨
٤ - ٦ المعادلات اللامتجانسة: تغيير الثوابت ٢٥٥
٤ - ٧ الشبكات الكهربائية ٢٦٤
٤ - ٨ تطبيقات على الالعاب وضبط النوعية ٢٧٣

الفصل الخامس

حل المعادلات التفاضلية بتسلسلات القوى

٥ - ١ مراجعة متسلسلة القوى ٢٨٦
٥ - ٢ طريقة متسلسلات القوى؛ امثلة ٣٠٠
٥ - ٣ النقط العادية والنقط المنفردة ٣١٦

٥ ـ ٤ اقترانات بيزيل ٣٤٤
٥ ـ ٥ حدوديات لاجاندر ٣٦٧

الفصل السادس:

محولات لابلاس
٦ ـ ١ التعريف بمحولات لابلاس وخصائصها الاساسية ٣٨٥
٦ ـ ٢ نظريات النقل ومحولات لابلاس للمشتقات والتكاملات ٣٩٩
٦ ـ ٣ تحويل المعاملات التفاضلية العادية ٤١٧
٦ ـ ٤ محولات التكاملات الملتفة ٤٣٥
٦ ـ ٥ معادلات الفروق وطرق محولات لابلاس ٤٤٣

الفصل السابع:

مبادىء منظومات المعادلات التفاضلية
٧ ـ ١ مقدمة منظومات المعادلات التفاضلية ٤٥٧
٧ ـ ٢ تحويل المعادلات العالية الرتب الى منظومات من الرتبة الاولى ٤٦٨
٧ ـ ٣ طريقة الحذف في المنظومات ذات المعاملات الثابتة ٤٧٥
٧ ـ ٤ المنظومات الخطية ـ نظريتها ٤٨٢
٧ ـ ٥ حل المعادلات الخطية المتجانسة، ذات المعاملات الثابتة ٤٩٠
٧ ـ ٦ الدوائر الكهربائية المتعددة القوى ٥٠٧
٧ ـ ٧ منظومات المعادلات التفاضلية اللاخطية ٥١٤
٧ ـ ٨ استعمال محولات لابلاس في المنظومات ٥٢٢
٧ ـ ٩ منظومات معادلات الفروق الخطية ٥٢٧

الفصل الثامن:

طرق عددية
٨ ـ ١ معادلات الرتبة الاولى ٥٤٠
٨ ـ ٢ تحليل للخطأ في طريقة اويلر ٥٥٢
٨ ـ ٣ صيغ رونج وكوتا ٥٥٩
٨ ـ ٤ قوانين التنبؤ والتصحيح ٥٦٥
٨ ـ ٥ انتشار الخطأ المدور ٥٧٣

٨ ـ ٦ منظومات المعادلات ٥٧٨
ملحق ١ جداول التكامل ٥٨٩
ملحق ٢ محولات لابلاس ٥٩٩

ملحق ٣ مبادىء لغة الحسابات؛ لغة فورتران واللغة الاساسية	٦٠٩
ملحق ٤ المحددات	٦٢٩
ملحق ٥ موجودية الحلول ووحدانيتها	٦٤٥
اجوبة التمارين الفردية	٦٧١
قاموس المصطلحات	٧١٥

الفصل الاول

مقدمة

١ ـ ١ المعادلات التفاضلية

كثير من القوانين في العلوم الفيزيائية، وحديثا صار كثير من قوانين العلوم البيولوجية والاجتماعية، يصاغ بدلالة علاقات رياضية تحتوي على كميات معلومة وأخرى مجهولة، وعلى مشتقاتها التفاضلية. مثل هذه العلاقات تسمى معادلات تفاضلية.

وفي البند التالي سنرى كيف تصنف الأنماط المختلفة من المعادلات التفاضلية. وفي الفصول التالية سنبحث في طرق حلها، أوحيث يتعذر الحل، في طرق تعطينا معلومات عن الحلول، (اذا وجدت)، لأصناف شتى من المعادلات. وفي هذا البند سنرى كيف تنشأ بعض المعادلات التفاضلية البسيطة.

ولكن قبل ان نأتي الى الامثلة، نؤكد ان المشكلة الكبرى في دراسة المعادلات التفاضلية هي على الغالب تصف موقفا حقيقيا وصفا كميا. ويلزم لذلك عادة تبسيط الأمر، بافتراضات يسهل التعبير عنها رياضيا. فمثلا كي نصف حركة جسم ما في

الفضاء نبدأ اولا باعتباره كتلة مجمعة في نقطة وثانيا بفرض ان ليس هناك احتكاك ولا مقاومة هواء. فهذه الافتراضات ليست واقعية. ولكن العلماء يلمحون معلومات قيمة من نماذج مغرقة في المثالية. فاذا فهمت هذه المعلومات مكن بعدئذ تعديل النماذج بأخذ الأمور الأخرى بعين الاعتبار.

المثال ١ - ١ - ١ سقطت كرة من أعلى بناء ارتفاعه ١, ٤٤ متر (المتر = ٣, ٢٨ قدم)، فمتى تصطدم الكرة بالأرض ؟

نعتبر ان الكرة نقطة كتلة وان ليس هنالك مقاومة هواء. فيكون تسارع الكرة هو ما ينشأ عن قوة الجاذبية وحدها. فاذا رمزنا الى ارتفاع الكرة في اي لحظة ن بالرمز ع (ن) تكون عَ (ن) هي سرعة الكرة في اللحظة ن. لأن السرعة هي معدل تغير الارتفاع بتغير الزمن؛ وكذلك يكون عً (ن) هوتسارع الكرة الى أعلى، في اللحظة ن، لأن التسارع هو معدل تغير السرعة بتغير الزمن.

ولقد وجدنا بالتجربة أن تسارع الجاذبية جـ يعادل بالتقريب ٩٨٠ سم/ث^{٢}، اي ٩٨٠ سم في الثانية، كل ثانية (= ٣٢, ٢ قدم/ث^{٢})، على سطح الأرض.

فتسارع الكرة اذن ثابت. فيكون :

$$\text{عً (ن)} = -٩٨٠ \qquad \text{(١ - ١)}$$

حيث تشير العلامة السالبة الى ان قوة الجاذبية تعمل الى أسفل.

نكامل طرفي المعادلة (١ - ١) بالنسبة الى ن، فيكون

$$\text{عَ (ن)} = -٩٨٠\ \text{ن} + \text{ث}_{١}\ ، \qquad \text{(١ - ٢)}$$

حيث $ث_1$ ثابت يجب تعيينه. ولتعيينه نجعل ن = ٠ في المعادلة (١ ـ ٢) فيكون $ث_1$ = عَ (٠) = ٠ لأن السرعة الابتدائية للكرة صفر إذ أنها سقطت من السكون. ثم نكامل (١ ـ ٢)، فينتج

$$ع(ن) = -٤٩٠ ن^٢ + ث_٢ \qquad \text{(١ ـ ٣)}$$

والثابت $ث_2$ يمكن ايضا تعيينه باتخاذ ن = ٠ فيكون $ث_2$ = ع (٠) = ٤٤١٠، وهذا هو الإرتفاع الابتدائي (بالسنتيمترات). ولكي نعرف الوقت الذي يمضي قبل ان تصطدم الكرة بالأرض، نجعل الطرف الأيمن في المعادلة (١ ـ ٣) صفرا، ثم نجد قيمة ن، فيكون:

$$٤٩٠ ن^٢ = ٤٤١٠ \qquad \text{اي ان } ن^٢ = ٩.$$

فيكون ن = ± ٣، ولأن −٣ ليس لها، فيزيائيا، معنى، يكون ن = ٣ ثوان.

المثال ١ ـ ١ ـ ٢ ينص قانون نيوتن في التبريد على ان سرعة تغير الفرق في درجتي الحرارة لدى الجسم والوسط الذي يحيط به تتناسب مع هذا الفرق. فليكن △ (ن) يرمز الى الفرق بين درجتي الحرارة في اللحظة ن. فلأن سرعة التغير يعبر عنها رياضيا بمشتقة تفاضلية، يمكن ان نعبر عن قانون التبريد بالصيغة:

$$\frac{د △}{د ن} = ك △ ، \qquad \text{(١ ـ ٤)}$$

حيث ك هو ثابت التناسب. فاذا تذكرنا من دروس مبادىء التفاضل ان

$(e^{كن})' = ك\ (e^{كن})$، نحصل على الحل:

$$\triangle(ن) = \dot{\triangle}\ e^{كن} \qquad (1-5)$$

حيث $\dot{\triangle}$ ثابت. وهذا هو حل المعادلة التفاضلية (١ ـ ٤). وللتحقق من ذلك نعوض (١ ـ ٥) في (١ ـ ٤)، ونفاضل فينتج

$$(\dot{\triangle}\ e^{كن})' = ك\ \dot{\triangle}\ e^{كن} = ك\ (\dot{\triangle}\ e^{كن})$$

فاذا جعلنا ن = ٠ في (١ ـ ٥)، ينتج أن

$$\triangle(0) = \dot{\triangle}\ ،$$

أي ان $\dot{\triangle}$ هي الفرق الابتدائي بين درجتي حرارة الجسم والوسط المحيط به.

ولأن فرق درجتي الحرارة $\triangle$ (ن) يقارب الصفر بمضي الزمن ينبغي ان يكون الثابت ك في المعادلة (١ ـ ٥) سالبا.

المثال ١ ـ ١ ـ ٣ مزرعة بكتيريا تتغير سعتها (أي عدد سكانها) بسرعة تتناسب مع هذا العدد. فاذا كان ع (ن) يرمز الى عدد السكان في اللحظة ن فان المعادلة التي تمثل تزايده هي:

$$\frac{دع}{دن} = \propto ع\ ،$$

حيث تكون $\propto$ موجبة او سالبة حسب كون العدد في تزايد، او في تناقص.

فكما في المثال السابق، يكون الحل

$$ع(ن) = ع(٠) e^{\propto ن}،$$

حيث ع (٠) هو عدد السكـان ابتـداء. فاذا كانت $\propto > ٠$ يتـزايـد العـدد أسِّيّاً، واذا كانت $\propto < ٠$ يتنـاقص العـدد أسيـاً ايضـا. وفي الحالة الخاصة $\propto = ٠$ تبقى المزرعة ثابتة السعة، مستقرة على ع (٠).

المثال ١ ـ ١ ـ ٤ يقاس معدل النمو السكاني بالنسبة للفرد الواحد، بالفرق بين متوسط نسبـة المـواليـد ومتـوسط نسبة الوفيات. فلنفرض مجتمعا فيه متوسط نسبة المواليد ثابت موجب: β، ومتـوسـط نسبـة الوفيات يتناسب طرديا مع عدد السكان، وذلك نتيجة للازدحـام، وتـزايـد التنـافس على الغـذاء، وليكن ثابت هذا التنـاسب $\delta > ٠$ فاذا كانت سرعة النمو السكاني $\frac{دع}{دن}$ تكون سرعة هذاالنموبالنسبة الى الفرد الواحد

$$\frac{١}{ع} \frac{دع}{دن}.$$

فالمعادلة التفاضلية التي تعبر عن النمو السكاني هي:

$$\frac{١}{ع} \frac{دع}{دن} = \beta - \delta ع$$

فاذا ضربنا طرفي هذه المعادلة في ع ينتج:

$$\frac{دع}{دن} = ع(\beta - \delta ع)، \quad \text{(١ - ٦)}$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة الحركية (logistic equation). والنمو الذي تفضي اليه يسمى النمو الحركي (logistic growth). وفي المثال ٢ ـ ١ ـ ٣ سنرى ان الحل:

$$ع(ن) = \frac{\beta}{\delta + [\beta ع(٠)^{-1} - \delta] e^{-\beta ن}} \qquad (١ - ٧)$$

ويلاحظ انه بتزايد ن يقترب الحد $e^{-\beta ن}$ من الصفر، لأن $\beta > ٠$، فعدد السكان يقارب حدا لا يتعداه هو β / δ؛ ذلك انه اذا صارت $ع = \beta / \delta$ لنتج من المعادلة (١ ـ ٦) ان $\frac{دع}{دن} = ٠$.

المثال ١ ـ ١ ـ ٥ تحتوي بيئة ما على نوعين من الأحياء: مفترسات وفرائس. والفرائس لديها رصيد من الغذاء لا ينفذ. وليكن ص (ن)، س (ن) يرمزان الى عدد المفترسات وعدد الفرائس، في هذه البيئة، على الترتيب. فلتوافر الغذاء ينتظر ان تكون نسبة المواليد عند الفرائس ثابتة، في حين ان نسبة الوفيات تعتمد طبعا على عدد المفترسات.

اما نسبة المواليد في المفترسات فتتأثر بكمية الغذاء الميسور لها، وهي غير مضمونة، في حين ان نسبة الوفيات فيها قد تكون ثابتة. فكما في المثال ١ ـ ١ ـ ٤ نكتب سرعتي النمو للنوعين كما يلي:

$$\frac{١}{س}\frac{دس}{دن} = أ - ب ص ، \quad \frac{١}{ص}\frac{دص}{دن} = \propto س - \beta \quad \ldots \quad (١ - ٨)$$

حيث ∝ ، β ، أ ، ب ثوابت تناسب موجبة . لاحظ ان المعادلتين تعتمد كل منهما على الأخرى ولهذا السبب نعتبرهما منظومة واحدة . وهما من المرتبة الأولى . ويمكن حذف أحد المتغيرين : نجد قيمة س من المعادلة الثانية، فيكون :

$$\text{س} = \frac{\text{د ص}/\text{د ن} + \beta\ \text{ص}}{\propto\ \text{ص}} \quad \text{.......................} \quad (\text{١ - ٩})$$

ونفاضل (١ ـ ٩) فينتج

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{ص د}^{٢}\text{ص}/\text{د ن}^{٢} - (\text{د ص}/\text{د ن})^{٢}}{\propto\ \text{ص}^{٢}} \quad \text{.............} \quad (\text{١ - ١٠})$$

فاذا عوضنا هذا في اولى معادلتي (١ ـ ٨)، ينتج بعد التبسيط :

$$\text{ص} \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د ن}^{٢}} - \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}\right)^{٢} = \text{ص} \ (\text{أ} - \text{ب ص}) \ (\beta\ \text{ص} + \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}})$$

(١ ـ ١١)

وليس لدينا حل صريح لمنظومة المفترسات والفرائس، ولكن يمكن ان نستنتج علاقة بين س ، ص تكشف عن بعض خصائص الحل. (أنظر المثال ٧ ـ ١ ـ ٤). وسندرس منظومات المعادلات بالتفصيل في الفصل ٧.

التمارين ١ - ١

١ . حل المعادلات التفاضلية التالية بإيجاد تكامل طرفي المعادلة ثم ايجاد قيمة ص عند قيمة س المعطاة :

أ) $\frac{د ص}{د س} = س + ٣$ ، ص (٠) = ٢ .

ب) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س}{س^٢ + ٥}$ ، ص (١) = ٤

حـ) $\frac{د ص}{د س} = ظا^٢ س$ ، ص (٠) = ١ .

د) $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = س^٢ - ٩$ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٣

هـ) $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = جاس - جتاس$ ، ص (π /٢) = ٠ ، صَ (π /٢) = ١

٢ . سقط جسم في الفراغ بتسارع ثابت مقداره جـ. عبر عن سرعة الجسم بدلالة ارتفاعه .

٣ . تأخر متسابق في سباق سيارات فكان عليه ان يقطع $\frac{١}{٢}$ ميل في ٢٠ ثانية فكم يجعل تسارعه؟ وكم القوة التي يبذلها؟ علما بأن سيارته تزن ٢٠٠٠ باوند؟ [ارشاد : ق = ك ت ، و = ك حـ]

٤ . يعرف نصف العمر للمادة المشعة بأنه الزمن الذي تستغرقه هذه المادة حتى تخسر ٥٠ في المئة من كتلتها . فاذا كانت ش (ن) هي كمية المادة المشعة الباقية بعد ن

سنـــوات، وكانت ش (٠) = ش٠ ، ونصف العمــر ع سنـوات، فاكتب معـادلـة تفاضلية تبين ش (ن)، متخذا كل الامور الجانبية بعين الاعتبار.

٥. أطلق صاروخ من نقطة الابتداء (س٠ ، ص٠) بسرعة ع وعلى الزاوية θ (٠ ≥ θ ≥ π / ٢). أوجد احداثييه، الأفقي سن ، والرأسي صن ، بدلالة الزمن. افرض ان ليس هنالك مقاومة هواء، وان قوة الجاذبية ثابتة ج.

٦. وجـد ان مزرعـة بكتـيريـا يتضاعف عدد افرادها مرة كل ثلاث ساعات. فاذا كان هذا العدد في البدء ١٠٠٠، فمتى يصير ١٠,٠٠٠؟

١ ـ ٢ تصنيف المعادلات التفاضلية

يبدو جليا، من أمثلة البند السابق على الأقل، أن أنواعا كثيرة من المعادلات التفاضلية تجابهنـا في دراستنـا للظواهر المألوفة. فمن الضروري إذن، والعاجل، ان ندرس أنواعا محددة من هذه المعادلات، كلا على حدة.

وأوضح تصنيف للمعادلات هو الذي يعتمد على طبيعة المشتقات التي تشتمل عليهـا. فالمعـادلـة التي تحتـوي على مشتقـات عادية (مشتقات اقترانات متغير واحد) تسمى **معـادلـة تفـاضليـة عاديـة**، في حين ان التي تحتوي على مشتقات جزئية تسمى **معـادلـة تفـاضليـة جزئية**. والأمثلة ١ ـ أ ـ ١ إلى ١ ـ ١ ـ ٥ كلها أمثلة على معادلات تفـاضليـة عاديـة. ولن نتعرض للمعادلات الجزئية في هذا الكتاب، فمن شاء فليرجع الى كتابنا المطول.

ولأننـا سنقتصـر على المعـادلات التفـاضليـة العادية، فسنسقط لفظة العادية، ونتكلم عن المعـادلات التفـاضليـة دون نعت. رتبـة المعـادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة فيها:

المثال ١ ـ ٢ ـ ١ إليك أمثلة من المعادلات التفاضلية ورتبها:

أ) $\frac{د ص}{د س}$ = أ ص (الرتبة الأولى)، .... (١ ـ ١٢)

ب) سً (ن) − ٣ سَ (ن) + س (ن) = جتا ن (الرتبة الثانية) ، ..... (١ ـ ١٣)

جـ) $(صَ)^{٩}$ − ٢ ظاص = ٦ $e^{س}$ (الرتبة الاولى) ، .... (١ ـ ١٤)

د) $(ص^{(٤)})^{٣/٥}$ − ٢صً = جتاس (الرتبة الرابعة) .... (١ ـ ١٥)

في المثال ١ ـ ١ ـ ٢ حصلنا على المعادلة التفاضلية:

$\frac{د \triangle}{د ن}$ = ك $\triangle$ ، $\triangle$ (٠) = $\triangle$. .... (١ ـ ١٦)

وقد وجدنا حلا لها هو $\triangle$ (ن) = $\triangle$. $e^{ك ن}$ .... (١ ـ ١٧)

فهـذا الحـل (وسنـرى فيما بعد أنه الحل الوحيد) يعتمد على القيمة الابتدائية للاقتران المجهول $\triangle$ (ن). فالمسائل التي من هذا النوع تسمى **مسائل قيم ابتدائية**. وبوجه عام إن مسألة القيمة الابتدائية هي معادلة تفاضلية تعيّن فيها قيم الاقتران وبعض مشتقاته عند نقطة ما تسمى **نقطة الابتداء** فتعيين العدد الابتدائي س (٠) ، ص (٠) في المثال ١ ـ ١ ـ ٥ يجعل منظومة المعادلات التفاضلية مسألة قيمة ابتدائية. لاحظ اننا باستعمال هاتـين القيمتـين في المعـادلة الثانية في (١ ـ ٨) استطعنا أن نجد قيمة صَ (٠). وقيمتا ص (٠) ، صَ (٠) بالاضـافـة الى المعـادلـة (١ ـ ١١) تكون مسألة قيمة ابتدائية من الرتبة الثانية.

ونعـرِّف حل مسألـة القيمـة الابتـدائيـة ذات الـرتبـة ن بأنـه اقـتران قابـل للمفاضلة ن مرات، ويحقق المعادلة التفاضلية المعطاة والشروط الابتدائة المعطاة.

وفي الملحق ٥ سنثبت أنـه في كثـير من المسـائـل : هنـالـك حل وحيـد للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة ن اذا أُعطي قيمة الاقتران المجهول وقيم كل مشتقاته حتى (ن - ١) عند نقطة معطاة.

ومن ناحيـة أخـرى، قد لا نعرف عدد الفرائس، ولكن نعرف معلومات مناسبة عن عدد المفترسات، عند نقطتين من الزمن: ص (٠) و ص (أ). فهاتان القيمتان مع المعـادلـة (١ -١١) تكـون مسألـة قيم حاصرة. ولكي تكون المعادلة التفاضلية مع قيم للاقـتران ومشتقـاتـه **مسألـة قيم حاصـرة**، كل ما يلزم هو ان تعطى القيم عند نقطتين مختلفتين على الأقل. ولن نناقش مسائل القيم الحاصرة هنا. ولكن يجدها القاريء في كتابنا المطول.

والأمثلة الفيـزيـائيـة التي اوردنـاهـا في البنـد السابق نعرف ان لكل منها حلا في الطبيعـة. ولكن هنـالـك خطـر اللبس بين الحقيقـة الفيـزيـائية وبين القالب الرياضي المتمثـل بالمعـادلـة التفاضلية التي نعرفها لتمثل المسألة الحقيقية. فقد يحدث ان يخطيء التفكـير فتنجم معـادلـة لا تمت الى الحقيقـة بصلة. وعنـدهـا قد لا يوجد للمعادلات حلول. ولنذكر ايضا أن ليست كل المعادلات التفاضلية ذات حلول. فمثلا المعادلة:

$$\left(\frac{د ص}{د س}\right)^{٢} + ٣ = ٠ \quad \text{.......................} \quad (١ - ١٨)$$

ليس لها حلول ذات قيم حقيقية لأن د ص/د س تخيلية. والمعادلة:

$$\left(\frac{د\,ص}{د\,س}\right)^{٢} + ص^{٢} = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١ - ١٩)$$

حلها الوحيد صفر، في حين ان المعادلة

$$\frac{د\,ص}{د\,س} + ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١ - ٢٠)$$

لها مجموعة لا متناهية من الحلول هي ص = جـ $e^{-س}$ لكل قيم الثابت جـ.

التمارين ١ - ٢:

١. اذكر رتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية:

أ) $\acute{ص} + أ\,ص = جا^{٢}\,س$

ب) $\left(\frac{د^{٢}\,س}{د\,ن^{٢}}\right)^{٣} - ٣س \frac{د\,س}{د\,ن} = ٤\,جتان$

جـ) $\dddot{ش}\,(ن) - \ddot{ش}\,(ن) = ٠$

د) $د^{٥}\,ص \,/\, د\,س^{٥} = ٠$

هـ) صً + ص = ٠

و) $(\frac{د س}{د ن})^{٣}$ = $س^{٥}$

ح) سَ − $س^{٢}$ = ٣سً

٢ . ميز كل واحدة من المعادلات التفاضلية التالية : امسألة قيم ابتدائية أم قيم حاصرة هي :

أ) صً + $W^{٢}$ ص = ٠، ص (٠) = ٠، ص (١) = ١

ب) صً + $W^{٢}$ ص = ٠، ص (١) = ٠، صَ (٠) = ١

جـ) صً + $W^{٢}$ ص = ٠، ص (٠) = ٠، صَ (١) = ١

د) $(\frac{د س}{د ن})^{٣}$ − ٤$س^{٢}$ = جان، س (٠) = ٣

هـ) صً + ٢صً − $(صَ)^{٢}$ + $e^{ص}$ = جاس، ص (٠) = ٠، صَ (٠) = ٣، صً (٠) = ٥

و) صً + ٣صً − $(صَ)^{٢}$ + $e^{ص}$ = جاس، ص (٠) = ص (١) = ٠، صَ (٠) = ٢

٣ . بين ان الاقـتران او الاقـترانات التي ترافق كلا من المعادلات التفاضلية التالية هي حلول لها :

أ) صً + ص = ٠ ؛ $ص_{١}$ = ٢جاس ؛ $ص_{٢}$ = −٥ جتاس

ب) صً − صً + صَ − ص = س ؛ $ص_{١}$ = $e^{س}$ − س − ١ ؛ $ص_{٢}$ = ٣جتاس − س

- ١ ؛ ص$_{٣}$ = جتاس + جاس + $e^{س}$ - س - ١

جـ) س^{٢} صً - ٢س صَ + ٢ص = ٠ ؛ ص$_{١}$ = س ؛ ص$_{٢}$ = س^{٢} ؛ ص$_{٣}$ = ٢س - ٣س^{٢}

د) صً - ص = $e^{س}$ ؛ ص$_{١}$ = $\frac{س}{٢}\, e^{س}$ ؛ ص$_{٢}$ = $(٤ + \frac{س}{٢})\, e^{س} + ٣\, e^{-س}$

هـ) صَ = ٢ س ص + ١ ؛ ص$_{١}$ = $e^{س^{٢}} + e^{س^{٢}} \int_{٠}^{س} e^{-ش^{٢}}$ د ش

و) س^{٢} صً + ٥ س صَ + ٤ص = ٠ ، (س > ٠) ؛ ص$_{١}$ = $\frac{٤\ لي\ س}{س^{٢}}$ ؛

ص$_{٢}$ = $\frac{-٦}{س^{٢}}$

٤ . «حزرنا» ان للمعادلة التي من النوع

صً - ٤ صَ + ٥ ص = ٠

حلا بالشكل

ص = $e^{أس}$ جتا ب س،

أوجد هذا الحل. أيمكنك ان «تحزر» حلا آخر ؟

٥ . «حـــزرنـــا» ان للمعـادلـة صً - ٣ صَ - ٤ ص = ٠ حلا من النـوع ص = $e^{أس}$ لبعض قيم الثابت أ، أوجد حلين لهذه المعادلة.

٦ . إذا كان ص$_{١}$ (س) وص$_{٢}$ (س) حلين لمعـــادلـــة التمـرين ٥ ، تحقق من ان ص$_{٣}$ (س) = حـ$_{١}$ ص$_{١}$ (س) + حـ$_{٢}$ ص$_{٢}$ (س) حل أيضــاً، وذلـــك بتعـــويض

ص$_3$ في المعادلة، حـ$_1$، حـ$_2$ ثابتان اعتباطيان.

٧. عيِّن $\varnothing$ (س) حيث يكون الاقترانان جا لي س، جتا لي س (س > ٠) حلين للمعادلة:

$$[\varnothing(س)\ صَ]' + \frac{ص}{س} = ٠$$

٨. بيِّن أن جا(١ / س) وجتا (١ / س) حلان للمعادلة التفاضلية

$$\frac{د}{د\,س}\left(س^{٢}\ \frac{د\,ص}{د\,س}\right) + \frac{ص}{س^{٢}} = ٠ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (١ - ٢١)$$

٩. حقق أن ص$_1$ = جه س، ص$_2$ = جته س حلان للمعادلة التفاضلية صً − ص = ٠

[إرشاد: جته س = $\frac{١}{٢}(e^{س} + e^{-س})$، جه س = $\frac{١}{٢}(e^{س} - e^{-س})$]

١٠. على فرض أن $\varnothing$ (س) حل لمسألة القيم الابتدائية صً + ص صَ = س^{٣}،
ص (−١) = ١، صَ (−١) = ٢. أوجد $\varnothing'''(-1)$، $\varnothing''(-1)$.

١١. على فرض أن $\varnothing$ (س) حل للمعـــادلـــة صَ = س^{٢} + ص^{٢}، ص (١) = ٢.
أوجد $\varnothing'$ (١)، $\varnothing''$ (١)، $\varnothing'''$ (١)

---

١ ـ ٣ معادلات الفروق

معـــادلات الفـروق هي المقـابـلات المتكـاملة المميـزة للمعـادلات التفـاضليـة. تنشأ

المعادلات التفاضلية في الدراسات الفيزيائية والبيولوجية، حيث تهمنا سرعة التغير اللحظية (المشتقة) لمتغير ما بالنسبة الى متغير آخر. فمثلا قد يهمنا السرعة في لحظة معينة لذرة مقذوفة في مسار ما، أوتهمنا سرعة نمو مزرعة بكتيريا في لحظة محددة. ولكن هناك دراسات عديدة ينصبُّ الاهتمام فيها على معرفة التغيرات (الفروق)، لا سرعة التغير.

ونظرية المعادلات التفاضلية تعيش معنا منذ وقت بعيد. اما معادلات الفروق فلم تحظَ بالاهتمام الذي تستحقه الا من وقت قريب. وقد نجم هذا الاهتمام الجديد عن دخول الحاسبة الى الميدان؛ فبها تحل أنواع كثيرة من المعادلات (ومنها المعادلات التفاضلية العادية والجزئية) وذلك بحلول عددية تعتمدعلى تحويلها الى صيغ معادلات الفروق. وهذه من المفارقات، فإن كثيراً من المعادلات التفاضلية تبدأ معادلات فروق ثم ينظر في نهاية الأوضاع فتحول المعادلات الى معادلات تفاضلية تقريبية. (ومعظم نماذج النمو السكاني من هذا القبيل). وقد كان هذا هو الاجراء المتبع حتى وقت قريب، لأن المعادلات التفاضلية كانت أسهل حلا. ولكن المؤسف أن المعادلات التفاضلية التي نشأت عن معادلات فروق تقرِّب أحياناً الى معادلات فروق أخرى كثيراً ما تختلف عن المعادلات الأصلية اختلافا كبيراً. وفي الفصل ٨ سندرس طرقاً عددية ونبين كيف تحل المعادلة التفاضلية بتقريبها الى معادلة فروق.

المثال ١ - ٣ - ١ مريض في مستشفى، وصلت رئتاه بجهاز الأكسجين. فلنفرض أن ح حجم الغاز في رئتيه بعد الشهيق، وأن $ح_{ز}$ حجمه بعد الزفير (يسمى **الحجم الخافت**)، وأن الغاز يختلط في الرئتين اختلاطاً كاملا، فكم يكون تركيز النيتروجين بعد الشهيق ن ؟

كمية النيتروجين في الرئتين بعد الشهيق ن يجب أن تعادل كميته في الحيز الخافت بعد الزفير ن - ١. فاذا كان $س_{ن}$ تركيز النيتروجين بعد الشهيق ن

يكون :

$$ح\, س_{ن} = ح_{ز}\, س_{ن-١} \qquad \text{.......................} \qquad (١ - ٢٢)$$

فبطرح $ح\, س_{ن-١}$ من طرفي (١ - ٢٢)، ينتج :

$$ح\,(س_{ن} - س_{ن-١}) = (ح_{ز} - ح)\, س_{ن-١} \qquad \text{.............} \qquad (١ - ٢٣)$$

فالفرق $س_{ن} - س_{ن-١}$ هو المقابل المتكامل للمشتقة، لأنه يقيس التغير في تركيز النيتروجين. فتكون (١ - ٢٣) هي صورة متكاملة لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

فاذا استطعنا أن نجد عبارة (بدلالة ن) للتركيز $س_{ن}$ تحقق (١ - ٢٢) لكل قيم ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . ، نقول إننا وجدنا حلا لمعادلة الفرق (١ - ٢٢)، ويسهل حل هذه المعادلة، لأن

$$س_{ن} = \frac{ح_{ز}}{ح}\, س_{ن-١} = \left(\frac{ح_{ز}}{ح}\right)^{٢} س_{ن-٢} = \dots = \left(\frac{ح_{ز}}{ح}\right)^{ن} س_{٠} \,،$$

حيث $س_{٠}$ هو تركيز النيتروجين في الهواء.

المثال ١ - ٣ - ٢ يتزايد السمك في بركة بحيث ان نموه في أي سنة يبلغ مثلي نموه في السنة التي سبقتها. فلتحليل هذه الحالة نفرض أن $ع_{ن}$ هو عدد السمك بعد ن من السنوات، فالزيادة بين السنة ن والسنة ن + ١ هي $ع_{ن+١} - ع_{ن}$. والمعادلة التي تحكم نمو السمك في هذه البركة :

$$ع_{ن+١} - ع_{ن} = ٢\,(ع_{ن} - ع_{ن-١})\,، \qquad \text{................} \qquad (١ - ٢٤)$$

ويمكن أن تكتب هذه على النحو:

$ع_{ن+1} = 3ع_ن - 2ع_{ن-1}$ .... (1 ـ 25)

فإذا حددنا العدد الابتدائي $ع_0$ ، والعدد بعد سنة $ع_1$ تصبح المعادلة (1 ـ 25) مسألة قيم ابتدائية، ويتضح أن لها حلا وحيداً. فمثلا إذا كان $ع_0 = 50$ ، $ع_1 = 70$ ، يكون:

$$ع_2 = 3ع_1 - 2ع_0 = 110 ،$$

$$ع_3 = 3ع_2 - 2ع_1 = 190 ،$$

$$ع_4 = 3ع_3 - 2ع_2 ،$$

وهكـذا وطبعـا إن هذه الطـريقـة للحصول على $ع_ن$ متعبة. ولكن في الفصلين 2 ، 4 سنبين كيف أن بعض معادلات الفروق يمكن أن تحل بطريقة أقرب.

وقبل إيراد أمثلة أخرى نعرِّف **معادلة الفرق** شكلياً بأنها معادلة تربط قيم $س_ن$ بالقيم المختلفة للرمز ن فاذا كانت $ن_1$ ، $ن_2$ هما على الترتيب أكبر وأصغر قيم ن في المعادلة كانت $ن_1 - ن_2$ هي رتبة معادلة الفرق.

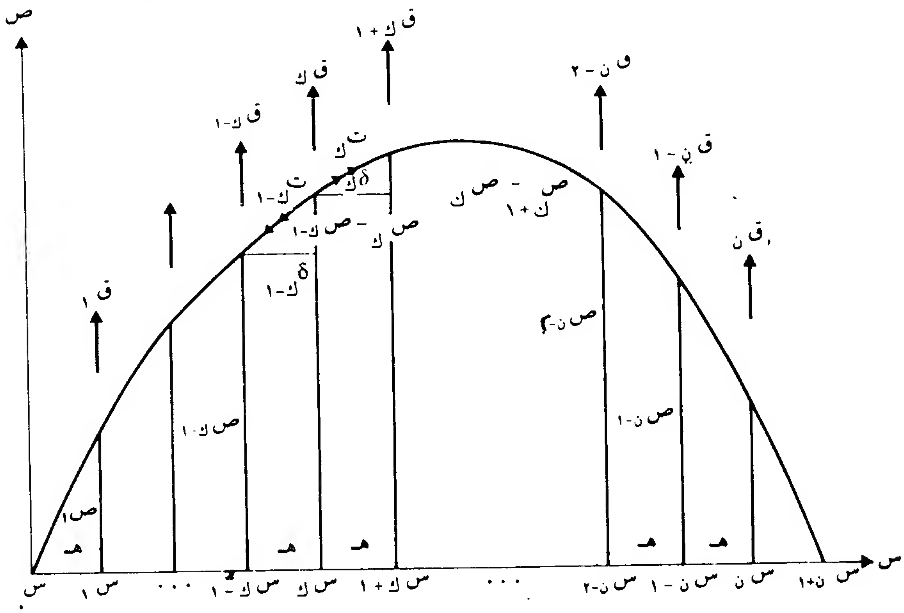
والمعادلة (1 ـ 25) رتبتها

$$(ن + 1) - (ن - 1) = 2 ،$$

في حين أن (1 ـ 22) من الرتبة الأولى.

المثال 1 ـ 3 ـ 3 إفرض أن قوى رأسية $ق_1$ ، . . . ، $ق_ن$ تؤثر على سلك على ن نقاط تتباعد على امتداد محور س مسافات متساوية كل منها هـ وحدات (أنظر الشكل 1 ـ 1) فلتحليل هذا الوضع نفرض أن توتر الخيط ثابت بين أي نقطتين

متتـاليتـين من نقـاط تأثير القوى (وبالطبع هذا الثابت يختلف من مسافة الى أخرى).
ونفرض أيضاً أن السلك لا وزن له. فاذا كان ص ك هو انحراف السلك رأسياً، باتجاه محور ص، عند النقطة س ك، وكانت $\theta_{ك}$ هي الزاوية بين اتجاه التوتر واتجاه محور س الموجب، يكون حسب الشكل ١ ـ ١ :



الشكل ١ : ١

$$\text{ظا}\,\theta_{ك} = \frac{ص_{ك+1} - ص_{ك}}{هـ}$$

أي أن

$$ص_{ك+1} - ص_{ك} = هـ \,\text{ظا}\,\theta_{ك} \quad \text{.................} \quad (١ ـ ٢٦)$$

ولنذكر ان التوتر ثابت بين أي نقطتين متتاليتين فاتجاه قوة التوتر بينهما ثابت. فاذا فرضنا أن السلك ثابت (صَ = ٠)، تكون محصلة كل القوى على النقطة (س $_{\text{ك}}$ ، ص $_{\text{ك}}$) صفراً. ومركبة ت $_{\text{ك}}$ في اتجاه ص هي ت $_{\text{ك}}$ جا $\theta_{\text{ك}}$ ، ومركبة − ت $_{\text{ك} - ١}$ في الاتجاه نفسه هي − ت $_{\text{ك} - ١}$ جا $\theta_{\text{ك} - ١}$. فنجمع القوة ق $_{\text{ك}}$ المبذولة على تلك النقطة، فينتج:

$$\text{ت}_{\text{ك}}\ \text{جا}\ \theta_{\text{ك}} - \text{ت}_{\text{ك}-١}\ \text{جا}\ \theta_{\text{ك}-١} + \text{ق}_{\text{ك}} = ٠ \qquad \text{(١ - ٢٧)}$$

وكذلك، باتجاه محور س:

$$\text{ت}_{\text{ك}}\ \text{جتا}\ \theta_{\text{ك}} - \text{ت}_{\text{ك}-١}\ \text{جتا}\ \theta_{\text{ك}-١} = \qquad \text{(١ - ٢٨)}$$

وتشير المعادلة (١ ـ ٢٨) الى ان مركبة التوتر باتجاه محور س لا تتغير. لذا سنرمز الى ت $_{\text{ك}}$ جتا $\theta_{\text{ك}}$ بالرمز ت* للدلالة على أنه ثابت. ونعوض ذلك في (١ ـ ٢٧)، فينتج:

$$\text{ت}^{*} \frac{\text{جا}\ \theta_{\text{ك}}}{\text{جتا}\ \theta_{\text{ك}}} - \text{ت}^{*} \frac{\text{جا}\ \theta_{\text{ك}-١}}{\text{جتا}\ \theta_{\text{ك}-١}} + \text{ق}_{\text{ك}} = ٠$$

أي أن

$$\text{ت}^{*} (\text{ظا}\ \theta_{\text{ك}} - \text{ظا}\ \theta_{\text{ك}-١}) + \text{ق}_{\text{ك}} = ٠ \qquad \text{(١ - ٢٩)}$$

وبضم (١ ـ ٢٦) و(١ ـ ٢٩)، نحصل على $\frac{ت^*}{هـ}$ (ص$_{ك+١}$ − ص$_{ك}$) − (ص$_{ك}$ − ص$_{ك-١}$) + ق$_{ك}$ = ٠

أي أن

$$ص_{ك+١} - ٢ص_{ك} + ص_{ك-١} + \frac{هـ}{ت^*} ق_{ك} = ٠ \quad \text{. . . . . .} \quad (١ - ٣٠)$$

وهي معادلة فروق من الرتبة الثانية. ولكن على خلاف المثال السابق، ليس من المناسب تعيين قيمتين ابتدائيتين ص$_{٠}$ ، ص$_{١}$ هنا، ولكن تتجلى أمامنا القيمتان الحاصرتان:

$$ص_{٠} = ٠ ، ص_{ن+١} = ٠ \quad \text{. . . . .} \quad (١ - ٣١)$$

فالمعادلات (١ ـ ٣٠) و(١ ـ ٣١) تكون فيهما **مسألة قيم حاصرة**. وهذه المسألة لم تكتمل صياغتها بعد، لأن ت* غير معروف. فاذا عرفنا ص$_{١}$ والتوتر الابتدائي ت$_{٠}$ ، يكون: ظا θ$_{٠}$ = ص$_{١}$ / هـ فينتج أن

$$ت^* = ت_{٠} \text{ جتا } θ_{٠} = \frac{ت_{٠}}{\sqrt{١ + (ص_{١}/هـ)^٢}}$$

المثال ١ ـ ٣ ـ ٤ تصور مجتمعاً يتزايد من جيل إلى جيل، وليكن عدده ع$_{ن}$ في الجيل ن.

وواضح ان العدد في الجيل ن يعتمد على العدد في الجيل الذي قبله، وقد يعتمد أيضاً على الاعداد في الاجيال التي قبلها، فمثلا قد تستنفذ اجيال سابقة معظم الموارد حتى يصير التكاثر على الأجيال اللاحقة صعباً أو مستحيلا. فالمعادلة

$$س_{ن+٢} = ر س_{ن+١} + ز س_{ن} \quad \text{.................... (١ - ٣٢)}$$

يمكن اعتبارها نموذجاً للنمو السكاني حيث يتكون الجيل ن + ٢ من عناصر ن + ١ وعناصر من الجيل ن والثابتان ر ، ز يقيسان الأهمية النسبية لهذين المكونين.

المثال ١ - ٣ - ٥ تبارى شخصان في لعبة، وكان الرهان ديناراً كل مرة. وكان احتمال ربح الأول، كل مرة ، ف ، واحتمال ربح الثاني ق ؛ ف + ق = ١ . فلنفرض أن مجموع ما كان معهما د ديناراً، ولنجعل $س_{ك}$ يرمز الى احتمال أن يربح الأول في النهاية كل ما مع الثاني حيث ك هي عدد الدنانير التي مع الأول، حيث ٠ ⩽ ك ⩽ د. فاذا كان الأول معه الآن ك ، فان احتمال ان يصير معه في اللعبة الثانية ك + ١ هو ف ، واحتمال ان يصير معه ك - ١ هو ق. فيكون:

$$س_{ك} = ف س_{ك+١} + ق س_{ك-١} ، \quad \text{.................. (١ - ٣٣)}$$

والقيمتان الحاصرتان هما $س_{٠} = ٠$ ، $س_{د} = ١$. .... (١ - ٣٤)

وسنعود الى هذا المثال في البند ٤ - ٨، وسنجد انه اذا كانت ف أكثر ولو قليلا من $\frac{١}{٢}$ يصير الاحتمال كبيراً جداً في ان يؤول كل المبلغ الى الأول، حتى وإن بدأ بأقل

مما مع الثاني. وهذا هو الحال في نوادي القمار حيث يكون الحظ دائماً في جانب النادي.

وقد تفيد معادلات الفروق في حساب التكامل:

المثال ١ ـ ٣ ـ ٦ يتصل التكامل التالي بمتممة اقتران الخطأ الذي كثيراً ما ينشأ في المسائل الفيزيائية:

$$\text{كا}_{\text{ك}}(\text{س}) = \int_{\text{س}}^{\infty} \frac{(\text{ن} - \text{س})^{\text{ك}}}{\text{ك}\,!}\, e^{-\text{ن}^{2}}\, \text{د ن}، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١ ـ ٣٥)$$

حيث ك ! = ك (ك − ١) (ك − ٢) . . . ٣ × ٢ × ١ ، ك عدد صحيح موجب، ٠ ! = ١ . ويمكن ان نكتب $\text{كا}_{\text{ك}}$ س على النحو التالي:

$$\text{كا}_{\text{ك}}(\text{س}) = \frac{١}{\text{ك}} \int_{\text{س}}^{\infty} (\text{ن} - \text{س})\, \frac{(\text{ن} - \text{س})^{\text{ك} - ١}}{(\text{ك} - ١)\,!}\, e^{-\text{ن}^{2}}\, \text{د ن}$$

$$= - \frac{\text{س}}{\text{ك}}\, \text{كا}_{\text{ك}-١}(\text{س}) + \frac{١}{\text{ك}} \int_{\text{س}}^{\infty} \frac{(\text{ن} - \text{س})^{\text{ك} - ١}}{(\text{ك} - ١)\,!}\, \text{ن}\, e^{-\text{ن}^{2}}\, \text{د ن}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١ ـ ٣٦)$$

فبمكاملة الحد الأخير من هذه المعادلة بالأجزاء ينتج:

$$\text{كا}_{\text{ك}}(\text{س}) = - \frac{\text{س}}{\text{ك}}\, \text{كا}_{\text{ك} - ١}(\text{س}) + \frac{١}{٢\,\text{ك}}\, \text{كا}_{\text{ك} - ٢}(\text{س}) \quad \ldots\ldots \quad (١ ـ ٣٧)$$

ومثـــل هذه من معـــادلات الـفــروق تسـمـى علاقــات تكـــرار (recurrence relations) . لاحظ ان

$$\text{كا}_{\cdot}(\text{س}) = \int_{\text{س}}^{\infty} e^{-\text{ن}^{٢}}\ \text{د ن} \ ،$$

فاذا كاملناها بالأجزاء ينتج :

$$\text{كا}_{١}(\text{س}) = \int_{\text{س}}^{\infty} (\text{ن} - \text{س})\ e^{-\text{ن}^{٢}}\ \text{د ن} = \frac{e^{-\text{س}^{٢}}}{٢} - \text{س كا}_{\cdot}(\text{س}) .$$

وبمعرفة هاتين القيمتين لأي س يمكن ان نحسب $\text{كا}_{\text{ك}}(\text{س})$ لكل ك .

وعلى الأخص : اذا كان س = ٠ ، يمكن ان نستعمـــل القـــانـــون ٥٨ في الملحق ١ لنحصل على أن $\text{كا}_{\cdot}(٠) = \sqrt{\pi / ٢}$ ، وان $\text{كا}_{١}(٠) = \frac{١}{٢}$. فمن (١ ـ ٣٧)،

ينتج :

$$\text{كا}_{\text{ك}}(٠) = \frac{١}{٢\ \text{ك}}\ \text{كا}_{\text{ك} - ٢}(٠) \ ،$$

$$\text{فاذن كا}_{٢\text{ن}}(٠) = \frac{\sqrt{\pi}}{٢^{٢\text{ن} + ١}\ \text{ن}!}$$

و

$$\text{كا}_{٢\text{ن} + ١}(٠) = \frac{(\text{ن} + ١)!}{(٢\text{ن} + ٢)!}$$

التمارين ١ - ٣

١ . اذكر رتبة كل من معادلات الفروق التالية :

أ) $ص_{ن+١} = (ص_ن)^٢$

ب) $ص_{ن+٣} = (ص_ن)^٢ - ٣ن$

جـ) $ص_{ن+٣} = (ص_{ن+١})^٣$

د) $(ص_{ن+٣})^٥ = \sqrt{ص_{ن+٢}}$

هـ) $ص_{ن+٥} - ٢ص_{ن+٣} + ص^٢_ن = ن^٢ + ٦$

و) $ص_{ن+١} - ن + ص_ن - \sqrt{ن - ٢} = ٠$

ز) $ص_ن ص_{ن+١} ص_{ن+٢} - ص_{ن+٣} ص_{ن-١} = ٢ ن^٢$

٢ . وضح بالرسم البياني عمليات النمو المتميزة التي تمثلها الصيغ التالية ، ابتداء من الزمن ن = ٠ . هل يقترب $س_ن$ من قيمة حاصرة (اومن اتزان) باقتراب ن من اللانهاية ؟

أ) $س_ن = ١٠٠ + ١٠٠ (٢)^{-ن}$

ب) $س_ن = ١٠٠ + ١٠٠ (\frac{١}{١ + ن^٢})$

جـ) $س_ن = ١٠٠ + ٥ ن^٢$

د) $س_ن = \sqrt{٩ + ن}$

٣. حقق أن $س_ن = ن^٢ + ن$ حل لمعادلة الفرق $س_{ن+١} - س_ن = ٢ (ن + ١)$، وان $ص_ن = ن^٢ + ن + حـ$ حل آخر لها، مهما تكن قيمة الثابت حـ.

٤. حقق أنه مهما تكن قيمة الثابت ك، فإن $س_ن = ك \times ٢^{ن(ن+١)/٢}$ حل لمعادلة الفرق:

$$س_ن = ٢^ن س_{ن-١}.$$

٥. كان نمو البكتيريا في مزرعة وافرة الغذاء يقاس مرة كل ساعتين، فكان كل مرة يزيد ٣٠ في المئة عما كان في سابقتها.

(أ) صف عملية نموه بمعادلة فرق تعطي $ع_ن$ أي عدد البكتيريا بعد ن ساعات.

(ب) ما رتبة هذه المعادلة؟

(حـ) اذا كان العدد الابتدائي ١٠٠٠، فما قيمة $ع_٢$؟ $ع_٤$؟

٦. قدر ما ينتج الفرد الواحد في اميريكا من نفايات بحوالي ٥ باوند يومياً، ويتزايد هذا بمعدل ٤ في المئة في السنة. فليكن $ف_ن$ هو معدل انتاج الفرد الواحد من النفايات بعد ن من السنوات:

أ) صف بمعادلة فرق تزايد انتاج الفرد الواحد للنفايات.

ب) أوجد $ف_٢$، $ف_٤$.

٧. «حزرنا» أن للمعادلة $ص_{ن+٢} - ٣ ص_{ن+١} - ٤ ص_ن = ٠$ حلولا من النمط $ص_ن = \lambda^ن$، حيث λ ثابت ما. أوجد حلين لهذه المعادلة.

٨. على فرض ان $ص_ن$، $ع_ن$ حلان لمعادلة الفرق

$$ص_{ن+٢} + أ_ن\ ص_{ن+١} + ب_ن\ ص_ن = ٠،$$

حيث $أ_ن$ ، $ب_ن$ اقترانان في ن، بيِّن أن $ف_ن = حـ_١\ ص_ن + حـ_٢\ ع_ن$ هو ايضاً حل، مع جميع قيم الثابتين $حـ_١$ ، $حـ_٢$.

٩. بين انه مهما يكن الثابتان $حـ_١$ ، $حـ_٢$ فإن

$$ص_ن = \frac{١}{١٤}\ (ن - \frac{٩}{١٤})^٢ + حـ_١ - حـ_٢\ (-٦)^ن$$

حل لمعادلة الفرق

$$ص_{ن+٢} + ٥\ ص_{ن+١} - ٦\ ص_ن = ن$$

١٠ ـ حقق أن $ص_ن = ن \times ٢^{ن-١}$ حل لمعادلة الفرق

$$ص_{ن+٢} - ٣\ ص_{ن+١} + ٢\ ص_ن = ٢^ن.$$

١١. حقق أن $س_ن = ٢^ن$ ، $ص_ن = ن \times ٢^ن$ حلان لمعادلة الفرق $ص_{ن+٢} - ٤\ ص_{ن+١} + ٤\ ص_ن = ٠$.

١٢. حقق أن

$$ع_ن = حـ_١\ ٢^ن + حـ_٢\ ن\ ٢^ن + \frac{ن^٢}{٨}\ ٢^ن،$$

حيث $حـ_١$ ، $حـ_٢$ اي ثابتين، حل لمعادلة الفرق

$$س_{ن+٢} - ٤\ س_{ن+١} + ٤\ س_ن = ٢^ن.$$

١٣. حقق أن $س_ن = حـ_١$ جا$(٢ ن \pi / ٣) + حـ_٢$ جتا$(٢ ن \pi / ٣)$ حل لمعادلة

الفرق $\text{ص}_{\text{ن}+2} + \text{ص}_{\text{ن}+1} + \text{ص}_{\text{ن}} = 0$ مع جميع قيم الثابتين ح_1 ، ح_2 . أوجد حلا يحقق الشرطين الابتدائيين $\text{ص}_0 = 1$ ، $\text{ص}_1 = 2$.

١٤ . يعرَّف اقتران جاما بالصيغة

$$\Gamma(\text{ع}) = \int_{0}^{\infty} e^{-\text{ن}}\, \text{ن}^{\text{ع}-1}\, \text{د ن} .$$

بين أنه يحقق معادلة الفرق $\Gamma(\text{ع}) = (\text{ع} - 1)\, \Gamma(\text{ع} - 1)$، ثم أثبت ان $\Gamma(\text{ع}) = (\text{ع} - 1)!$ ، ع عدد موجب.

١٥ . ليكن

$$\text{كا}_{\text{ك}}(\text{س}) = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جتاك ن} - \text{جتاك س}}{\text{جتان} - \text{جتاس}}\, \text{د ن}$$

بيِّن أن $\text{كا}_{\text{ك}}$ يحقق معادلة الفرق

$$\text{كا}_{\text{ب}+2}(\text{س}) - 2\, \text{كا}_{\text{ك}}(\text{س})\, \text{جتاس} + \text{كا}_{\text{ك}-1}(\text{س}) = 0 .$$

الفصل الثاني

معادلات الرتبة الاولى

قد يكـون حل معـادلـة من الـرتبـة الأولى ، تفاضلية كانت أو معادلة فرق ، أمراً صعباً جداً ، ذلـك أنـه ليس هنـالـك طريقـة عامة تصلح لجميع الحالات . وفي هذا الفصل ندرس بعضـاً من أنجـح الطـرق لحل معـادلـة الـرتبة الأولى . وسنرى من هذا الفصل والفصـول التـاليـة أن مقـدرتنـا على حل المعـادلات التفاضلية الخطية لا يحدها سوى قدرتنا على اجراء تكاملات قائمة على قاعدة نظرية ناضجة . وسنرى من ناحية أخرى أن عديداً من الطرق تلزم للتأتي للمعادلات غير الخطية ، ولكن ليس هنالك ما يضمن أن أيا منها ستنجح . لهذا ستبدو الطرق التي نعرضها كأنها حشد من الحيل . إنها ، على كل حال ، تقوم على ثلاثة مباديء اساسية :

التعويض ، وفصل المتغيرات ، والضرب باقتران مناسب .

٢ ـ ١ طرق مباشرة

خذ المعادلة التفاضلية التالية، وهي من الرتبة الأولى :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق (س ، ص)} \qquad \text{(٢ ـ ١)}$$

فاذا أمكن كتابة الاقتران ق (س ، ص) بحيث لا يشتمل على الدالة المتغيرة ص، فعندها تحل المعادلة بمكاملة طرفيها بالنسبة الى س.

المثال ٢ ـ ١ ـ ١ $\frac{\text{ذ ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س + س ص}}{\text{١ + ص}}$. فبعد اختزال العامل المشترك (١ + ص) من البسط والمقام في الطرف الأيسر، يبقى في هذا الطرف س، ويكون :

$$\text{ص} = \int \text{س د س} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ث}.$$

وواضح ان هذه الطريقة تصح مع معادلات من رتب أعلى، من النوع $\text{ص}^{(\text{ن})} = \text{ق (س)}$.

وبمثل هذه السهولة تجد طريقة **فصل المتغيرات**، وهي تستعمل حيث يمكن تحليل ق (س ، ص) الى الشكل

$$\text{ق (س ، ص)} = \frac{\text{ك (س)}}{\text{ل (ص)}}،$$

حيث ك (س) ، ل (س) كل منهما اقتران بمتغير واحد . فعندها تكتب المعادلة (٢ ـ ١) على النحول (ص) $\frac{د ص}{د س}$ = ك (س) .

فنكامل طرفي المعادلة بالنسبة الى س، ونغير متغيرات الطرف الأيمن فينتج :

$$\int ل (ص) د ص = \int ل (ص) \frac{د ص}{د س} د س = \int ك (س) د س + حـ .$$

المثال ٢ ـ ١ ـ ٢ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س ص . نكتب هذه المعادلة بالشكل

$$\frac{١}{ص} د ص = ٢ س د س$$

بحيث يجري تغيير المتغيرين تلقائياً . ونكامل الطرفين،

فينتج لي ص = $س^٢$ + حـ ،

أو بلغة الأس :

$$ص = e^{س^٢ + حـ} = e^{حـ} e^{س^٢} = جـ_١ e^{س^٢} .$$

هذا هو الحل العام للمعادلة ، وهو يحتوي على $حـ_١$ ، وهذا ثابت حقيقي غير محدد ، ولذا فالمعادلة التفاضلية صَ = ٢ س ص لها عدد لا نهاية له من الحلول ، حسب القيمة التي نعطيها للثابت $جـ_١$.

وفي البند ١ ـ ٢ نظرية الموجودية والوحدانية ، وهي أساسية في مسائل القيم الابتدائية . فاذا عيّنا شرطاً ابتدائياً يضاف الى المعادلة التفاضلية في المثال ٢ ـ ١ ـ ٢ فعندها يعين هذا الشرط حل لمسألة القيمة الابتدائية كاملا . فمثلا : اذا كان الشرط

الابتدائي ص (١) = ٢ ، فبتعويض س = ١ في الحل العام، ينتج ٢ = ص = ص (١) = $ج_١$ e أي ان $ج_١$ = ٢/e .

فالحل الوحيد لمسألة القيمةالابتدائية

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ \text{ س ص، ص (١) = ٢،}$$

هـو:

$$ص = ٢ e^{س^٢ - ١}$$

وللحصـول على حل وحيـد لمسألـة قيم ابتدائية يلزم أن نعين شروطاً ابتدائية بقدر رتبة المعادلة . وسنثبت هذه الحقيقة في الملحق ٥ .

المثال ٢ ـ ١ ـ ٣ في المثال ١ ـ ١ ـ ٤ حصلنا على المعادلة الحركية

$$\frac{د ع}{د ن} = ع \,(\beta - \delta ع) \text{ ،} \qquad \text{. . . . .} \quad (٢ ـ ٢)$$

حيث β ، δ ثابتان معطيان . فنفصل المتغيرين، فينتج :

$$\frac{د ع}{ع \,(\beta - \delta ع)} = د ن \qquad \text{. . . . .} \quad (٢ ـ ٣)$$

ويسهل أن نتحقق من أن

$$\frac{١}{ع \,(\beta - \delta ع)} = \frac{١}{\beta ع} + \frac{\delta}{\beta \,(\beta - \delta ع)}$$

فبتعويض الطرف الأيسر من هذه المعادلة في (٢ ـ ٣)، واجراء التكامل، ينتج:

$$\frac{1}{\beta}\,\text{لي}\,\text{ع} - \frac{1}{\beta}\,\text{لي}\,(\beta - \delta\,\text{ع}) = \text{ن} + \text{حـ}$$

أي أن

$$\text{لي}\left(\frac{\text{ع}}{(\beta - \delta\,\text{ع})}\right)^{1/\beta} = \text{ن} + \text{حـ}.$$

فبالرفع والتعبير عن الثابت الاعتباطي $e^{\text{حـ}}$ بالرمز حـ، ينتج:

$$\frac{\text{ع}}{\beta - \delta\,\text{ع}} = \text{حـ}\, e^{\beta\,\text{ن}} \qquad \text{(٢ ـ ٤)}$$

[تنبيه: سنتبع مثل هذه الاجراءات في الثوابت دون التنبيه الى ذلك.]

والآن نعوض ن = ٠،

فينتج $$\frac{\text{ع}(0)}{\beta - \delta\,\text{ع}(0)} = \text{حـ}، \qquad \text{(٢ ـ ٥)}$$

نعوض قيمة حـ هذه في المعادلة (٢ ـ ٤) فينتج:

$$\frac{\text{ع}(\text{ن})}{\beta - \delta\,\text{ع}(\text{ن})} = \frac{\text{ع}(0)}{\beta - \delta\,\text{ع}(0)}\, e^{\beta\,\text{ن}}$$

وبالضرب التصالبي وايجاد ع (ن)، نحصل على النتيجة:

$$ع(ن) = \frac{\beta}{\delta + [\beta\, ع(٠)^{-١} - \delta]\, e^{-\beta ن}} \quad \text{.................} \quad (٢ - ٦)$$

وهذا هو حل المعادلة الحركية (١ ـ ٧).

وكثيراً ما يكون من المفيد أن نكتب المعادلة (٢ ـ ١) بالصيغة

$$د ص - ق (س ، ص) د س = ٠$$

وعندها يصير بالأمكان أن نضرب المعادلة باقتران فنحصل على تفاضلة اقتران آخر معروف.

المثال ٢ ـ ١ ـ ٤

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{ص}{س + س^{٢} ص^{٢}}$$. نعيد كتابة المعادلة بالصيغة

$$(س + س^{٢} ص^{٢}) د ص - ص د س = ٠،$$

ونعيد ترتيبها بالصيغة

$$س^{٢} ص^{٢} د ص + (س د ص - ص د س) = ٠ \quad \text{............} \quad (٢ - ٧)$$

فالقوسان يذكران بالصيغة التفاضلية

$$د \left(\frac{ص}{س}\right) = \frac{س د ص - ص د س}{س^{٢}} \quad \text{.....................} \quad (٢ - ٨)$$

فنقسم المعادلة (٢ ـ ٧) على $س^{٢}$ وينتج

$$د\left(\frac{جص^{٣}}{٣}\right) + د\left(\frac{ص}{س}\right) = ٠ ،$$

وبالتكامل، ينتج

$$\frac{ص^{٣}}{٣} + \frac{ص}{س} = حـ_{٠}$$

والصيغ التفاضلية التالية كثيراً ما تفيد في حالات مماثلة:

$$د\left(\frac{س}{ص}\right) = \frac{ص\ د\ س - س\ د\ ص}{ص^{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٩)$$

$$د\ (س\ ص) = س\ د\ ص + ص\ د\ س\ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٠)$$

$$د\ (س^{٢} + ص^{٢}) = ٢\ (س\ د\ س + ص\ د\ ص)\ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١١)$$

$$د\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \frac{س\ د\ س + ص\ د\ ص}{\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٢)$$

$$د\left(ظا^{-١}\ \frac{س}{ص}\right) = \frac{ص\ د\ س - س\ د\ ص}{س^{٢} + ص^{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٣)$$

$$د\left(لو\ \frac{س}{ص}\right) = \frac{ص\ د\ س - س\ د\ ص}{س\ ص} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٤)$$

المثال ٢ - ١ - ٥ السقوط الحر حسب قانون نيوتن الثاني في الحركة: اذا أثرت قوة ق

على جسم كتلته ك، فإن الجسم يسير بتسارع ت حيث ت = $\frac{ق}{ك}$. أي أن ق = ك ت. فاذا سقط جسم سقوطاً حراً بتأثير الجاذبية الأرضية، فالقوة المؤثرة عليه هي وزنه ك حـ، حيث حـ هو تسارع الجاذبية (ويمكن اعتباره على سطح الأرض ثابتاً يساوي تقريباً ٣٢ قدماً في الثانية). فليكن ص ارتفاع الجسم فوق سطح الأرض، فيكون تسارع الجسم الى أعلى $\frac{د^٢ ص}{د ن^٢}$،

ويكون

$$ك \frac{د^٢ ص}{د ن^٢} = - ك حـ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٥)$$

والأشارة السالبة تشير الى ان الجاذبية تؤثر الى أسفل. فبالاختصار والمكاملة، ينتج

$$\frac{د ص}{د ن} = - حـ ن + ع_٠ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٦)$$

حيث ع. هي سرعة الجسم عند ن = ٠. نكامل مرة أخرى، فينتج

$$ص = \frac{١}{٢} حـ ن^٢ + ع_٠ ن + ص_٠ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٧)$$

حيث ص. هو ارتفاع الجسم عند ن = ٠.

السقوط المعّوق اذا أخذنا بعين الاعتبار ان الهواء يبذل قوة مقاومة تتناسب مع سرعة الجسم، تصبح المعادلة (٢ - ١٥) بالشكل

$$\frac{د^٢ ص}{د ن^٢} = - حـ - ث \frac{د ص}{د ن} ، ث > ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٨)$$

(والإشارة السالبة في الحد الأخير تشير الى ان مقاومة الهواء تحدث تباطؤاً.)

نكتب ع = د ص/د ن، فتصير المعادلة

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = -\text{حـ} - \text{ث ع}، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢ - ١٩)$$

ونفصل المتغيرين، فينتج $\int \frac{\text{د ع}}{\text{ث ع} + \text{حـ}} = - \int \text{د ن} + \text{ث}_١$ ،

فيكون

$$\frac{١}{\text{ن}} \text{لي} (\text{ث ع} + \text{حـ}) = - \text{ن} + \text{ث}_١ ،$$

وبعد الرفع ينتج

$$\text{ع} = - \frac{\text{حـ}}{\text{ث}} + \text{ث}_٢ e^{-\text{ث ن}} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢ - ٢٠)$$

ولأن ث > ٠، فان ع ← $-\frac{\text{حـ}}{\text{ث}}$ عندما ن ← ∞ . وهذه السرعة التي يؤول اليها الجسم نسميها حد السرعة terminal velocity . في (٢ - ٢٠): إذا جعلنا ن = ٠ نستنتج أن $\text{ث}_٢ = \text{ع}_٠ + \frac{\text{حـ}}{\text{ث}}$. فاذا كانت $\text{ع}_٠ = ٠$ ينتج أن

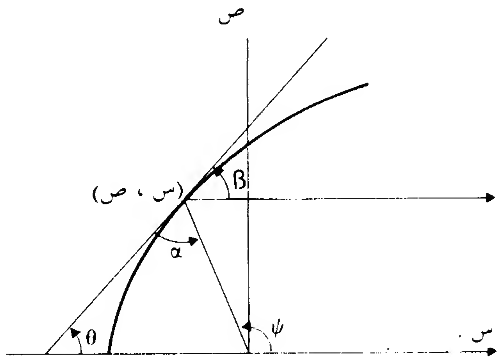
$$\text{ع} = \frac{\text{حـ}}{\text{ث}} (e^{-\text{ث ن}} - ١).$$

ولإيجاد الارتفاع ص في أي لحظة ن، نجري عملية تكامل ثانية على المعادلة (٢ - ٢٠).

المثال ٢ ـ ١ ـ ٦ كيف يجب أن تكون هيئة مرآة منحنية بحيث أن النور الساقط عليها من مصدر في نقطة الأصل ينعكس موازياً محور س ؟

نعلم من التماثل ان سطح المرآة سطح دوراني ينجم عن دوران منحنى حول محور س. فلتكن (س ، ص) أي نقطة على المقطع العرضي للسطح، في المستوى س ص (أنظر الشكل ٢ ـ ١). ينص قانون الانعكاس على أن زاوية السقوط α تساوي زاوية الانعكاس β . فيكون $\alpha = \beta = \theta$. ولأن مجموع الزوايا الداخلة في المثلث ١٨٠° ينتج ان $\psi = \alpha + \theta = 2\theta$. والمهم في أمر θ ، ψ أن :

$$\text{ص}' = \text{ظا}\,\theta \quad ، \quad \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ظا}\,\psi \,.$$



الشكل ٢ : ١

فباستعمال العلاقة المثلثية لظل ضعف الزاوية ينتج أن :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ظا}\,\psi = \text{ظا}\,2\theta = \frac{2\,\text{ظا}\,\theta}{1 - \text{ظا}^2\theta} = \frac{2\,\text{ص}'}{1 - (\text{ص}')^2}\,.$$

نحل المعادلة لإيجاد صَ، فنحصل على المعادلة التربيعية:

$$ص\,(صَ)^{٢} + ٢\,س\,صَ - ص = ٠،$$

فحسب قاعدة المعادلة التربيعية، يكون:

$$صَ = \frac{-س \pm \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}}{ص}$$

وهذا يكتب بالشكل:

$$س\,د\,س + ص\,د\,ص = \pm \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}\;د\,س.$$

فحسب المعادلة (٢ ـ ١٢)

ينتج أن $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \pm\, س + حـ،$

وبتربيع الطرفين،

$$ص^{٢} = \pm\, ٢\,حـ\,س + حـ^{٢}.$$

وهذه معادلة فصيلة قطوع مكافئة بؤرتها في نقطة الأصل وهي تتماثل بالنسبة الى محور س.

التمارين ٢ ـ ١

في التمارين ١ إلى ٢٠، أوجد الحل العام، صريحاً إذا أمكن، والا فأوجد علاقة تعرِّف الحل ضمنياً. وحيث يذكر شرط ابتدائي، أوجد الحل الخاص الذي يحققه:

١. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{e^{\text{س}}}{\text{٢ ص}}$

٢. $\text{س ص}' = \text{٣ ص}$ ، $\text{ص}(\text{٢}) = \text{٥}$

٣. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{e^{\text{ص}}\,\text{س}}{e^{\text{ص}} + \text{س}^{\text{٢}}\, e^{\text{ص}}}$

٤. $\frac{\text{د س}}{\text{د ص}} = \text{س جتا ص}$، $\text{س}(\pi/\text{٢}) = \text{١}$

٥. $\frac{\text{د ع}}{\text{د ق}} = \text{ق}^{\text{٢}}(\text{١} + \text{ع}^{\text{٢}})$

٦. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{ص} = \text{ص}(\text{س}\, e^{\text{س}^{\text{٢}}} + \text{١})$، $\text{ص}(\text{٠}) = \text{١}$

٧. $\frac{\text{د ف}}{\text{د ق}} = \text{ف}(\text{جتا ق} + \text{جا ق})$

٨. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ص}^{\text{٢}}(\text{١} + \text{س}^{\text{٢}})$، $\text{ص}(\text{٠}) = \text{١}$

٩. $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} + \text{٢ م} = \text{م ن}^{\text{٢}}$ ، $\text{م}(\text{٠}) = \text{١}$

١٠. $\frac{د ص}{د س} = \sqrt{1 - ص^2}$

١١. (١ + س) د ص + ٣ص د س = ٠، ص (٦) = ٧

١٢. $\frac{د س}{د ن}$ +(جتا ن) $e^{س}$ = ٠

١٣. (ص + ٣) د س + جتا س د ص = ٠

١٤. $\frac{د س}{د ن}$ = س (١ - جا ٢ ن)، س (٠) = ١

١٥. $\sqrt{1 - س^2}$ د ص + $\sqrt{1 - ص^2}$ د س = ٠

١٦. (جاس جتاص) د س + (جتاس جاص) د ص = ٠، ص (٠) = ٠

١٧. $س^2$ د ص + $ص^2$ د س = ٠، ص (١) = ١

١٨. $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص^3 + 2 ص}{س^2 + 3 س}$، ص (١) = ١

١٩. $e^{س}$ ($\frac{د س}{د ن}$ + ١) = ١، س (٠) = ١

٢٠. ($ل^2$ - ٢ ل - ٨) د م = ($م^2$ + م - ٢) ٢ ل، م (٠) = ٠

٢١. إفرض مجتمعاً ع (ن) يتكاثر حسب المعادلة الحركية د ع/د ن = ع (∝ - β ع)..

برهن أن سرعـة النمـو تكون في نهايتها العظمى عندما يكون العدد نصف العدد الذي

يستقر المجتمع عليه .

٢٢ . في مزرعة بروتوزوا تقدم البكتيريا غذاء ، بمعدل ثابت مقداره μ . وقد لوحظ انها تستهلك بسرعة تتناسب مع مربع عددها . فتركيز البكتيريا إذن ك (ن) يحقق المعادلة التفاضلية ٢ ك/٢ ن = μ - λ ك^{٢}، حيث λ ثابت موجب .

أ) عبر عن ك (ن) بدلالة ك (٠) .

ب) كم يكون التركيز في حالة الاستقرار ؟

٢٣ . في بعض التفاعلات الكيميائية تعمل بعض النواتج وسائط ذاتية لانتاج المزيد منها . فاذا كان س (ن) مقدار ناتج منها في الزمن ن ، فإن المعادلة التفاضلية د س/د ن = α (β - س) هي نموذج محتمل لهذا التفاعل ، حيث α و β ثابتان موجبان . وحسب هذا النموذج ، ينتهي التفاعل عندما يصير س = β اذ عندها تكون احدى المواد الكيميائية قد استنفدت .

أ . حل المعادلة بدلالة الثوابت α و β ، س (٠) .

ب . على فرض أن α = ١ ، β = ٢٠٠ ، س (٠) = ٢٠ ، ضع رسماً بيانياً يعطي س (ن) ، ن > ٠ .

٢٤ . في أحد الأيام بدأ الثلج يتساقط في الصباح الباكر ، واستمر بسرعة ثابتة . فاذا كانت سرعة الجرافة التي تزيحه من الشوارع تتناسب عكسياً مع إرتفاع الثلج المتراكم ، وبدأت عملها الساعة ١١ صباحاً ، وفي الساعة ٢ بعد الظهر كانت قد ازاحت الثلج عن ٤ أميال من الطريق ، وفي الساعة ٥ كانت قد أخلت ميلين آخرين . متى بدأ الثلج يسقط ؟

٢٥ . صهريج كبير مفتوح ، على شكل نصف كرة قطرها خمسون قدماً ، وهو مملوء بالماء ، وفي آخره ثقب مستدير قطره قدمان . فحسب قانون توريشللي*، يتدفق الماء من

* ايفانجلستا توريشللي (١٦٠٨ ـ ١٦٤٧) كان فيزيائيا ايطاليا .

الثقب بسرعة تعادل سرعته لو سقط سقوطاً من سطح الماء الى موضع الثقب. كم يمضي من الزمن حتى ينفد ماء الصهريج ؟

٢٦ . في التمرين ٢٥ : صف هيئة الصهريج عندما ينخفض سطح الماء فيه بسرعة ثابتة† .

٢٧ . جيء لملك ترانسلفانيا وملكتها بفنجانين من القهوة الساخنة ومعها الحليب البارد. اما الملك فوضع في فنجانه ملعقة من الحليب فوراً وانتظر. واما الملكة فانتظرت عشر دقائق ثم أضافت الحليب (على درجة الحرارة نفسها) الى فنجانها، ثم شربا معاً.

أي الفنجانين يكون أسخن ؛

[إرشاد: استخدم قانون نيوتن في التبريد، وافرض ان درجة حرارة الحليب اقل من درجة حرارة الهواء.]

٢ ـ ٢ طرق التعويض

نقدم في هذا البند ثلاثة أشكال من التعويض تفيد أحياناً في حل معادلات تفاضلية.

لنفرض ان لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، بالصيغة

$$\frac{د ص}{د س} = ق \left(\frac{ص}{س}\right) \text{؛} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (٢ ـ ٢١)$$

أي ان طرفها الأيسر دالة للمتغير ص / س. فمن الطبيعي ان نجرب تعويض ع = ص/س.

† كان المصريون القدماء (حوالي ١٣٨٠ ق. م) يستعملون ساعات مائية لتعيين الوقت تعمل على هذا المبدأ.

ولأن ص يعتمد على س، فكذلك ع. فاذا فاضلنا ص = س ع بالنسبة الى س ينتج:

$$\frac{د ص}{د س} = ع + س \frac{د ع}{دس} \quad \text{.......................} \quad (٢ - ٢٢)$$

ونعوض ع = ص/س ونستعيض عن الطرف الأيمن في (٢ - ٢١) بالطرف الأيسر في (٢ - ٢٢)، فينتج:

$$ع + س \frac{د ع}{د س} = ق\,(ع).$$

ويمكن فصل المتغيرين في هذه المعادلة، لأن

$$س \frac{د ع}{د س} = ق\,(ع) - ع،$$

فيكون

$$\frac{د ع}{ق\,(ع) - ع} = \frac{د س}{س}.$$

ويمكن الآن الحصول على الحل كاملا بمكاملة طرفي المعادلة ثم نستعيض عن ع بقيمتها ص/س والمثال التالي يوضح هذه الطريقة:

المثال ٢ - ٢ - ١

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{س - ص}{س + ص}$$ بقسمة البسط والمقام في الطرف الأيسر على س

ينتج :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ - (ص/س)}{١ + (ص/س)} = \frac{١ - ع}{١ + ع} = ق (ع) .$$

فنستعيض عن الطرف الأيمن بالعبارة ع + س (د ع/د س)، ونفصل المتغيرين، فينتج بعد التعديل الجبري :

$$\left(\frac{١ + ع}{١ - ٢ ع - ع^٢}\right) د ع = \frac{د س}{س} .$$

وبعد التكامل ينتج

$$لي (١ - ٢ ع - ع^٢) = -٢ لي س + حـ = لي حـ س^{-٢} ،$$

فنرفع ونعوض عن ع بقيمتها ص/س فينتج الاقتران الضمني

$$١ - \frac{٢ ص}{س} - \frac{ص^٢}{س^٢} = \frac{حـ}{س^٢} .$$

فنضرب في $س^٢$ وينتج $س^٢ - ٢ س ص - ص^٢ = حـ$.

وهناك تعويض آخر يفيد في المعادلات التي من النوع

$$\frac{د ص}{د س} = ق (أ س + ب ص + حـ) ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٢٣)$$

حيث أ ، ب ، حـ أي ثوابت حقيقية . فاذا عوضنا ع = أ س + ب ص + حـ في المعادلة (٢ - ٢٣)، ينتج

$$\frac{عَ - أ}{ب} = ق (ع) ،$$

لأن عَ = أ + ب صَ .

والمتغيران في هذه المعادلة قابلان للفصل .

المثال ٢ ـ ٢ ـ ٢ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (\text{س} + \text{ص} + ١)^{٢} - ٢$. نضع ع = س + ص + ١ ، فيكون عَ = ١ + صَ ، أي أن عَ − ١ = $\text{ع}^{٢}$ − ٢ فيكون عَ = $\text{ع}^{٢}$ − ١ ، وهذا يمكن ان يكتب بالصيغة :

$$\text{د س} = \frac{\text{د ع}}{\text{ع}^{٢} - ١} = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{\text{ع} - ١} - \frac{١}{\text{ع} + ١}\right)\text{د ع} .$$

نكامل فنجد أن لي [(ع − ١)/(ع + ١)] = ٢ س + حـ، فيكون (ع − ١)/(ع + ١) = حـ $e^{٢\text{س}}$ ومن هذا ينتج بعد التعديل الجبري :

$$\text{س} + \text{ص} + ١ = \text{ع} = \frac{١ + \text{حـ}\, e^{٢\text{س}}}{١ - \text{حـ}\, e^{٢\text{س}}} .$$

وهناك تعويض ثالث يغير في المعادلات التي من النوع :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق}\left(\frac{\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{حـ}}{\propto \text{س} + \beta\, \text{ص} + \gamma}\right) ، \text{أ}\, \beta \neq \propto \text{ب} . \quad ...... \quad (٢ ـ ٢٤)$$

ويلاحظ انه اذا كان حـ ، γ صفراً كان بالامكان ان نكتب الطرف الأيسر من (٢ ـ ٢٤) بالشكل

$$\text{ق}\left(\frac{\text{أ س} + \text{ب ص}}{\propto \text{س} + \beta\, \text{ص}}\right) = \text{ق}\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}\,(\text{ص}/\text{س})}{\propto + \beta\,(\text{ص}/\text{س})}\right) = \text{ك}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right) ،$$

وهـذا دالـة للمتغـير ص/س ، ولـذا يمكن ان تحل المعـادلـة بالطـريقة التي بها حللنا المعادلة (٢ ـ ٢١) . فلنضع س = ك + هـ ، ص = ل + و، ولنختر هـ ، وبحيث يكون الطرف الأيسر في (٢ ـ ٢٤) مساويا

$$ق\left(\frac{أ ك + ب ل}{\alpha ك + \beta ل}\right).$$

وهذا الاختيار ممكن دائماً، وهناك اختيار وحيد يفي بالمطلوب، وذلك بحل المعادلتين الآنيتين:

$$أ هـ + ب و = - حـ$$

$$\alpha هـ + \beta و = - \gamma ،$$

لايجاد هـ ، و ، لأن محددة أ $\beta - \alpha$ ب $\neq$ ٠ (انظر الملحق ٤). والآن

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د (ل + و)}{د ك} ، \frac{د ك}{د س} = \frac{د ل}{د ك} ،$$

فتعبر المعادلة (٢ ـ ٢٤):

$$\frac{د ل}{د ك} = ق\left(\frac{أ ك + ب ل}{\alpha ك + \beta ل}\right) = ق\left(\frac{أ + ب (ل/ك)}{\alpha + \beta (ل/ك)}\right)$$

وهذه معادلة تنطبق عليها الطريقة الأولى

المثال ٢ ـ ٢ ـ ٣

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{س - ص - ٥}{س + ص - ١}$$ ، نحل المعادلتين هـ - و = ٥، هـ + و = ١ ،

فيكون هـ = ٣ ، و = - ٢ فيكون التعويض: س = ك + ٣ ، ص = ل - ٢ ، ويكون

$$\frac{د ل}{د ك} = \frac{ك - ل}{ك + و}.$$

وقد رأينا من المثال ٢ - ٢ - ١ ان حل هذه المعادلة هوك^{٢} - ٢ ك ل - ل^{٢} = حـ. فحل المعادلة الأصلية هو

$$(س - ٣)^{٢} - ٢ (س - ٣) (ص + ٢) - (ص + ٢)^{٢} = حـ.$$

في المعادلة (٢ - ٢٤)، اذا كان أ β = $\propto$ ب، نضع ع = أ س + ب ص، فيكون أ $\frac{\beta}{ب} = \propto$ ،

$$\frac{\beta}{ب} ع = \frac{أ\beta}{ب} س + \beta ص = \propto س + \beta ص.$$

فنعوض عن أ س + ب ص ، $\propto$ س + β ص في (٢ - ٢٤) بالعبارتين ع ، $\frac{\beta}{ب}$ ع على الترتيب، فيصير

$$\frac{د ع}{د س} = ب ق \left(\frac{ع + حـ}{(\beta / ب) ع + \gamma}\right) + أ ،$$

لأن عَ = أ + ب صَ. ومتغيرا هذه المعادلة يمكن فصلهما

المثال ٢ - ٢ - ٤ $\frac{د ص}{د س} = \frac{س + ص + ١}{٢ س + ٢ ص - ١}$ نأخذ ع = س + ص، فيكون عَ = ١ + صَ

ثم بعد المعالجة الجبرية ينتج:

$$\frac{د ع}{د س} = \frac{٣ ع}{٢ ع - ١}.$$

فبعد فصل المتغيرين ينتج ٢ ع - لي ع = ٣ س + حـ، أي أن س + ص = حـ سا (٢ ص - س).

والجدول التالي يجمل نتائج هذا البند:

شكل المعادلة	التعويض	المعادلة الجديدة
$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$	$\text{ع} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$	$\frac{\text{د ع}}{\text{ق (ع)} - \text{ع}} = \frac{\text{د س}}{\text{س}}$
$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق (أ س + ب ص + حـ)}$	$\text{ع = أ س + ب ص + حـ}$	$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \text{ب ق (ع) + أ}$
$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق}\left(\frac{\text{أ س + ب ص + حـ}}{\propto \text{س} + \beta\ \text{ص} + \gamma}\right)$		
$\text{أ}\,\beta = \text{ب} \propto$	ع = أ س + ب ص	$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \text{ب ق}\left(\frac{\text{ع + حـ}}{(\beta/\text{ب})\,\text{ع} + \gamma}\right) + \text{أ}$
$\text{أ}\,\beta \neq \text{ب} \propto$	س = ك + هـ* ص = ل + و	$\frac{\text{د ل}}{\text{د ك}} = \text{ق}\left(\frac{\text{أ + ب (ل/ك)}}{\propto + \beta\ \text{(ل/ك)}}\right)$

* نختار هـ ، و بحيث ان أ هـ + ب و = − حـ ، $\propto$ هـ + β و = − γ

التمارين ٢ ـ ٢

في التمارين ١ الى ١٢ أوجد الحل العام لكل معادلة اذا أمكن، وإلا فأوجد علاقة يعرِّف بها الحل ضمنياً. فاذا أعطي شرط إبتدائي فأوجد الحل الخاص الذي يحققه.

١ . $\text{س د ص} - \text{ص د س} = \sqrt{\text{س ص}}\ \text{د س}$

٢ . $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{س}}{\text{ن}} + \text{جته}\ \frac{\text{س}}{\text{ن}}$

٣ . $(\text{س}\ e^{\text{ص}/\text{س}} + \text{ص})\ \text{د س} = \text{س د ص}$ ، $\text{ص}\,(١) = ٠$

٤ . $(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})\ \text{د س} = ٢\ \text{س ص د ص}$ ، $\text{ص}\,(-١) = ٠$

٥ . $\text{ن}\ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{س} = ٢\sqrt{\text{س ن}}$

٦ . $(\text{س} + \text{ع})\ \text{د س} = \text{س د ع}$

٧ . $(\text{ص}^{٢} - ٢\ \text{س ص})\ \text{د س} + (٢\ \text{س ص} - \text{س}^{٢})\ \text{د ص} = ٠$ ، $\text{ص}\,(١) = ٢$

٨ . $(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})\ \text{د س} + ٣\ \text{س ص د ص} = ٠$

٩ . $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}\ \text{د س} = \text{س د ص} - \text{ص د س}$

١٠ ـ $(\text{س}^{٢}\ \text{ص} + ٢\ \text{س ص}^{٢} - \text{ص}^{٣})\ \text{د س} - (٢\ \text{ص}^{٣} - \text{س ص}^{٢} + \text{س}^{٣})\ \text{د ص} = ٠$

١١ . $ص' = \frac{ص^{٢} + س ص}{س^{٢}}$ ، ص (١) = ١

١٢ . $سَ = \frac{س - ن جتا^{٢} (س/ن)}{ن}$ ، س (١) = π / ٤

١٣ . حل المعادلات التالية :

أ) $٢ \frac{د ص}{د س} = س^{٢} + ٤ س ص + ٤ ص^{٢} + ٣$

ب) $(س + ص - ١)^{٢}$ د س + ٩ د ص = ٠

حـ) (س + ص) د ص = (٢ س + ٢ ص - ٣) د س

١٤ . استعمل نتائج هذا البند في حل ما يلي :

أ) (س + ٢ ص + ٢) د س + (٢ س - ص) د س = ٠

ب) (س - ص + ١) د س + (س + ص) د ص = ٠

حـ) (س + ص + ٤) د س = (٢ س + ٢ ص - ١) د ص، ص (٠) = ٠

١٥ . حل المعادلة

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ - س ص^{٢}}{٢ س^{٢} ص}$$

بتعويض ع = ص / $س^{ن}$ واختيار قيمة مناسبة للرمز ن .

١٦ . استعمل طريقة التمرين ١٥ في حل :

$$\frac{د س}{د ن} = \frac{س - ن س^٢}{ن + س ن^٢}.$$

٢ ـ ٣ المعادلات الخطية

تعد المعادلة ذات الرتبة ن خطية اذا أمكن ان تكتب بالصيغة:

$$\frac{د^ن ص}{د س^ن} + أ_{ن - ١} (س) \frac{د^{ن - ١} ص}{د س^{ن - ١}} + \ldots + أ_١ (س) \frac{د ص}{د س} + أ_٠ (س) ص$$

= ق (س).

فمعادلة الرتبة الأولى الخطية صيغتها

$$\frac{د ص}{د س} + أ (س) ص = ق (س) ،$$

ومعادلة الرتبة الثانية الخطية صيغتها

$$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} + أ (س) \frac{د ص}{د س} + ب (س) ص = ق (س).$$

وفي هذا كله تشير أ (س) ، ب (س) ، ق (س) الى اقترانات في س فقط.

وقبل البدء بمعالجة معادلة الرتبة الأولى الخطية العامة:

$$\frac{د ص}{د س} + أ (س) ص = ق (س)، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ ـ ٢٥)$$

نوضح بعض الحالات الخاصة اذا كان ق (س) ≡ ٠ ، وكان أ (س) ≡ أ (عدداً ثابتاً)، تصبح المعادلة (٢ ـ ٢٥):

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{أ ص} = ٠ \quad \text{.......................} \quad (٢ - ٢٦)$$

فبفصل المتغيرين ينتج $\frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = - \text{أ د س}$. وبالتكامل ينتج: لي ص = - أ س + حـ

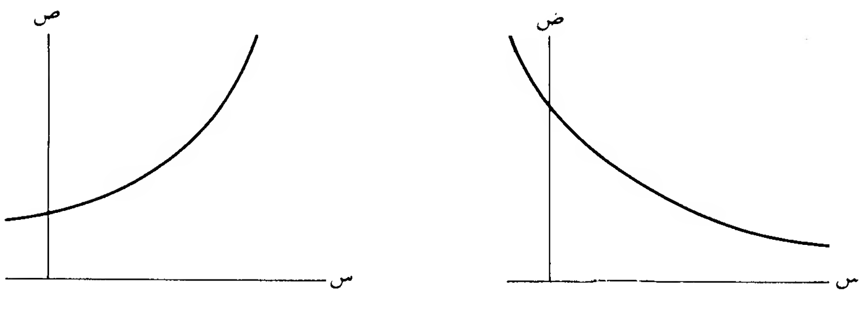
اي ان

$$\text{ص} = \text{حـ}\, e^{-\text{أ س}} \quad \text{.......................} \quad (٢ - ٢٧)$$

فاذا كانت أ موجبة كانت المعادلة (٢ ـ ٢٧) معادلة **التلاشي الأسي** exponential decay

واذا كانت أ سالبة فالمعادلة (٢ ـ ٢٧) هي معادلة **التزايد الأسي** exponential growth

كما تبين من المثالين ١ ـ ١ ـ ٢ و ١ ـ ١ ـ ٣ وكما يبينه الشكل ٢ ـ ٢ (أ) ، (ب).



(أ) تكاثر أسي

(ب) تلاشي أسي

الشكل ٢ : ٢

المثـال ٢ ـ ٣ ـ ١ بيئـة تتـزايـد عدداً بمعـدل ١٠٪ في وحدة الزمن . وقد كان عددها في البدء ١٠٠٠ . فاذا كان عددها ع (ن) في اللحظة ن ، فمعادلة تزايدها هي

$$\frac{د ع}{د ن} = ٠,١ ع \text{ أي } \frac{د ع}{د ن} - ٠,١ ع = ٠ .$$

وهذه هي المعادلة (٢ ـ ٦٢)، وفيها أ = - ٠,١ ، وحلها العام ع (ن) = حـ $e^{٠,١ ن}$.
نضع ن = ٠ فينتج ع (٠) = ١٠٠٠ = حـ. فحل المسألة اذن هوع (ن) = ١٠٠٠ $e^{٠,١ ن}$
فمثلا اذا كانت وحـدة الـزمن الأسبوع ، فالعدد بعد ١٠ اسابيع هوع (١٠) =
١٠٠٠ e ≈ ٢٧١٨ .

لنبحث الآن في مسألة أعم هي

$$\frac{د ص}{د س} + أ ص = ق (س) . \qquad \text{(٢ ـ ٢٨)}$$

يستحيل هنا فصل المتغيرين . ولكن هناك طريقة سهلة لحل (٢ ـ ٢٨)، وذلك بضرب طرفي المعادلة بعامل تكامل integrating factor .
فـلأن

$$\frac{د}{د س}(e^{أ س} ص) = e^{أ س}\left(\frac{د ص}{د س} + أ ص\right) ،$$

يمكن ضرب طرفي (٢ ـ ٢٨) في $e^{أ س}$ فينتج :

$$\frac{د}{د س}(e^{أ س} ص) = e^{أ س}\left(\frac{د ص}{د س} + أ ص\right) = e^{أ س} ق (س)$$

(٢ ـ ٢٩)

نكامل الطرفين من (٢ ـ ٢٩) فينتج

$$e^{أس} ص = \int e^{أس} ق(س) د س + حـ \quad \text{.............} \quad (٢ ـ ٣٠)$$

أي أن

$$ص = e^{-أس} [\int ق(س) e^{أس} د س + حـ]. \quad \text{............} \quad (٢ ـ ٣١)$$

المثال ٢ ـ ٣ ـ ٢ خذ المعادلة د ص/د س + ٢ ص = س. عامل التكامل هنا هو $e^{٢س}$

فحسب المعادلة (٢ ـ ٣٠) نجد:

$$e^{٢س} ص = \int س e^{٢س} ق(س) د س + حـ. \quad \text{..........} \quad (٢ ـ ٣٢)$$

نكامل الطرف الأيسر من (٢ ـ ٣٢) بالأجزاء فينتج:

$$e^{٢س} ص = \frac{س e^{٢س}}{٢} - \frac{١}{٢} \int e^{٢س} د س + حـ،$$

$$\text{فيكون } ص = e^{-٢س} [\frac{١}{٢} س e^{٢س} - \frac{١}{٤} e^{٢س} + حـ]$$

أي أن

$$ص = \frac{١}{٢} س - \frac{١}{٤} + حـ e^{-٢س}.$$

نعود الآن الى المعادلة (٢ ـ ٢٥)، ذات الرتبة الأولى، الخطية، العامة. فلأن التفاضل والتكامل عمليتان متعاكستان، يكون

$$\frac{د}{د س} \int أ(س) د س = أ(س).$$

ولأن

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(e^{\text{ل (س)}}\,\text{ص}\right) = e^{\text{ل (س)}}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{ص}\,\frac{\text{د ل}}{\text{د س}}\right).$$

فإن

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(e^{\int \text{أ (س) د س}}\,\text{ص}\right) = e^{\int \text{أ (س) د س}}\left[\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{أ (س) ص}\right]$$

يتضح ان $e^{\int \text{أ (س) د س}}$ عامل تكامل مناسب للمعادلة (٢ ـ ٢٥). نضرب طرفي (٢ ـ ٢٥) بهذا العامل، فنجد ان :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(e^{\int \text{أ (س) د س}}\,\text{ص}\right) = e^{\int \text{أ (س) د س}}\left[\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{أ (س) ص}\right]$$

$$= e^{\int \text{أ (س) د س}}\,\text{ق (س)}،$$

فنكامل الطرفين، وينتج

$$e^{\int \text{أ (س) د س}}\,\text{ص} = \int \text{ق (س)}\, e^{\int \text{أ (س) د س}}\,\text{د س} + \text{حـ}، \quad . \quad (٢ - ٣٣)$$

وهذه يمكن ان تكتب بالصورة الموجزة التاليه :

$$\text{ص} = e^{-\int \text{أ د س}}\left[\int \text{ق}\, e^{\int \text{أ د س}}\,\text{د س} + \text{حـ}\right]. \quad .. \quad (٢ - ٣٤)$$

والمعادلة (٢ ـ ٣٤) تؤيد ما ذكرناه في مطلع هذا الفصل، من أن مقدرتنا على حل معادلة الرتبة الأولى، (٢ ـ ٢٥) تعتمد كلياً على مقدرتنا على إجراء التكاملات في (٢ ـ ٣٤).

المثال ٢ ـ ٣ ـ ٣ حل

$$\frac{د ص}{د س} + \frac{٢}{س} ص = ٥ س^{٢} . \quad (٢ ـ ٣٥)$$

نلاحظ ان المعادلة (٢ ـ ٣٥) تشابه شكل المعادلة (٢ ـ ٢٥)، لكن أ (س) = $\frac{٢}{س}$،
فيكون

$$\int أ (س) د س = ٢ \int \frac{د س}{س} = ٢ لي س = لي س^{٢} .$$

فبضرب طرفي المعادلة في سا (لي س^٢) = س^٢ والتكامل حسب (٢ ـ ٣٣)، ينتج

$$س^{٢} ص = \int ٥ س^{٢} \cdot س^{٢} د س + حـ = س^{٥} + حـ .$$

فيكون ص = س^٣ + حـ س^{-٢} هو الحل العام للمعادلة (٢ ـ ٣٥) .

المثـال ٢ ـ ٣ ـ ٤ أنظـر في المعـادلـة د ص/د س = س^٣ − ٢ س ص، حيث ص = ١ عندما س = ١ . نكتب المعادلة بالشكل د ص/د س + ٢ س ص = س^٣ فيتبين ان أ(س) = ٢ س وان عامل التكامل هوسا [$\int$ أ (ن) د ن] = سا س^٢ . فنضرب الطرفين في سا (س^٢) ونكامل، فينتج :

$$e^{س^{٢}} ص = \int س^{٣} e^{س^{٢}} د س + حـ،$$

ويكون

$$ص = e^{-س^{٢}} [\int س^{٣} e^{س^{٢}} د س + حـ] .$$

ويمكن ايجاد التكامل بالأجزاء كما يلي :

$$\int س^3 e^{س^2} دس = \int س^2 (س e^{س^2}) دس = \frac{س^2 e^{س^2}}{2} - \int س e^{س^2} دس$$

$$= e^{س^2} (\frac{س^2 - 1}{2}).$$

فنعوض هذا بدل التكاملة فينتج :

$$ص = e^{-س^2} [e^{س^2} (\frac{س^2 - 1}{2}) + حـ] = \frac{1}{2}(س^2 - 1) + حـ e^{-س^2}$$

نعوض س = ١ فينتج

$$1 = ص(1) = حـ e^{-1}$$

أي أن حـ = e فيكون حل المسألة

$$ص = \frac{1}{2}(س^2 - 1) + e^{1 - س^2}.$$

المثال ٢ ـ ٣ ـ ٥ التغذية في الوريد بالجلوكوز: إن حقن الجلوكوز في مجرى الدم تقنية طبية هامة. فلدراسة هذه العملية لنجعل ج (ن) ترمز الى كمية الجلوكوز في مجرى الدم لمريض في اللحظة ن. ولنفرض ان الجلوكوز يحقن في مجرى الدم بسرعة ثابتة هي ك غرامات في الدقيقة. وفي الوقت ذاته يجري تحول الجلوكوز وخروجه من مجرى الدم بسرعة تتناسب مع كميته في الدم. فالاقتران ج (ن) يحقق العلاقة

$$\frac{د ج}{د ن} = ك - أ ج،$$

حيث أ ثابت موجب فلحل هذه المعادلة نكتبها د ج/د ن + أ ج = ك، ثم نضرب الطرفين بعامل التكامل $e^{أ ن}$. فالحل هو ج (ن) = حـ $e^{-أ ن}$ + ك/أ، وعند ن = ٠ يكون حـ = ج (٠) − ك/أ. فيكتب الحل اذن بالصيغة:

$$ج (ن) = \frac{ك}{أ} + [ج (٠) - \frac{ك}{أ}] e^{-أ ن}.$$

فعندما ن ⟵ ∞ ، فان تركيز الجلوكوز يقارب القيمة التي يستقر عليها وهي ك/أ.

التمارين ٢ ـ ٣

في التمارين ١ إلى ١١ أوجد الحل العام لكل معادلة. فاذا أعطيت شرطاً ابتدائياً، فأوجد الحل الخاص الذي يحققه.

١. $\frac{د س}{د ن} = ٣ س$

٢. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ٢٢ ص = ٠، ص (١) = ٢

٣. $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = س + ١، س (٠) = ١

٤. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ص = جاس، ص (٠) = ٠

٥. $\frac{\text{د س}}{\text{د ص}}$ − س لي ص = ص $^{\text{ص}}$

٦. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ص = ١/(١ + $e^{\text{٢س}}$)

٧. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ − $\frac{\text{٣ ص}}{\text{س}}$ = س^{٣}، ص (١) = ٤

٨. $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ + س ظتان = ٢ ن قتان

٩. سَ − ٢ س = ن^{٢} $e^{\text{٢ن}}$

١٠. صَ + $\frac{\text{٢ ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{جتاس}}{\text{س}^{٢}}$ ، ص (π) = ٠

١١ . $\frac{\text{د س}}{\text{د ي}} + \text{س} = \text{ي}\, e^{-\text{ي}} + ١$

١٢ . حل المعادلة

$$\text{ص} - \text{س}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\,\text{ص}^{٢}\, e^{\text{ص}}$$

بتبديل وظيفتي س ، ص (أي باعتبار س هو التابع).

١٣ . استعمل طريقة التمرين ١٢ في حل

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١/(e^{-\text{ص}} - \text{س}).$$

١٤ . أوجد حل المعادلة د ص/د س = ٢ (٢ س − ص) الذي يمر في النقطة (٠ ، − ١).

١٥ . لنفرض ان ح (ن) هو الفرق في درجة الحرارة في اللحظة ن بين جسم ما والوسط الذي يحيط به . فحسب قانون نيوتن في التبريد يكون د ح/د ن = − ك ح ، حيث ك > ٠ ، فاحسب بدلالة ك الوقت اللازم حتى ينخفض الفرق بين درجتي الحرارة :

أ) الى نصف قيمته الابتدائية ،

ب) الى ربع قيمته الابتدائية .

١٦ . في تفاعل كيماوي تنتج المادة الكيماوية ك بسرعة ر مولات في الدقيقة، وتستهلك في الوقت نفسه بسرعة حـ مولات في الدقيقة لكل مول من ك. وليكن ك (ن) هو عدد المولات المتوافرة من هذه المادة في اللحظة ن:

أ) أوجد معادلة تفاضلية تعبر عن قيمة ك (ن).

ب) أوجد ك (ن) بدلالة ك (٠).

جـ) أوجد كمية هذه المادة عندما تصل حالة الاستقرار.

١٧ . انتشر مرض سارٍ في مجتمع كثير السكان، فصارت نسبة المصابين به تتزايد مع الزمن. فاذا كانت ع (ن) هي نسبة المصابين بعد ن سنوات، وكان عَ (ن) = [١ - ع (ن)]/٣، ع (٠) = ٠، فبعد كم سنة تصبح نسبة المصابين ٩٠ في المئة ؟

٢ ـ ٤ معادلات خاصة لا خطية

يمكن ان تحول بعض المعادلات غير الخطية ذات الرتبة الأولى الى معادلات خطية بأجراء تغيير مناسب على المتغيرات: فالمعادلة من هذا النوع، وتسمى **بمعادلة برنولي**

$$\frac{د ص}{د س} + أ\,(س)\, ص = ق\,(س)\, ص^{ن} ، \qquad \text{(٢ ـ ٣٦)}$$

ضع ع = $ص^{١ - ن}$، فيكون عَ = (١ - ن) $ص^{- ن}$ صَ . فاذا ضربنا طرفي (٢ ـ ٣٦) في (١ - ن) $ص^{- ن}$، ينتج

$$(١ - ن)\, ص^{- ن}\, صَ + (١ - ن)\, أ\, ص^{١ - ن} = (١ - ن)\, ق$$

أي أن

$$\frac{د ع}{د س} + (١ - ن)\, أ(س)\, ع = (١ - ن)\, ق(س).$$

وهذه معادلة خطية يمكن أن تحل كما تقدم.

المثال ٢ ـ ٤ ـ ١ حل

$$\frac{د ص}{د س} - \frac{ص}{س} = - \frac{٥}{٢} س^{٢} ص^{٣}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ ـ ٣٧)$$

هنا: ن = ٣، فليكن $ع = ص^{-٢}$، $عَ = - ٢ ص^{-٣} صَ$، فنضرب المعادلة (٢ ـ ٣٧) في $- ٢ ص^{-٣}$ ينتج

$$عَ + \frac{٢}{س} ع = ٥ س^{٢}،$$

وقد رأينا من المثال ٢ ـ ٣ ـ ٣، ان لهذه المعادلة حلا هو

$$ص^{-٢} = ع = س^{٣} + حـ س^{-٢}.$$

فيكـون

$$ص = (س^{٣} + حـ س^{-٢})^{-١/٢}.$$

ونتبع مثل هذا الاجراء في المثال التالي:

المثال ٢ ـ ٤ ـ ٢ حل

$$\frac{د ص}{د س} + أ (س) ص = ق (س) ص لي ص . \quad .... \quad (٢ ـ ٣٨)$$

نجعل ع = لي ص . فيكون $عَ = \frac{صَ}{ص}$ ، فاذا قسمنا (٢ ـ ٣٨) على ص تنتج المعادلة الخطية

عَ + أ (س) = ق (س) ع .

والمعادلة

$$\frac{د ص}{د س} + ص^{٢} + أ (س) ص + ب (س) = ٠ \quad .... \quad (٢ ـ ٣٩)$$

لا خطية ، وتسمى معادلة ركاتي (Riccati) ، وهي ترد كثيراً في التطبيقات الفيزيائية ، ويمكن أن تحل بتعويض بسيط يحولها الى معادلة خطية : ليكن ص = عَ/ع ، فيكون عَ = ع ص ، عً = عَ ص + ع صَ . ولكن باستعمال التعويض الأصلي نجد أن

$$ص ع = \frac{(عَ)^{٢}}{ع} = ع \left(\frac{عَ}{ع}\right)^{٢} = ع ص^{٢} .$$

اذن عً = ع (صَ + ص^{٢}) .

يتضح الآن ان ضرب المعادلة (٢ ـ ٣٩) في ع قد ينتج نتائج شائقة .

عً + أ (س) عَ + ب (س) ع = ع صَ^٢ + أ ع ص + ب ع = ٠

فبهذا التعويض حولنا معادلة ركاتي الى معادلة خطية من الرتبة الثانية هي

عً + أ (س) عَ + ب (س) ع = ٠،

وهـذه سنحلهـا في الفصـل ٣ في الحالة الخاصة عندما يكون أ (س)، ب (س) ثابتين. (انظر التمرين ١٩ في البند ٣ ـ ٤.)

ومن معادلات المرتبة الأولى البالغة الأهمية معادلة كليروه (Clairaut) وهي

ص = س صَ + ق (صَ). .... (٢ ـ ٤٠)

نفاضل الطرفين بالنسبة الى س فينتج:

صَ = صَ + س صً + قَ (صَ) صً ،

وقد حصلنا على الحد الاخير بطريقة السلسلة. نحذف الحدود المتشابهة فيبقى:

[س + قَ (صَ)] صً = ٠ .... (٢ ـ ٤١)

ولأن احد العاملين يجب أن يكون صفراً، فهناك حالتان:

أ. اذا كان صً = ٠، يكون صَ = حـ، فنعوض هذا في المعادلة (٢ ـ ٤٠) وينتج الحل العام

ص = حـ س + ق (حـ) ، .... (٢ ـ ٤٢)

وهذا مجموعة خطوط مستقيمة

أأ. واذا كان س + قَ (صَ) = ٠، يكـون س = − قَ (صَ)، وعنـدهـا يمكن أن نكتب المعادلة (٢ ـ ٤٠) بالصيغة:

ص = ق (صَ) − صَ قَ (صَ). .... (٢ ـ ٤٣)

هنـا نجـد ان كلا من س ، ص قد عبرٍ عنـه بدلالـة صَ. فلنجعل صَ = ن، وبـذا نحصل على المعادلتين الوسيطيتين:

س = − قَ (ن) ، ص = ق (ن) − ن قَ (ن) .... (٢ ـ ٤٤)

ويجب ان نتحقق من ان نقاط هذا المنحنى تحقق المعادلة (٢ ـ ٤٠). فلأن

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص / د ن}{د س / د ن} = \frac{قَ (ن) - قَ (ن) - ن قً (ن)}{- قً (ن)} = ن ،$$

فإن ميل المنحنى عند أي نقطة يساوي الوسيط ن، شريطة أن يكون قً (ن) ≠ ٠ نعـوض ن بدل صَ ، − قَ (ن) بدل س في (٢ ـ ٤٤) فتنتـج المعـادلـة (٢ ـ ٤٤)، شريطـة أن قً (ن) ≠ ٠ . والمعـادلـة (٢ ـ ٤٤) ليست حالـة خاصة من الحل العام (٢ ـ ٤٢)، لأن صَ في الحل العام ثابت، في حين انه في (٢ ـ ٤٤) يعتمد على الوسيط ن. والحل الخاص (٢ ـ ٤٤) يسمى حلا منفرداً (singular) للمعادلة (٢ ـ ٤٠).

المثال ٢ ـ ٤ ـ ٣ حل

ص = س صَ + (صَ)^{٣} .... (٢ ـ ٤٥)

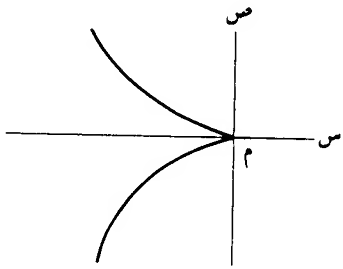
حسب (٢ ـ ٤٢): إن الحل العام هوص = حـ س + ق (س) = حـ س + س^{٣}. ولأن ق (ن) = ن^{٣} فالمعادلات الوسيطية للحل المنفرد هي:

س = − ٣ ن^{٢}، ص = ن^{٣} − ن (٣ ن^{٢}) = − ٢ ن^{٣}، ن ≠ ٠ ... (٢ ـ ٤٦)

[عند ن = ٠ يكون قً (٠) = ٠ .] نحذف الوسيط ن فينتج

٤ $س^٣$ = − ١٠٨ $ن^٦$ = − ٢٧ $ص^٢$ ، .... (٢ ـ ٤٧)

فاذن ٤ $س^٣$ = − ٢٧ $ص^٢$ حل منفرد للمعادلة (٢ ـ ٤٥)، الا عند النقطة (٠ ، ٠) حيث لا وجود للمشتقة صَ. (أنظر الشكل ٢ ـ ٣.) لاحظ ان الحل العام لا يشمل هذا الحل المنفرد.



الشكل ٢ ـ ٣

المثال ٢ ـ ٤ ـ ٤ خذ المعادلة:

س صَ − $e^{صَ}$ − ص = ٠ ،

نكتبها بالصيغة:

ص = س صَ − $e^{صَ}$ . ... (٢ ـ ٤٨)

فالحل العام هو ص = حـ س − $e^{حـ}$، والحل المنفرد

س = $e^{ن}$ ، ص = $e^{ن}$ (ن − ١).

فيكون ن = لي س، وهذا معرف شريطة ان يكون س > ٠ ، فالحل المنفرد إذن:

$ص = س (لي س - ١) ، س > ٠$

التمارين ٢ ـ ٤

١ . حول المعادلات اللاخطية التالية الى معـادلات خطية من الرتبة الثانية

أ) $صَ + ص^{٢} - ١ = ٠$

ب) $\frac{د س}{د ن} + س^{٢} + ١ = ٠$

حـ) $صَ + ص^{٢} + ص - ١ = ٠$

٢ . في المعـادلـة اللاخطيـة $صَ + أ ص^{٢} + ب ص + حـ = ٠$ ، أ ، ب ، حـ ثوابت اعتباطية . حول هذه المعادلة الى معادلة خطية من الرتبة الثانية .

في التمارين ٣ الى ١١ أوجد الحل العام لكل معادلة وأوجد حلا خاصاً كلما أعطيت شرطاً ابتدائياً .

٣ . $\frac{د ص}{د س} = - \frac{(٦ ص^{٢} - س - ١) ص}{٢ س}$

٤ . $سَ = ١ + ٦ ن e^{ن - س}$

٥ . $صَ = - ص^{٣} س e^{-٢س} + ص$

٦ . $\frac{د ص}{د س} = \frac{جا^{٢} س + جتا^{٢} ص}{٢ ظاس جاص جتاص}$ ، $ص (\frac{\pi}{٢}) = ٠$

٧. $(٢\,\text{ص}^{٣} - \text{س}^{٣})\,\text{د س} + ٣\,\text{س ص}^{٢}\,\text{د ص} = ٠$ ، $\text{ص}(١) = ١$

٨. $\text{س}\,\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{ص} = \text{س}^{٤}\,\text{ص}^{٣}$ ، $\text{ص}(١) = ١$

٩. $\text{ن س}^{٢}\,\dfrac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{س}^{٣} = \text{ن جتا ن}$

١٠. $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \dfrac{٣}{\text{س}}\,\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢}$ ، $\text{ص}(١) = ٢$

١١. $\text{س ص صَ} - \text{ص}^{٢} + \text{س}^{٢} = ٠$

في التمارين ١٢ الى ١٨ أوجد الحل العام والحل المنفرد لكل معادلة :

١٢. $\text{ص} = \text{س}\,\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \dfrac{١}{٤}\left(\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٤}$

١٣. $\text{ص} = \text{س}\,\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \dfrac{١}{٢}\left(\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} - ٤\right)^{٢}$

١٤. $\text{ص} = \text{س}\,\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} - e^{\text{دص/دس}}$

١٥. $\text{ص} = \text{س}\,\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \left(\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{-١}$

١٦. $(\text{ص} - \text{س صَ})^{٢} - (\text{صَ})^{٢} = ١$

١٧ . ص = س صَ - $\sqrt{\text{صَ}}$

١٨ . ص = س صَ + لي صَ

٢ ـ ٥ المعادلات المحكمة Exact Equations

سنستعمل الآن المشتقات الجزئية لحل معادلات تفاضلية عادية.

لنفرض اننا اخذنا التفاضلة الكلية للمعادلة ج (س ، ص) = ث ، فينتج:

$$د ج = \frac{\partial ج}{\partial س} د س + \frac{\partial ج}{\partial ص} د ص = ٠ \quad \text{.............. (٢ ـ ٥٠)}$$

فمثلا المعادلة س ص = ث تعطي التفاضلة الكلية ص د س + س د ص = ٠، وهذه معادلة تفاضلية تكتب على النحو صَ = - ص/س. والآن نعكس هذه الخطوات، فنبدأ من المعادلة التفاضلية

$$م (س ، ص) د س + ن (س ، ص) د ص = ٠ \quad \text{.......... (٢ ـ ٥١)}$$

فهل نستطيع ان نجد اقتراناً ج (س ، ص) بحيث يكون:

$$\frac{\partial ج}{\partial س} = م ، \quad \frac{\partial ج}{\partial ص} = ن ؟$$

اذا تم ذلك لتصبح (٢ ـ ٥١): د ج = ٠، ويكون ج (س ، ص) = ث هو الحل العام للمعادلة (٢ ـ ٥١). وفي هذه الحالة نقول ان م د س + ن د ص هي **تفاضلة محكمة**

وان (٢ ـ ٥١) هي معادلة تفاضلية محكمة .

وكيف نعرف اذا كانت المعادلة التفاضلية محكمة ؟ نذكر من دراستنا لأساسيات الحسبان ان

$$\frac{\partial^{2} \text{ج}}{\partial \text{ص}\, \partial \text{س}} = \frac{\partial^{2} \text{ج}}{\partial \text{س}\, \partial \text{ص}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٥٢)$$

اذا وجد الطرفان وكانا متصلين فبدلالة الاقترانين م ، ن تصبح المعادلة (٢ ـ ٥٢) كما يلي :

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{س}} \text{ ،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٥٣)$$

فالشرط (٢ ـ ٥٣) هو الشرط اللازم لأن تكون (٢ ـ ٥١) محكمة . وسنرى ان (٢ ـ ٥٣) هو ايضاً كافٍ وذلك بأن نبين كيف نحصل على الاقتران ج الذي يحقق (٢ ـ ٥١) . والطريقة ذات خطوتين :

اولا : أوجد تكامل الاقتران م = ∂ ج/ ∂ س بالنسبة الى س :

$$\int \text{م د س} = \int \frac{\partial \text{ج}}{\partial \text{س}} \text{ د س} = \text{ج} + \text{هـ (ص)} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٥٤)$$

و «ثابت التكامل» هـ (ص) في (٢ ـ ٥٤) هو اقتران في ص لا على التعيين نفرضه لأننا نريد أن نضع أعم حد يتلاشى عند مفاضلته بالنسبة الى س . والمسألة الآن هي ان نكتشف ماذا يكون هذا الحد الذي سميناه هـ (ص) .

ثانياً : نأخذ التفاضلة الجزئية للمعادلة (٢ ـ ٥٤) بالنسبة الى ص :

$$\frac{\partial}{\partial \text{ص}} \int \text{م}\, \text{د}\text{س} = \frac{\partial \text{ج}}{\partial \text{ص}} + \text{هَـ}[\text{ص}] = \text{ن} + \text{هَـ}(\text{ص}) .$$

فيكون

$$\text{هَـ}(\text{ص}) = \frac{\partial}{\partial \text{ص}} \int \text{م}\, \text{د}\text{س} - \text{ن} .$$

فنفاضل داخل التكامل جزئياً ونعوض عن ∂ م/ ∂ ص بما يساويه ∂ ن/ ∂ س فينتج:

$$\text{هَـ}(\text{ص}) = \int \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}} \text{د}\text{س} - \text{ن} = \int \frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{س}} \text{د}\text{س} - \text{ن} . \qquad \ldots\ldots \qquad (٢ ـ ٥٥)$$

فالطرف الأيمن من المعادلة (٢ ـ ٥٥) اقتران في ص فقط، لأن مشتقته الجزئية بالنسبة الى س صفر. فنكامل طرفي (٢ ـ ٥٥) فينتج:

$$\text{هـ}(\text{ص}) = \int \left(\int \frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{س}} \text{د}\text{س} - \text{ن} \right) \text{د}\text{ص} + \text{ث} ،$$

فاذا عوضنا هذا في (٢ ـ ٥٤) نحصل على الحل العام للمعادلة (٢ ـ ٥١).

المثال ٢ ـ ٥ ـ ١ (١ − جاس ظاص) د س + (جتاس قا^{٢}ص) د ص = ٠ . هنا

م (س ، ص) = ١ − جاس ظاص ، ن (س ، ص) = جتاس قا^{٢}ص

فيكون

$$\frac{\partial م}{\partial ص} = - \text{جاس قا}^2\text{ص} = \frac{\partial ن}{\partial س} ،$$

فالمعادلة محكمة . فلأيجاد الحل نلاحظ ان **(٢ ـ ٥٤)** تقتضي ان يكون :

$$ج (س ، ص) = \int م\ د س - هـ (ص) = س + \text{جاس ظاص} - هـ (ص) .$$

فنجد المشتقة الجزئية بالنسبة الى ص، في الطرفين فينتج :

$$\text{جاس قا}^2\text{ص} = ن = \frac{\partial ج}{\partial ص} = \text{جاس قا}^2\text{ص} - هَـ (ص) .$$

فيكون هَـ (ص) = ٠ ، اي ان هـ (ص) ثابت والحل العام هو:

$$ج (س ، ص) = س + \text{جاس ظاص} + ث = ٠ .$$

وينبغي ان نلاحـظ ان المعـادلات المحكمـة نادرة جداً لأن الشـرط **(٢ ـ ٥٣)** يقتضي توازناً محكماً بين الاقترانين م ، ن. فمثلا

$$(٣س + ٢ص)\ د س + س\ د ص = ٠$$

ليست محكمة ولكن اذا ضربنا المعادلة في س، تصبح المعادلة الجديدة

$$(٣ س^2 + ٢ س ص)\ د س + س^2\ د ص = ٠$$

وهذه محكمة .

فالسؤال الآن هو: اذا كانت

$$م (س ، ص)\ د س + ن (س ، ص)\ د ص = ٠ \quad .... \quad \textbf{(٢ ـ ٥٦)}$$

غير محكمة فتحت اي الشروط يكون هنالك **عامل تكامل** μ (س ، ص) بحيث تكون

μ م (س ، ص) د س + μ ن (س ، ص) د ص = ٠ محكمة ؟ الجواب : يتم ذلك كلما كانت (٢ ـ ٥٦) لها حل عام : ج (س ، ص) = ث . ولكي نرى ذلك نجد د ص/د س في المعادلة (٢ ـ ٥٦)

$$\frac{د ص}{د س} = - \frac{م}{ن} = - \frac{\partial ج / \partial س}{\partial ج / \partial ص} ،$$

فمن ذلك ينتج ان

$$\frac{\partial ج / \partial س}{م} = \frac{\partial ج / \partial ص}{ن} .$$

فاجعل أياً من طرفي هذه المعادلة μ (س ، ص) فيكون

$$\frac{\partial ج}{\partial س} = \mu م ، \frac{\partial ج}{\partial ص} = \mu ن ، \qquad \text{(٢ ـ ٥٧)}$$

وللمعادلة (٢ ـ ٥٦) عامل تكامل واحد على الأقل هو μ . ولكن الحصول على عوامل التكامل هو على الغالب صعب جداً . ولذلك طريقة تنجح احياناً . فبما ان (٢ ـ ٥٧) تدل على ان μ م د س + μ ن د ص = ٠ محكمة فمن (٢ ـ ٥٣) ينتج ان

$$\mu \frac{\partial م}{\partial ص} + م \frac{\partial \mu}{\partial ص} = \frac{\partial}{\partial ص} (\mu م) = \frac{\partial}{\partial س} (\mu ن) = \mu \frac{\partial ن}{\partial س} +$$

$$ن \frac{\partial \mu}{\partial س} ،$$

فيكون

$$\frac{1}{\mu}\left(ن \frac{\partial \mu}{\partial س} - م \frac{\partial \mu}{\partial ص}\right) = \frac{\partial م}{\partial ص} - \frac{\partial ن}{\partial س} \qquad \ldots\ldots (٢ - ٥٨)$$

فاذا كان عامل التكامل μ يعتمد على س فقط تصبح المعادلة (٢ ـ ٥٨)

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial س} = \frac{\partial م / \partial ص - \partial ن / \partial س}{ن} = ك \qquad \ldots\ldots (٢ - ٥٩)$$

ولأن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يتكون من اقترانات في س فقط فان ك تكون بدلالة س فقط. فاذا كان هذا صحيحاً امكن ايجاد μ بفصل المتغيرين في μ (س) = سا [$\int$ ك (س) د س]. ومثل هذا يستنتج اذا كان μ اقتراناً في ص فقط فعندها يكون

$$ك = \frac{\partial م / \partial ص - \partial ن / \partial س}{-م}$$

هو ايضاً اقتران في ص. وهنا يكون μ (ص) = سا [$\int$ ك (ص) د ص] هو عامل إلتكامل.

المثال ٢ ـ ٥ ـ ٢ (٣ س^{2} − ص^{2}) د ص − ٢ س ص د س = ٠. في هذا المثال: م = − ٢ س ص، ن = ٣ س^{2} − ص^{2} فيكون

$$\frac{\partial م}{\partial ص} = -٢س ، \frac{\partial ن}{\partial س} = ٦ س .$$

فاذن

$$\text{ك} = \frac{\partial \text{م} / \partial \text{ص} - \partial \text{ن} / \partial \text{س}}{- \text{م}} = - \frac{٤}{\text{ص}} ،$$

فيكون

$$\mu = \text{سا} \left[\int - \frac{٤}{\text{ص}} \text{د ص} \right] = \text{سا} \left(- ٤ \text{ لو ص} \right) = \text{ص}^{-٤} .$$

فيصير لدينا

$$\left(\frac{٣\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٤}} \right) \text{د ص} - \frac{٢ \text{ س}}{\text{ص}^{٣}} \text{د س} = ٠ ،$$

وهذه محكمة . فالحل العام هو:

$$\text{ج} = \int \text{م د س} + \text{هـ (ص)} = - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٣}} + \text{هـ (ص)} ؛$$

فنفاضل هذه المعادلة بالنسبة الى ص فينتج:

$$\frac{٣ \text{ س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٤}} = \text{ن} = \frac{٣ \text{ س}^{٢}}{\text{ص}^{٤}} + \text{هَـ (ص)} .$$

فيكون هَـ (ص) = $- \text{ص}^{-٢}$ ، فيكون هـ (ص) = $\text{ص}^{-١} + \text{ث}$ ، فينتج ان

$$\text{ج (س ، ص)} = \frac{- \text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٣}} + \frac{١}{\text{ص}} + \text{حـ} = ٠ ،$$

اي ان

حـ ص^{٣} + ص^{٢} − س^{٢} = ٠

التمارين ٢ ـ ٥

في التمارين من ١ الى ١١ بين ان كل معادلة تفاضلية محكمة واوجد حلها العام، ثم أوجد الحل الخاص حيثما تعطى قيمة ابتدائية.

١. ٢ س ص د س + (س^{٢} + ١) د ص = ٠

٢. [س جتا (س + ص) + جا (س + ص)] د س + س جتا (س + ص) د ص = ٠، ص (١) = π /٢ − ١

٣. (٤ س^{٣} ص^{٣} + $\frac{١}{س}$) د س + (٣ س^{٤} ص^{٢} − $\frac{١}{ص}$) د ص = ٠ ، س (e) = ١

٤. [$\frac{لي (لي ص)}{س}$ + $\frac{٢}{٣}$ س ص^{٣}] د س + [$\frac{لي س}{ص لي ص}$ + س^{٢} ص^{٢}] د ص = ٠

٥. (س − ص جتا س) د س − جا س د ص = ٠ ، ص (π /٢) = ١

٦. (جته ٢ س جته ٢ ص) د س + (جه ٢ س جه ٢ ص) د ص = ٠

٧. (ص e$^{س ص}$ + ٤ ص^{٣}) د س + (س e$^{س ص}$ + ١٢ س ص^{٢} − ٢ ص) د ص = ٠ ، ص (٠) = ٢

٨. (٣ س^{٢} لي س + س^{٢} − ص) د س − س د ص = ٠ ، ص (١) = ٥

٩. $(٢ س + e^{ص}) د س + (س^{٢} + س e^{ص}) د ص = ٠$

١٠. $(س^{٢} + ص^{٢}) د س + ٢ س ص د ص = ٠$ ، $ص(١) = ١$

١١. $$\left(\frac{١}{س} - \frac{ص}{س^{٢} + ص^{٢}}\right) د س + \left(\frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} - \frac{١}{ص}\right) د ص = ٠$$

في التمارين من ١٢ الى ١٦ أوجد عامل التكامل لكل معادلة تفاضلية ثم أوجد الحل العام

١٢. $ص د س + (ص - س) د ص = ٠$

١٣. $(س^{٢} + ص^{٢} + س) د س + ص د ص = ٠$

١٤. $٢ ص^{٢} د س + (٢ س + ٣ س ص) د ص = ٠$

١٥. $(س^{٢} + ٢ ص) د س - س د ص = ٠$

١٦. $(س^{٢} + ص^{٢}) د س + (٣ س ص) د ص = ٠$

١٧. حل $س ص د س + (س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٢) د ص = ٠$

١٨. اذا كان $م = ص أ (س ص)$، $ن = س ب (س ص)$. بيَن ان

$١/(س م - ص ن)$ هو عامل تكامل للمعادلة $م د س + ن د ص = ٠$.

١٩. استعمل نتيجة التمرين ١٨ لحل المعادلة

$٢ س^{٢} ص^{٣} د س + س^{٣} ص^{٢} د ص = ٠$.

٢٠. حل $(س^{٢} + ص^{٢} + ١) د س - (س ص + ص) د ص = ٠$. [ارشاد: جرب عامل تكامل من النوع $\mu (س ، ص) = (س + ١)^{ن}$.]

٢ ـ ٦ معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الأولى

معادلة الفرق العامة الخطية ذات الرتبة الأولى هي

$$ص_{ن+١} = أ_ن ص_ن + ف_ن ، \quad \text{.................. (٢ ـ ٦٠)}$$

حيث $أ_ن$ ، $ف_ن$ معروفان مع جميع قيم ن . وقبل البدء بايجاد القانون العام لحل المعادلة (٢ ـ ٦٠) يهمنا ان نتفهم وجود المطابقة بين المعادلات التفاضلية الخطية ونظيراتها من معادلات الفروق. فلننظر في معادلة أبسط هي

$$ص_{ن+١} = أ ص_ن ، \quad \text{.......................... (٢ ـ ٦١)}$$

حيث أ ثابت معلوم. لاحظ اننا بالاستقراء نجد أن $ص_١ = أ ص_٠$ ، $ص_٢ =$ $أ ص_١ = أ^٢ ص_٠$ ، . . . ، وبوجه عام

$$ص_{ن+١} = أ ص_ن = أ (أ ص_{ن-١}) = . . . = أ^{ن+١} ص_٠ ، \quad . \text{ (٢ ـ ٦٢)}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة (٢ ـ ٦١)

فاذا قارنا (٢ ـ ٦١) ، (٢ ـ ٦٢) مع المعادلة التفاضلية $صَ = أ ص$ ، وحلها العام $ص(س) = حـ e^{أس}$ يتبين لنا ان ن + ١ ، أ ، $ص_٠$ تناظر على التوالي س ، $e^{أ}$ ، حـ.

فلنفرض ان المعادلة كانت

$$ص_{ن+١} = أ_ن ص_ن . \quad \text{......................... (٢ ـ ٦٣)}$$

فبالطريقة ذاتها نجد ان $ص_١ = أ_٠ ص_٠$ ، $ص_٢ = أ_١ ص_١ = أ_١ أ_٠ ص_٠$ ، . . . ،

وبوجه عام

$$\text{ص}_{\text{ن}+1} = \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{أ}_{\text{ن}-1} \ldots \text{أ}_1\,\text{أ}_0\,\text{ص}_0 = \left(\prod_{\text{ك}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ك}}\right) \text{ص}_0 \quad \ldots\ldots \quad (٢ - ٦٤)$$

والمعادلة التفاضلية التي تناظرها هى $\text{ص}' = \text{أ}\,(\text{س})\,\text{ص}$، وحلها العام $\text{ص}\,(\text{س}) = \text{حـ}\, e^{\int \text{أ}(\text{س})\, \text{دس}}$، وإذن فان $\prod_{\text{ك}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ك}}$ يناظر $e^{\int \text{أ}(\text{س})\, \text{دس}}$.

ولننظر الآن في المعادلة

$$\text{ص}_{\text{ن}+1} = \text{ص}_{\text{ن}} + \text{ف}_{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٦٥)$$

فطريقتنا الاستقرائية تفضي الى $\text{ص}_1 = \text{ص}_0 + \text{ف}_0$ ، $\text{ص}_2 = \text{ص}_1 + \text{ف}_1 = \text{ص}_0 + \text{ف}_0 + \text{ف}_1$ ، . . . ، ويكون

$$\text{ص}_{\text{ن}+1} = \text{ص}_0 + \sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}} \text{ف}_{\text{ك}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٦٦)$$

لأن $\text{ص}' = \text{ص} + \text{ف}\,(\text{س})$ حلها العام $\text{ص} = \text{حـ}\, e^{\text{س}} + e^{\text{س}} \int \text{ف}\,(\text{س})\, e^{-\text{س}}\, \text{دس}$

فقد اتضح التناظر. (تذكر ان $\prod_{\text{ك}=0} 1 = 1$ تناظر e^0).

وأخيراً، ننظر في المعادلة الخطية العامة، ذات الرتبة الأولى:

$$\text{ص}_{\text{ن}+1} = \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}} + \text{ف}_{\text{ن}}.$$

فبالاستقراء ينتج

$\text{ص}_1 = \text{أ}_0\,\text{ص}_0 + \text{ف}_0$ ، $\text{ص}_2 = \text{أ}_1\,\text{ص}_1 + \text{ف}_1 = \text{أ}_1\,\text{أ}_0\,\text{ص}_0 + \text{أ}_1\,\text{ف}_0 + \text{ف}_1$ ،

. . . ،

وبوجه عام:

$$ص_{ن+1} = (أ_ن أ_{ن-1} \ldots أ_1 أ_0)\, ص_0 + (أ_ن \ldots أ_1)\, ف_0 + (أ_ن \ldots أ_2)\, ف_1 + \ldots + أ_ن ف_{ن-1} + ف_ن$$

$$= \left(\prod_{ك=0}^{ن} أ_ك\right) ص_0 + \sum_{ك=0}^{ن} \left(\prod_{ي=ك+1}^{ن} أ_ي\right) ف_ك \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٦٧)$$

(**ملاحظة**: نعرِّف الضرب الخالي $\prod_{ي=ن+1}^{ن} أ_ي$ باعتباره مساوياً للواحد.) وينبغي مقارنة المعادلة (٢ ـ ٦٧) بالمعادلة (٢ ـ ٣٤) في البند ٢ ـ ٣ لأنها المقابل المتكامل لها.

المثال ٢ ـ ٦ ـ ١ $ص_{ن+1} = (ن + ١)\, ص_ن$. هنا $أ_ن = ن + ١$ ، $ف_ن = ٠$ فباستعمال المعادلة (٢ ـ ٦٤) او بطريقة الاستقراء نجد ان

$$ص_{ن+1} = \left(\prod_{ك=0}^{ن} (ك + ١)\right) ص_0 = (ن + ١)!\, ص_0 .$$

المثال ٢ ـ ٦ ـ ٢ مزرعة أميبا كانت سعتها الابتدائية ١٠٠٠ ، وقد لوحظ ان واحدة من كل عشر اميبات، في المتوسط، تنتج واحدة اخرى في كل ساعة، بالانقسام الخلوي. فكم اميبا بالتقريب سيكون في المزرعة بعد ٢٠ ساعة ؟

ليكن $ص_ن$ هو عدد الاميبات بعد $ن$ ساعات. فمعادلة النمو السكاني في الساعة التالية هي

$$ص_{ن+1} - ص_ن = \frac{١}{١٠}\, ص_ن ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٦٨)$$

وهذا يعني ان $ص_{ن+1} = (١,١)\, ص_ن$. والحل العام تعطيه المعادلة (٢ ـ ٦٢)،

وهو:

$$ص_{ن+1} = (1,1)^{ن+1} ص_{0} \quad ، ص_{0} = 1000 .$$

فيكون $ص_{20} = (1,1)^{20} \times 1000 \approx 6727$.

المثال ٢ ـ ٦ ـ ٣ في المثال السابق، افرض ان ٣٠ اميبا أخرى تتسرب الى المزرعة في كل ساعة من وعاء مجاور لم يحكم إغلاقه. فكم يكون عدد الأميبا بعد ٢٠ ساعة ؟

تصبح المعادلة

$$ص_{ن+1} - ص_{ن} = \frac{1}{10} ص_{ن} + 30 ،$$

أي أن $ص_{ن+1} = (1,1) ص_{ن} + 30$ ، وحسب (٢ ـ ٦٧) يكون حل هذه المعادلة :

$$ص_{ن+1} = (1,1)^{ن+1} (1000) + \sum_{ك=0}^{ن} (1,1)^{ن-ك} (30) .$$

ولأن مجموع المتوالية الهندسية $1 + أ + أ^{2} + \ldots + أ^{ن} = (أ^{ن+1} - 1)/(أ - 1)$، ولذا يكتب هذا الحل بالصيغة

$$ص_{ن+1} = 1000 (1,1)^{ن+1} + 30 \left(\frac{(1,1)^{ن+1} - 1}{1,1 - 1} \right) ،$$

فيكون $ص_{20} \approx 8445$.

وبالامكان حل بعض معادلات الفروق غير الخطية التي تماثل المعادلات التي وردت في البند (٢ ـ ٤) وسندرس هنا اثنين منها :

فالمعادلة

$$\text{ص}_{\text{ن}+1} = \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}} / (1 - \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}}) \quad \cdots\cdots \quad (٢ - ٦٩)$$

يمكن ان تكتب بالشكل

$$\text{ص}_{\text{ن}+1} = \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}} + \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}+1} . \quad \cdots\cdots \quad (٢ - ٧٠)$$

وهذه تناظر معادلة برنولي (٢ ـ ٣٦) .

فكما صنفنا هناك نبدأ بتجربة التعويض

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ص}_{\text{ن}}} \quad \cdots\cdots \quad (٢ - ٧١)$$

فبعد قسمة طرفي (٢ ـ ٧٠) على $\text{ص}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}+1}$، ينتج:

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{ن}+1} + \text{ف}_{\text{ن}} \quad \cdots\cdots \quad (٢ - ٧٢)$$

اي ان

$$\text{ع}_{\text{ن}+1} = \frac{\text{ع}_{\text{ن}} - \text{ف}_{\text{ن}}}{\text{أ}_{\text{ن}}} . \quad \cdots\cdots \quad (٢ - ٧٣)$$

وباستعمال طرفي هذا البند نجد ان

$$\text{ع}_{\text{ن}+1} = \left(\prod_{\text{ك}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ك}}^{-1}\right) \text{ع}_{.} - \sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}} \left(\prod_{\text{ي}=\text{ك}+1}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ي}}^{-1}\right) \frac{\text{ف}_{\text{ك}}}{\text{أ}_{\text{ك}}} . \quad \cdots\cdots \quad (٢ - ٧٤)$$

ونعوض (٢ ـ ٧١) في (٢ ـ ٧٤) فينتج الحل:

$$\text{ص}_{\text{ن}+1}^{-1} = \left(\prod_{\text{ك}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ك}}^{-1}\right) \text{ص}_{.}^{-1} - \sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}} \left(\prod_{\text{ي}=\text{ك}}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ي}}^{-1}\right) \text{ف}_{\text{ك}} .$$

وبالمثل لدينا **معادلة ركاتي** (في الفروق) وهي لا خطية

$$ص_ن ص_{ن+1} + أ_ن ص_ن + ب_ن ص_{ن-1} = حـ_ن \quad .... \quad (٢ - ٧٥)$$

ولأيجاد التشابه بين هذهو معادلة ركاتي التفاضلية (٢ - ٣٩)، نكتب (٢ - ٧٥) بالشكل:

$$(ص_ن - ص_{ن-1}) + ص_ن ص_{ن+1} + [(أ_ن - 1) ص_ن + (ب_ن + 1) ص_{ن-1}] - حـ_ن = ٠ .$$

ولكي نحصل على معادلة خطية، نعوض

$$ص_ن = \frac{س_ن}{س_{ن+1}} - ب_ن ،$$

في المعادلة (٢ - ٧٥). فبعد الاختصار تصبح (٢ - ٧٥) بالشكل

$$(أ_ن ب_ن + حـ_ن) س_{ن+1} - (أ_ن - ب_{ن-1}) س_ن - س_{ن-1} = ٠ ، \quad .... (٢ - ٧٦)$$

وهذه معادلة خطية من الرتبة الثانية. وفي الفصل ٤ سندرس طرق حل هذه المعادلات عندما تكون $أ_ن$ ، $ب_ن$ ، $حـ_ن$ ثوابت.

التمارين ٢ - ٦

في التمارين من ١ الى ٩ أوجد الحل العام لكل معادلة فرق وحيث تعطى شرطاً ابتدائياً أوجد حلا خاصاً يحققه:

١ . $ص_{ن+١} - ص_ن = ٢^{-ن}$

٢ . $ص_{ن+١} = \frac{ن + ٥}{ن + ٣} ص_ن$

٣ . $ص_{ن+١} - ٣ص_ن = ٣ص_{ن+١} - ص_ن$

٤ . $٢ص_{ن+١} = ص_ن$ ، $ص_. = ١$

٥ . $(ن + ١) ص_{ن+١} = (ن + ٢) ص_ن$ ، $ص_. = ١$

٦ . $ص_{ن+١} = ن ص_ن$

٧ . $ص_{ن+١} - ٥ص_ن = ٢$ ، $ص = ٢$

٨ . $ص_{ن+١} - ن ص_ن = ن!$ ، $ص_. = ٥$

٩ . $ص_{ن+١} - e^{-٢ن} ص_ن = e^{-ن٢}$

١٠ . يتلاشى الراديوم بمعدل ١ في المئة كل ٢٥ سنة . فذا أخذنا عينة من الراديوم مقدارها $غ_.$ غرامات وكان $غ_ن$ هو ما يبقى منها بعد ٢٥ ن سنوات فأوجد معادلة فرق تعطي $غ_ن$ وأوجد منها كم يبقى من العينة بعد مئة سنة ؟

١١ . اجريت لعبة بقطعة نقد كتب على أحد وجهيها ١ وعلى الوجه الثاني ٢ . فكان اللاعب يقذف القطعة مرات متتالية ويسجل له مجموع نتائجه من آحاد واثنينات . فليكن $ح_ن$ هو احتمال ان يحصل اللاعب ذات مرة على المجموع ن . اثبت ان $ح_ن = ١ - \frac{١}{٢} ح_{ن-١}$. ثم على اعتبار ان $ح_. = ١$ استنتج قانون $ح_ن$.

١٢ . لوضع نموذج رياضي لعدد السكان في مجتمع ما افترض ان $ح_ن$ ، احتمال ان

ينجب الزوجان $ن$ من المواليد، هو حسب المعادلة $ح_ن = ٠,٧ ح_{ن-١}$. أوجد $ح_ن$ بدلالة $ح_٠$ وأوجد قيمة $ح_٠$ من العلاقة $ح_٠ + ح_١ + ح_٢ + ... = ١$

١٣. في نموذج آخر للتمرين ١٢ كان $ح_ن = (١/ن) ح_{ن-١}$. أوجد هنا $ح_ن$ بدلالة $ح_٠$ واثبت ان $ح_٠ = ١/e$

١٤. ليكن $س_ك$ عدد تباديل $ن$ اشياء بأخذها كل $ك$ معا. فمع كل تبديل من تباديل $ك$ نحصل على $ن - ك$ تبادل من $ك + ١$ أشياء، وذلك بأخذ واحد من الأشياء الباقية، وعددها $ن - ك$، ووضعه جانباً. فيكون $س_{ك+١} = (ن - ك) س_ك$

اثبت ان عدد تباديل $ن$ اشياء مأخوذة كل $ك$ معاً هو $ن!/(ن - ك)!$

١٥. في التمرين ١٤، ليكن $س_ن$ هو عدد توافيق $ن$ اشياء (حيث لا يهم الترتيب). فكل تبديل يشمل $ك + ١$ أشياء (بترتيباتها المختلفة) يظهر $ك + ١$ مرات. وعلى هذا يكون

$$س_{ك+١} = \frac{ن - ك}{ك + ١} س_ن .$$

اثبت ان عدد توافيق $ن$ اشياء مأخوذة كل $ك$ معاً هو

$$\frac{ن!}{(ن - ك)!\ ك!} = \binom{ن}{ك} .$$

ويسمى الطرف الايسر بالمعامل الحداني binomial coefficient

١٦. حوِّل المعادلة $ص_ن (١ + أ ص_{ن-١}) = ١$ الى معادلة خطية من الرتبة الثانية، وذلك بتعويض مناسب.

١٧ . بتعويض مناسب حول كل واحدة من معادلتي ركاتّي التاليتين الى معادلة خطية من الرتبة الثانية

أ) $ص_{ن+١} ص_{ن} + ٢ص_{ن+١} + ٤ص_{ن} = ن$

ب) $ص_{ن+١} ص_{ن} - ٣^{ن} ص_{ن+١} + (٣^{ن-١} - ٢) ص_{ن} + ٣^{ن} (٣^{ن+١} - ٢) = ٠$

١٨ . حل المعادلة $ص_{ن+١} = ٢ ص_{ن}^{٢} - ١$ وذلك بتعويض $ص_{ن} = جتا س_{ن}$.

١٩ . **معادلة كليروه في الفروق** تتخذ الشكل $ص_{ن} = ن (ص_{ن+١} - ص_{ن}) + ف(ص_{ن+١} - ص_{ن})$ لاحظ أن **الفرق الأول** $ص_{ن+١} - ص_{ن}$ (ويعبر عنه بالرمز $\triangle ص_{ن}$) يقوم بدور المشتقة في المعادلات التفاضلية . ففي المعادلة $ص_{ن} = ن \triangle ص_{ن} + (\triangle ص_{ن})^{٢}$ خذ اولا الفرق الأول لكل من الطرفين ثم عوض $\triangle ص_{ن} = س_{ن}$. ثم بين

(أ) ان المعادلة الناتجة يمكن ان تكتب

$(س_{ن+١} - س_{ن}) (س_{ن+١} + س_{ن} + ن + ١) = ٠$

(ب) ان الشرط $س_{ن+١} - س_{ن} = ٠$ يعطي **الحل العام** $ص_{ن} = ن حـ + حـ^{٢}$ ، حيث حـ اعتباطي .

(جـ) ان الشرط $س_{ن+١} + س_{ن} + ن + ١ = ٠$ يتضمن ان $ص_{ن+١} = - س_{ن} س_{ن+١}$ وهكذا نحصل على الحل المنفرد

$$ص_{ن} = [\sqrt{ص} + \frac{١ - (-١)^{ن}}{٤}] - (\frac{ن}{٢})^{٢} .$$

٢ ـ ٧ تطبيقات على معادلات الفروق

ذات الرتبة الأولى. طريقة نيوتن

من المسائل المهمة في الرياضيات ايجاد جذور اي معادلة معطاة، مثل

$$ق(س) = ٠ \qquad \ldots\ldots (٢ - ٧٧)$$

فباستعمال نظرية تايلور، مركزة على قيمة $س_ن$، نعبر عن هذا الاقتران بالصيغة:

$$٠ = ق(س) = ق(س_ن) + \acute{ق}(س_ن)(س - س_ن) + \frac{\acute{\acute{ق}}(س_ن)}{٢!}(س - س_ن)^٢ + \ldots\ldots (٢ - ٧٨)$$

فاذا استبقينا الحدين الأولين في الطرف الايسر وحذفنا الحدود الأخرى ثم حللنا المعادلة لايجاد قيمة س ينتج

$$س = س_ن - \frac{ق(س_ن)}{\acute{ق}(س_ن)}،$$

فاذا سمينا هذه القيمة الجديدة $س_{ن+١}$ نحصل على معادلة فرق من الرتبة الأولى هي

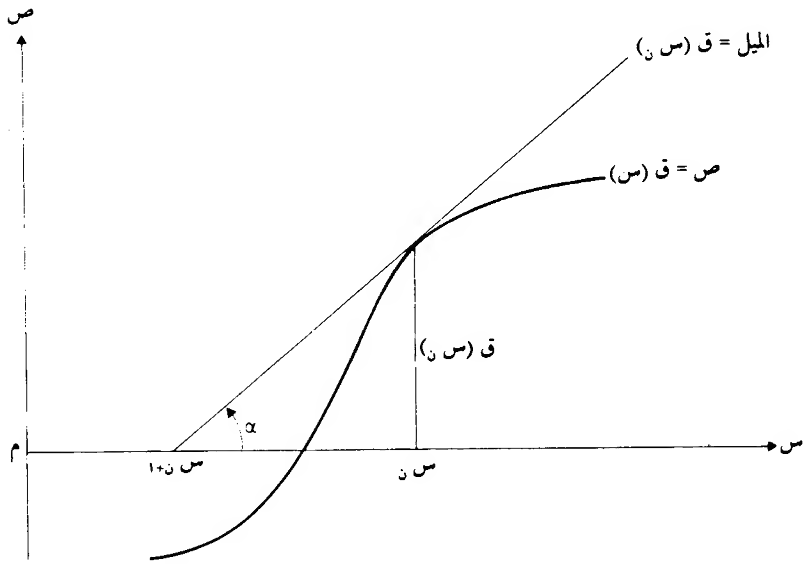
$$س_{ن+١} = س_ن - \frac{ق(س_ن)}{\acute{ق}(س_ن)}، \qquad \ldots\ldots (٢ - ٧٩)$$

وتسمى هذه المعادلة صيغة نيوتن لحل المعادلات. والقيمة $س_{ن+١}$ هي تقريب لجذر من جذور المعادلة (٢ ـ ٧٧). وبالطبع ما دمنا قد اسقطنا كل الحدود عدا اثنين من

متتالية تيلور للحصول على هذه القيمة فمن غير المحتمل ان تكون $س_{ن+١}$ جذراً للمعادلة (٢ ـ ٧٧) ولكن اذا كان $س_{ن}$ قريباً من جذر ما ، س ، تكون الكمية س - $س_{ن}$ قريبة من الصفر وهكذا يمكن اهمال القوى العليا للمقدار س - $س_{ن}$ في متتالية تيلور

فاذا كتبنا (٢ ـ ٧٩) على النحو

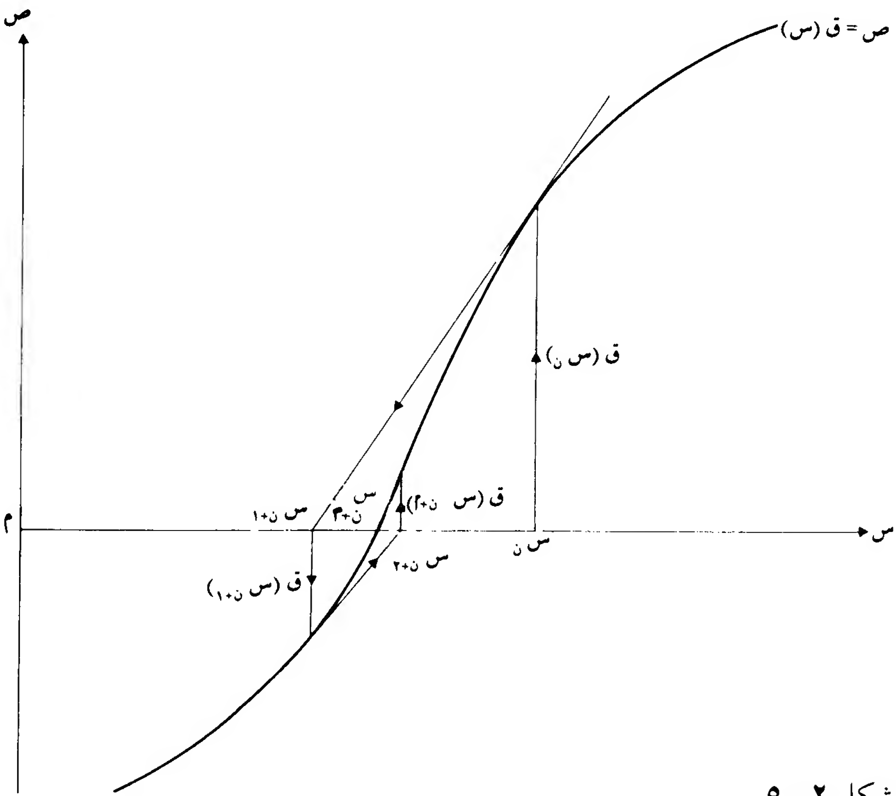
$$قَ(س_{ن}) = \frac{ق(س_{ن})}{س_{ن} - س_{ن+١}} ،$$



الشكل ٢ ـ ٤

نحصل على تفسير تخطيطي للعملية (انظر الشكل ٢ ـ ٤)، فالمشتقة التفاضلية $قَ(س_{ن})$ هي ميل المماس للمنحنى ص = ق (س) عند س = $س_{ن}$، وهذا الميل هو ظا ∝

والخط المماس يقطع محور س عند $س_{ن+١}$. العملية لايجاد الجذر تشتمل على ايجاد جذر ابتدائي $س_٠$ بالحد س ثم تطبق (٢ ـ ٧٩) مرة بعد مرة لايجاد المتتالية $س_ن$، أولاً بأن تتقارب هذه المتتالية الى حل للمعادلة (٢ ـ ٧٧) ، (انظر الشكل ٢ ـ ٥) . والشروط التي تضمن ان تسر العلمية سيراً صحيحاً تبينها النظرية التالية :



الشكل ٢ ـ ٥

النظـريـة ٢ ـ ١ اذا كان ق (س) معَّرفاً في الفقـرة أ $\leqslant$ س $\leqslant$ ب ، ومتصـلا وقـابـلا للاشتقاق مرتين ويفضي الى مشتقتين متصلتين ، ويحقق ما يلي :

i) ق (أ) ، ق (ب) مختلفا الاشارة ؛

ii) قَ (س) = ٠ لكل س في أ ⩽ س ⩽ ب ؛

iii) قً (س) لا يغير اشارته في الفترة أ ⩽ س ⩽ ب ؛

iv) واذا كان قَ (أ) ⩽ قَ (ب) يكون | ق (أ) / قَ (أ) | ⩽ ب - أ ؛ واذا كان قَ (ب) ⩽ قَ (أ) يكون | ق (ب) / قَ (ب) | ⩽ ب - أ.

فعندها تؤدي طريقة نيوتن الى جذور تتقارب نحو جذر وحيد س* للمعادلة ق (س) = ٠ شرط ان يكون الجذر الابتدائي س. ضمن الفترة أ ⩽ س ⩽ ب.

لن نعطي في هذا الكتاب برهاناً على هذه النظرية فمن شاء فليرجع الى كتب أخرى+.

وتستعمل هذه الطريقة في مسائل عملية كثيرة.

المثال ٢ ـ ٧ ـ ١ ليكن ع > ١، ولنضع خوارزمية لايجاد الجذر التربيعي للعدد ع.

فنأخذ ق (س) = س٢ - ع، س > ٠.

فيكون قَ (س) = ٢ س. وطريقة نيوتن تؤدي الى معادلة الفرق التالية:

$$س_{ن+١} = س_ن - \frac{س_ن^٢ - ع}{٢ س_ن}$$

أي أن

$$س_{ن+١} = \frac{١}{٢} (س_ن + \frac{ع}{س_ن}) . \quad \text{................} \quad (٢ - ٨٠)$$

+ مثل كتاب Peter Henrici, Elements of Numerical Analysis, Wiley, New York, 1964

ويمكن بسهولة معالجة الصيغة (٢ ـ ٨٠) بحاسبة جيب. فاذا أخذنا $س_{٠}$ أي عدد صحيح في الفترة ١ ≤ س ≤ ١ + ع، نقسم ع على $س_{٠}$ ونضيف $س_{٠}$ الى خارج القسمة فنصف الخارج هو $س_{١}$.

ونعيد العملية على $س_{ن}$ لنحصل على $س_{ن+١}$، حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، . .

فمثلا، اذا كان ع = ١٥ ، $س_{٠}$ = ٤ ، ينتج من (٢ ـ ٨٠) ما يلي:

$س_{١}$ = ٣.٨٧٥ ، $س_{٢}$ = ٣,٨٧٢٩٨٤ ، $س_{٣}$ = ٣,٨٧٢٩٨٣٣٤٥ ،

وهذا صحيح لثماني منازل عشرية. واذا اخترنا قيم أخرى للرمز $س_{٠}$ فقد يحتاج الامر الى خطوات أكثر حتى نحصل على هذا القدر من الدقة فحسن اختيار القيمة الابتدائية يقلل من خطوات الحل.

ولكي نتبين ان الطريقة تنجح دائماً، نفرض أ = ١ ، ب = ١ + ع ثم نختبر شروط النظرية ٢ ـ ١. نلاحظ ان ق (١) = ١ − ع > ٠ ، ق (١ + ع) = ١ + ع + $ع^{٢}$ > ٠ ، قَ (س) = ٢ س > ٠ لكل س > ١، قً (س) = ٢

لذلك تتحقق الشروط (i) ، (ii) ، (iii).

ولأن قَ (١) = ٢ > ٢ + ٢ ع = قَ (١ + ع)،

$$\left| \frac{ق\,(١)}{قَ\,(١)} \right| = \frac{ع - ١}{٢} \leqslant ع \quad = (ع + ١) - ١،$$

فان الشرط (iv) يتحقق ايضا اي ان طريقة نيوتن تفضي الى حل وحيد في الفترة ١ ≤ س ≤ ١ + ع.

وليس ضرورياً تحقيق شروط النظرية ٢ ـ ١ قبل تطبيق طريقة نيوتن، الا ان عدم التحقق من ذلك قد ينجم عنه أحد الأمرين التاليين:

١ . تباعد المتتالية { $س_{ن}$ } دون ان تفضي الى حل .

٢ . فوات فرصة الحصول على جذور أخرى ضمن الفترة [أ ، ب] .

المثال ٢ ـ ٧ ـ ٢ لأيجاد الجذر الرائي للعدد ع > ١ ، نحل المعادلة :

$$ق\,(س) = س^{ر} - ع = ٠ \;،\; س > ٠ \;،$$

بطريقة نيوتن.فينتج

$$س_{ن+١} = س_{ن} - \frac{س_{ن}^{ر} - ع}{ر\,س_{ن}^{ر-١}} = (١ - \frac{١}{ر})\,س_{ن} + \frac{ع}{ر\,س_{ن}^{ر-١}} .$$

وهذه الصيغة تتقارب الى $ع^{١/ر}$ مهما تكن القيمة التي نختارها للحد $س_{٠} > ١$.

المثال ٢ ـ ٧ ـ ٣ أوجد جذور الحدودية :

$$ق\,(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٧س - ٣ \;. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ٨١)$$

نلاحـظ أن ق (٠) = − ٣، ق (١) = ٦ ، فهنـاك جذريين ٠ ، ٦ للمعـادلـة (٢ ـ ٨١) لنجعل أ = ٠ ، ب = ١ ، وبسهولة نستطيع ان نتبين ان الشروط (i) ، (ii) ، (iii) في النظرية ٢ ـ ١ ؛ تتحقق . ولأن قَ (٠) = ٧ > ١٢ = قَ (١) ، ٣/٧ > ١ ، فالشرط (iv) يتحقق ايضا . فيكون :

$$س_{ن+١} = س_{ن} - \frac{ق\,(س_{ن})}{قَ\,(س_{ن})} = \frac{٢س_{ن}^{٣} + س_{ن}^{٢} + ٣}{٣س_{ن}^{٢} + ٢س_{ن} + ٧} \qquad \ldots\ldots \quad (٢ - ٨٢)$$

هو صيغة نيوتن للمعادلة (٢ ـ ٨١) . فنجد $س_{٠}$ بالحزر، ولتكن $س_{٠} = ٠$، فيكون

$س_1 = ٠,٤٢٨٦$ ، $س_2 = ٠,٣٩٧٣$ ، $س_3 = ٠,٣٩٧١$ وهــذا صحيــح لأربــع منازل عشرية .

المثال ٢ ـ ٧ ـ ٤ اذا شئنا ان نجد مقلوب اي عدد، بلا قسمة نستعمل الخوارزمية التالية وهي تستعمل في بعض الحاسبات : نتخذ ق (س) = ١ /س − ع، فيكون

$ق'(س) = -١/س^2$ ، والقاعدة (٢ ـ ٧٩) تعطي

$$س_{ن+1} = س_ن - \frac{س_ن^{-1} - ع}{س_ن^{-2}} = س_ن (٢ - ع س_ن)$$

وهذا يتقارب الى ١/ع لكل $س_٠$ حيث $٠ < س_٠ < ٢/ع$. فلحساب $١/\pi$ حيث $\pi = ٣,١٤١٥٩٢٦$ ، نجعل $س_٠ = ٠,٥$ فنجد ما يلي :

$س_٠ = ٠,٥$ ، $س_3 = ٠,٣١٤٧$ ،

$س_1 = ٠,٢١٤٦$ ، $س_4 = ٠,٣١٨٢٧$ ،

$س_2 = ٠,٢٨٤٥$ ، $س_5 = ٠,٣١٨٣٠٩٨٩$ ،

والأخير صحيح لثماني منازل عشرية .

لاحظ ان التقارب سريع في المثالين ٢ ـ ٧ ـ ١ ، ٢ ـ ٧ ـ ٤ ان سرعة التقارب في قاعـدة نيـوتن تتنـاسب مع العبارة التر بيعية $(س - س_ن)^2$. وهي عامل في كل الحدود التي حذفنـاهـا من (٢ ـ ٧٨) . لهذا تسمى احيـانـا بالتقارب التر بيعي Quadratic Convergence

التمارين ٢ ـ ٧

١ . باستعمال قاعدة نيوتن ، ضع خوارزمية لحساب الجذر التكعيبي لأي عدد موجب ثم

أحسب $\sqrt[3]{٦}$ لأربع منازل عشرية .

٢ . احسب قيمة $\frac{١}{٦}$ لثماني منازل عشرية ، بدون قسمة . إبدأ خطوات نيوتن بالعدد ٠,١٥ .

٣ . بيِّن بالرسم ان هنالك حلا واحداً للمعادلة س = $e^{-س}$. ثم أوجد هذا الحل لأربع منازل عشرية باستعمال قاعدة نيوتن .

٤ . ضع خوارزمية تعطي ، بعد اختيار مناسب لقيمة $س_٠$ ، أصغر جذر موجب للمعادلة ٤ جتاس = $e^{س}$. ثم احسب هذا الجذر لأربع منازل عشرية . [**إرشاد**: ضع رسماً بيانياً لكل من ٤ جتاس ، $e^{س}$ كي ترى ما الذي يجري] .

٥ . أوجد لأربع منازل عشرية أصغر جذر موجب للمعادلة $\frac{١}{٢}$ ظاس = س

٦ . ضع باللغة الأساسية BASIC ، أوبلغة فورتران ، برنامج كمبيوتر لإجراء العمليات الحسابية اللازمة في التمارين ٣ ، ٤ ، ٥ .

٧ . يمكن اعتبار المشتقة قَ ($س_ن$) مساوية بالتقريب للمقدار

$$\frac{ق (س_ن) - ق (س_{ن-١})}{س_ن - س_{ن-١}} ،$$

وهو خارج قسمة فرق على فرق . وواضح ان هذا الخارج يقترب من قيمة المشتقة كلما اقترب الفرقان من الصفر . عوض بهذه الصيغة عن المشتقة في قاعدة نيوتن ، واستنتج من ذلك معادلة فروق من الدرجة الثانية تحدد خطوات متتابعة . (**ملاحظة** : يفضي

هذا الى طريقة لحل المعادلات العددية تسمى regula falsi *. والطريقة تفيد اذا كان ايجاد المشتقة غير مرغوب فيه.

٨. باستعمال طريقة التمرين ٧، ضع خوارزمية لحساب الجذور التربيعيه، واخرى لحساب الجذور التكعيبية، ثم احسب $\sqrt{١٥}$، $\sqrt[٣]{٦}$ بهما، وقارن نتائجك بما ينتج بطريقة نيوتن (لاحظ ان هذه الطريقة تقتضي اختيار قيمتين ابتدائيتين).

٢ ـ ٨ الدوائر الكهربائية البسيطة

في هذا البند ندرس دوائر كهربائية بسيطة تحتوي على أجهزة مقاومة وحث أو مواسعة، تتصل على التوالي بمصدر قوة دافعة كهربائية (ق د ك). وهي كالمبينة بالشكل (٢ ـ ٦أ، ب). ويسهل فهم عملها دون معرفة متخصصة بالكهرباء.



(أ) (ب)

الشكل ٢ ـ ٦

١. ق : القوة الدافعة الكهربائية (ق د ك)، وتقاس بالفولت. وهي عادة بطارية او

---

* هذه الطريقة استعملها العرب بكثرة وسموها حساب الخطأين، وعنهم أخذها البيزنطيون، وقد كانت الطريقة تستعمل على نحو بدائي في مصر الفرعونية (المترجم).

مولـد كهـربـائي يدفـع بشحنـة ش (كولوم) فينطلق تيار ت (أمبير). ويعرف التيار بأنه سرعة تدفق الشحنة. فنكتب

$$ت = \frac{د\,ش}{د\,ن} \quad \text{(٢ - ٨٣)}$$

٢ . جهـاز مقـاومـة (resistor) مقاومته و (أوم) وهو من مركبات الدائرة ويقاوم التيار ببعثرة طاقته على شكل حرارة، فيحدث انخفاضاً في الفولتية هو حسب **قانون اوم**

$$ق_{و} = و ت \quad \text{(٢ - ٨٤)}$$

٣ . جهـاز حثّ (inductor) مقـدار حثّه (inductance) ح (هنري) وهو يقاوم أي تغير في التيار بخفض الفولتية بمقدار

$$ق_{ح} = ح \frac{د\,ت}{د\,ن} \quad \text{(٢ - ٨٥)}$$

٤ . مواسع (capacitor) مواسعته (capacitance) س (فاراد) تختزن الشحنة وبذا تقاوم تدفق شحنات أخرى فتحدث انخفاضا بالفولتية مقداره:

$$ق_{س} = \frac{ش}{س} \quad \text{(٢ - ٨٦)}$$

والكميـات و ، ح ، س هي عادة ثابتـة تحددهـا اجهزة الدائرة الكهربائية. وأما ق فقد تكون ثابتة أو متغيرة تتبع الزمن. والمبدأ الأساسي الذي يسري على هذه الدوائر هو قانون الفولتية المنسوب للعالم كرتشوف، وهو:

المجموع الجبري لانخفاضات الفولتية حول الدائرة المغلقة : صفر

ففي الدائرة المبينة بالشكل ٢ ـ ٦ (أ) تحدث المقاومة والحث حفظا في الفولتية مقداره $ق_و$ ، $ق_ح$ على التوالي . اما ق د ك فهي مصدر يمد الدائرة بالقوة ق (اي انه يخفض الفولتية بمقدار − ق . فيكون قانون كرتشوف :

$$ق_و + ق_ح - ق = ٠ .$$

فبنقل ق الى الطرف الثاني للمعادلة واستعمال المعادلتين (٢ ـ ٨٤) و(٢ ـ ٨٥) للتعويض عن $ق_و$ ، $ق_ح$ ينتج :

$$ح \frac{د ت}{د ن} + و ت = ق ، \quad \ldots\ldots (٢ ـ ٨٧)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية . فنقسم على ح ونستعمل المعادلة (٢ ـ ٣٤)، فينتج :

$$ت_ن = e^{-و ن/ح} [\frac{١}{ح} \int ق (ن) e^{و ن/ح} د ن + حـ] . \quad \ldots\ldots (٢ ـ ٨٨)$$

فاذا كانت ق ثابتة، تتحول المعادلة الى الشكل :

$$ت_ن = \frac{ق}{و} + حـ e^{- و ن/ح} ،$$

فاذا وضعنا ن = ٠، ينتج :

$$ت_ن = \frac{ق}{و} + [ت (٠) - \frac{ق}{و}] e^{- و ن/ح} \quad \ldots\ldots (٢ ـ ٨٩)$$

وبتزايد ق تقترب قيمة الحد الأخير في هذه المعادلة من الصفر، لذلك يسمى بالجزء **الزائل** من التيار، فيبقى لدينا ق/و وهو الجزء ذو الحالة **الثابتة** من التيار.

المثال ٢ ـ ٨ ـ ١ وصلنا حثاً مقداره ٢ هنري (هن) ومقاومة مقدارها ١٠ اوم (م) مع ق د ك مقدارها ١٠٠ فولت (ف). فاذا علم ان التيار كان صفراً عندما كان ن = ٠ فكم كان التيار بعد ١,٠ ثانية ؟

نطبق المعادلة (٢ ـ ٨٩) متخذين ق = ١٠٠ ، و = ١٠ ، ح = ٢ ، ت (٠) = ٠ ، ن = ١,٠ فينتج

ت (١,٠) = ١٠ (١ − $e^{-0,5}$) = ٣,٩٣ أمبير.

المثال ٢ ـ ٨ ـ ٢ في المثال السابق اذا كانت ق = ١٠٠ جا ٦٠ ن فولت واستعملنا المعادلة (٢ ـ ٨٨) والقانون (٥٠) في الملحق ١ ينتج

ت (ن) = $e^{-5ن}$ [٥٠ ∫ (جا ٦٠ ن) . $e^{5ن}$ د ن + حـ]

= $e^{-5ن}$ [٥٠ $e^{5ن}$ (٥ جا ٦٠ن − ٦٠ جتا ٦٠ن) / ٣٦٢٥ + حـ]

= (٢ جا ٦٠ن − ٢٤ جتا ٦٠ن) / ٢٩ + حـ $e^{-5ن}$.

فاذا وضعنا ن = ٠ نجد ان حـ = ٢٤ / ٢٩ فيكون

ت (١,٠) = (٢ جا ٦ − ٢٤ جتا ٦) / ٢٩ + (٢٤ / ٢٩) $e^{-0,5}$ = − ٠,٣١ أمبير.

وفي الدائرة في الشكل ٢ ـ ٦ (ب) يكون $\text{ق}_{\text{و}} + \text{ق}_{\text{س}} - \text{ق} = ٠$

اي ان

$$\text{و} \frac{\text{د ش}}{\text{د ن}} + \frac{\text{ش}}{\text{س}} = \text{ق} \text{ ، لأن ن = دس / دن} \qquad (٢ ـ ٩٠)$$

وهذه المعادلة خطية فيكون

$$\text{ش (ن)} = e^{-\text{ن/س و}} \left[\frac{١}{\text{و}} \int \text{ق (ن)}\, e^{\text{ن/س و}}\, \text{د ن} + \text{حـ} \right] \qquad (٢ ـ ٩١)$$

فاذا كانت ق ثابتة ينتج:

$$\text{ش (ن)} = \text{ق س} + [\text{ش (٠)} - \text{ق س}]\, e^{-\text{ن/س و}} \qquad (٢ ـ ٩٢)$$

المثال ٢ ـ ٨ ـ ٣ اذا وصلنا مقاومة مقدارها ٢٠٠٠ أوم ومواسعة مقدارها ٥ × ١٠$^{-٦}$ فاراد (فد)، على التوالي بقوة ١٠٠ فولت. فكم يكون التيار بعد ٠,١ ثانية علماً بان ت (٠) = ٠,٠١ أمبير؟

في المعادلة (٢ ـ ٩٢) نضع و = ٢٠٠٠ ، س = ٥ × ١٠$^{-٦}$ ، ق = ١٠٠ فتكون الشحنة في اللحظة ن، بدلالة الشحنة عند ن = ٠، كما يلي:

$$\text{ش (ن)} = ٥ \times ١٠^{-٤} + [\text{ش (٠)} - ٥ \times ١٠^{-٤}]\, e^{-١٠٠\text{ن}} \qquad (٢ ـ ٩٣)$$

ولأن ت = دش / دن ، نجد ان

$$\text{ت (ن)} = (-١٠٠)\, [\text{ش (٠)} - ٥ \times ١٠^{-٤}]\, e^{-١٠٠\text{ن}}$$

نجعل ن = ٠، فينتج ش (٠) = ٤ × ١٠$^{-٤}$ كولوم، ويكون:

ت (٠,١) = ١٠$^{-٢}$ e$^{-١٠}$ أمبير .

التمارين ٢ ـ ٨

١ . حل مسألة المثال ٢ ـ ٨ ـ ٣ على اعتبار ان ق د ك هي ١٠٠ جا ١٢٠ π ن فولت .

٢ . وصلنا حثاً مقداره هنري واحد ومقاومة مقدارها ٢ أوم على التوالي ببطارية قوتها ٦e$^{-٠,٠٠٠١ ن}$ فولت . وفي البــدء لم يكن يجري اي تيــار . فمتى يصبــح التيــار ٠,٥ أمبير .

٣ . وصلنا مقاومة متغيرة مقدارها و = ١ / (٥ + ن) أوم مع مواسعة مقدارها ٥ × ١٠$^{-٦}$ فاراد على التوالي بقوة ق د ك تساوي ١٠٠ فولت . فاذا كان ش (٠) = ٠ فكم تكون الشحنة على المواسعة بعد دقيقة؟

٤ . في دائرة المقاومة والمواسعة (في الشكل ٢ ـ ٦ ب) حيث الفولتية ق ثابتة، كم يستغرق التيار قبل أن يخفض الى نصف قيمته الأصلية ؟

٥ . اذا كانت الفولتية في دائرة مقاومة ومواسعة هي ق (ن) = ق. جتا W ن حيث ٢π / W هي فترة الدائرة وكانت الشحنة الابتدائية صفراً ، فأوجد الشحنة والتيار بدلالة و ، س ، W ، ن .

٦ . بيِّن ان التيــار في التمـرين ٥ يتكـون من جزأين ، واحد ثابت الحالة له فترة مقدارها ٢π / W ، وواحد زائل يقارب الصفر بمرور الزمن .

٧ . في التمرين ٦ ، بيِّن انه اذا كانت و صغيرة فان الحد الزائل قد يكون كبيراً رغم أن قيم ن صغيرة (لهذا قد تحترق الفاصلة الكهربائية اذا نقر احد مفاتيح الدورة) .

٨ . اوجد التيار الثابت الحالة اذا علم ان مقاومة ٢٠٠٠ أوم وسعة ٣ × ١٠$^{-٦}$ فاراد قد وصلتا على التوالي بقوة دافعة تبادلية مقدارها ١٢٠ جتا ٢ن فولت .

٢ ـ ٩ منحنيات المطاردة*

تنشأ معادلات تفاضلية مجتمعة عند دراسة المسارات التي تتبعها القناصة في مطاردة فريستها وفي الصفحات التالية اقدم المسائل من هذا القبيل .

المثال ٢ ـ ٩ ـ ١ ك حجر ثقيل موضوع في النقطة (أ ، ٠) (أنظر الشكل ٢ ـ ٧) ، ل رجل كان واقفاً عند نقطة الأصل م فاذا امسك الرجل بطرف سلسلة طولها أ ربط طرفها الآخر بالحجر ك ، ثم مشى على محور ص ، فما المسار الذي يسلكه الحجر . ك . وهو يزحف وراء الرجل ؟

لنسمي هذا المسار بالمجرورة tractrix اذكر ان الخط ك ل يمس هذا المسار فميله $\frac{د ص}{د س}$. يعطى بالمعادلة

$$\frac{د ص}{د س} = - \frac{\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{س} \qquad (٢ - ٩٤)$$

وذلك لأن ك ب = أ .

*هناك بحث ممتع عن هذا الموضوع في المجلة
، Scripta Mathematica, vol. 23 (1957), P P 49 - 66
في مقالة باسم Curves of pursuit ii بقلم A. Bernhart

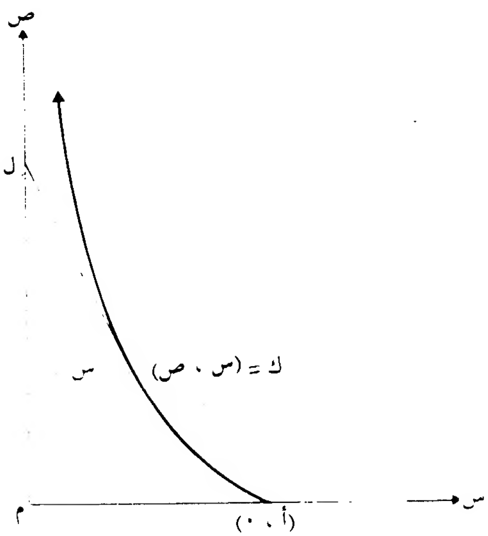
تكامل طرفي (٢ ـ ٩٤) باستعمال القانون ١٦ في الملحق ١، فيكون

$$ص = - \int \frac{\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}{س} د س + حـ$$

$$= أ لي \left(\frac{أ + \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}{س} \right) - \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}} + حـ \quad .... \quad (٢ ـ ٩٥)$$

ولأن ص = ٠ عند س = أ، ينتج ان حـ = ٠ ولذا يكون مسار المجرورة

$$ص = أ لي \left(\frac{أ + \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}{س} \right) - \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}} .$$



الشكل ٢ ـ ٧

المثال ٢ ـ ٩ ـ ٢ ك صقر عند النقطة (أ ، ٠)، شاهد الحمامة ل عند نقطة الأصل

تطير على طول محور ص بسرعة ع ، فطار باتجاه الحمامة بسرعة غ فما مسار الصقر ؟

لنقل ان ن = ٠ عندما طار الصقر باتجاه الحمامة . فبعد ن ثوان تكون الحمامة في النقطة ل = (٠ ، ع ن) ويكون الصقر في النقطة ك = (س ، ص) والخط ك ل مماس للمسار المطلوب (انظر الشكل ٢ ـ ٧) وميله

$$\text{صَ} = \frac{\text{ص} - \text{ع ن}}{\text{س}}$$ ، فيكون :

$$\text{س صَ} - \text{ص} = -\text{ع ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ ـ ٩٦)$$

وكذلك فان طول المسافة التي قطعها الصقر هي ، باستعمال قاعدة طول القوس ، ق

$$\text{غ ن} = \int \text{د ق} = \int \sqrt{1 + (\text{صَ})^{2}}\ \text{د س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ ـ ٩٧)$$

تحل المعادلتين (٢ ـ ٩٦) ، (٢ ـ ٩٧) لأيجاد ن في كل منهما، ثم نعادل الناتجين فيكون

$$\frac{\text{ص} - \text{س صَ}}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{غ}} \int \sqrt{1 + (\text{صَ})^{2}}\ \text{دس} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ ـ ٩٨)$$

نفاضل الطرفين في (٢ ـ ٩٨) بالنسبة الى س ، فينتج :

$$\text{س صً} = \frac{\text{ع}}{\text{غ}} \sqrt{1 + (\text{صَ})^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ ـ ٩٩)$$

نجعل صَ = ف فتتحول المعادلة (٢ ـ ٩٩) الى :

$$\text{س ف} = \frac{\text{ع}}{\text{غ}} \sqrt{١ + \text{ف}^{٢}} \text{ ،}$$

فنفصل المتغيرين وينتج

$$\frac{\text{د ف}}{\sqrt{١ + \text{ف}^{٢}}} = \frac{\text{ع}}{\text{غ}} \; \frac{\text{د س}}{\text{س}} .$$

وبمكاملة الطرفين (انظر القانون ٩ في الملحق ١)، ينتج :

$$\text{لي} \left(\text{ف} + \sqrt{١ + \text{ف}^{٢}}\right) = \frac{\text{ع}}{\text{غ}} \text{ لي س} - \text{حـ} . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١٠٠)$$

ولأن ف = ص̀ = ٠ عند س = أ (ميل لكل ، عند ن = ٠ ، صفر)، ينتج ان حـ = $\frac{\text{ع}}{\text{غ}}$ لي أ . فنرفع الطرفين وينتج

$$\text{ف} + \sqrt{١ + \text{ف}^{٢}} = \left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ع}/\text{غ}} \text{ ،}$$

وبعد المعالجة الجبرية ينتج :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ف} = \frac{١}{٢} \left[\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ع}/\text{غ}} - \left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{-\text{ع}/\text{غ}} \right] . \qquad \ldots \quad (٢ - ١٠١)$$

فاذا فرضنا ان الصقر أسرع من الحمامة (اي ان غ > ع)، يمكن ان نكامل (٢ ـ ١٠١)

وينتج :

$$ص = \frac{أ}{٢}\left[\frac{(س/أ)^{١+ع/غ}}{١ + ع/غ} - \frac{(س/أ)^{١-ع/غ}}{١ - ع/غ} + حـ\right] \quad \ldots \quad (٢ـ١٠٢)$$

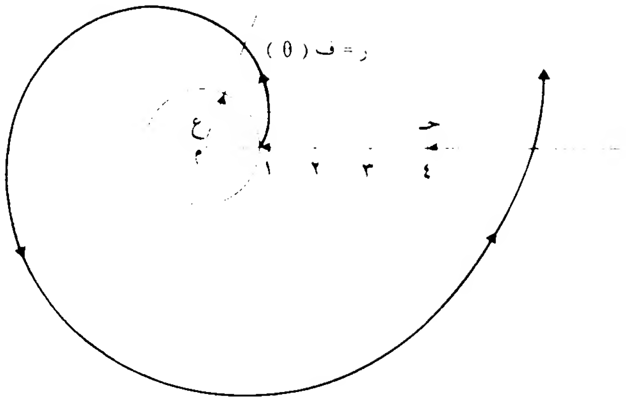
ولأن ص = ٠ عند س = أ ، ينتج :

$$حـ = -\frac{أ}{٢}\left[\frac{١}{١ + ع/غ} - \frac{١}{١ - ع/غ}\right] = \frac{أ ع غ}{غ^{٢} - ع^{٢}}$$

والصقر يدرك الحمامة عند س = ٠، ص = حـ = أ ع غ / ($غ^{٢}$ − $ع^{٢}$). وفي التمرينين ١ ، ٢ ندرس الحالة عندما تكون سرعة الصقر لا تزيد عن سرعة الحمامة (غ ⩾ ع).

المثـال ٢ ـ ٩ ـ ٣ وقفت مدمـرة في وسـط ضبـاب كثيف . وانقشـع الضبـاب للحظـة ، واكتشفت المـدمـرة غواصـة معـادية على بعد ٤ أميال عنها . فعلى فرض ان الغواصة غاصت على الفور ومضت بأقصى سرعتها في اتجاه مجهول ، فبأي مسار تسير المدمرة لتضمن مرورهـا من فوق الغـواصـة ، اذا كانت سرعتهـا ع ثلاثـة أمثـال سرعـة الغواصة ؟

نفـرض ان المـدمـرة سارت ثلاثة اميال باتجاه الموضع الذي كانت الغواصة فيه ، فعندها تكون الغواصة على محيط دائرة مركزها ذلك الموضع ونصف قطرها ميل واحد ، (انظر الشكل ٢ ـ ٨) وذلك لأن سرعتها ثلث سرعة المدمرة ولأن موضع الغواصة يسهل تعيينـه بالإحـداثيـات القطبيـة ، فسنلجأ الى هذه الاحـداثيـات ونكتب ر = ق (θ) ونفرض ان هذا هو المسار الذي تسلكه المدمرة لتضمن مرورها من فوق الغواصة ، مهما كان الاتجـاه الـذي تسـير فيه الغواصة • فالمسافة التي تقطعها الغواصة حتى تصل الى نقطـة الألتقـاء هور − ١ في حين ان المسـافة التي تقطعها المدمرة ، وهي ثلاثة امثال



الشكل ٣ ـ ٨

ذلك ، هي قوس منحنى ، نجد طول القوس في الاحداثيات القطبية . فيكون

$$٣\,(ر - ١) = \int^{\theta} دق = \int^{\theta} \sqrt{(د\,ر)^{٢} - (ر\,د\,\theta)^{٢}}$$

$$= \int^{\theta} \sqrt{(د\,ر/د\,\theta)^{٢} + ر^{٢}}\;د\,\theta \quad ...... \quad (٢ـ ١٠٣)$$

فنفاضل الطرفين بالنسبة الى θ ، ونحصل على المعادلة التفاضلية

$$٣\,رَ = \sqrt{(رَ)^{٢} + ر^{٢}} \text{ ،}$$

وهذه تختصر الى ٨ $(رَ)^{٢} = ر^{٢}$. فنأخذ الجذر التربيعي للطرفين . ونفصل المتغيرين ، فينتج :

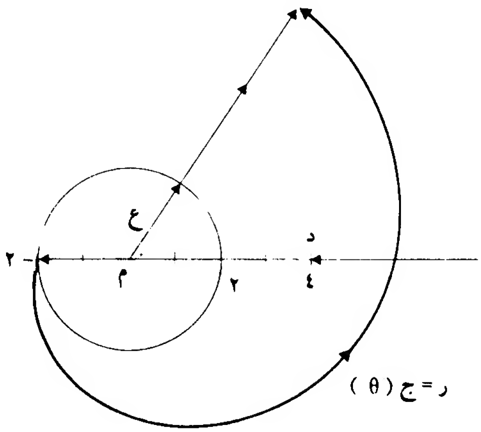
$$\frac{د\,ر}{ر} = \frac{د\,\theta}{\sqrt{٨}} \text{ ،}$$

ومن ذلك ينتج ان لي ر = $\theta / \sqrt{8}$ + حـ أي ان

ر = حـ $e^{\theta/\sqrt{8}}$ .... (٢ ـ ١٠٤)

ولأن ر = ١ عند θ = ٠، ينتج ان حـ = ١ . فالمسار الذي تسلكه المدمرة هو المسار اللولبي ر = $e^{\theta/\sqrt{8}}$ ، وذلك بعد قطع ٣ أميال نحو الموقع الأول للغواصة.

ويلاحظ ان هذا ليس هو المسار الوحيد للمدمرة. فمثلا قد نجعل المدمرة تقطع ٦ اميال في اتجاه الغواصة (انظر الشكل ٢ ـ ٩).



شكل ٢ ـ ٩

فهنا تسلك المدمرة مساراً هو ر = ج (θ) . ولأن الغواصة تكون في هذه الحالة قد قطعت ميلين عن نقطة الأصل، تكون المسافة التي ستقطعها حتى تصل الى نقطة الألتقاء هي ر − ٢، في حين تقطع المدمرة

٣ (ر − ٢) = $\int_{-\pi}^{\theta} \sqrt{(\text{د ر}/\text{د}\,\theta)^2 + \text{ر}^2}\;\text{د}\,\theta$ .... (٢ ـ ١٠٥)

فالمعادلة (٢ ـ ١٠٥) تفضي الى الحل العام (٢ ـ ١٠٤). ولكن هنا ر = ٢ عندما $\theta = -\pi$ فيكون حـ = $٢ e^{\pi/\sqrt{8}}$

فالمسار اللولبي الذي تسلكه المدمرة هو

$$ر = ٢ e^{(\theta - \pi)/\sqrt{8}}$$

وبالطبع يستطيع قائد الغواصة ان يتحاشى إكتشاف أمره بالتباطؤ او بالسير في مسار منحن.

التمارين ٢ ـ ٩

١. في المثال ٢ ـ ٩ ـ ٢ افرض ان ع = غ واثبت ان

$$ص = \frac{أ}{٢} \left\{ \frac{١}{٢} \left[\left(\frac{س}{أ}\right)^{٢} - ١ \right] - لو \frac{س}{أ} \right\}$$

وهكذا فلن يلحق الصقر الحمامة. وباستعمال (٢ ـ ٩٧)، (٢ ـ ١٠١) بيِّن انه عندما يكون الصقر في (س ، ص) تكون المسافة بين الصقر والحمامة هي $(س^{٢} + أ^{٢})/٢أ$.
وهكذا فلن يكون الصقر أقرب الى الحمامة من أ/٢ .

٢. اثبت ان ع > غ (في المثال ٢ ـ ٩ ـ ٢) ثم اثبت ان:

$$ص = \frac{أ}{٢} \left[\frac{(س/أ)^{١ + ع/غ} - ١}{١ + ع/غ} + \frac{(أ/س)^{ع/غ - ١} - ١}{(ع/غ) - ١} \right]$$

وهكذا فالصقر لن يلحق بالحمامة. أوجد بدلالة س المسافة بين الصقر والحمامة.

٣. اذا كان محور ص والخط س = ب ضفتي نهر يجري بسرعة ع (باتجاه ص

السـالب)، ووقف رجـل عنـد نقطـة الأصل ووقف كلبه عند النقطة (ب ، ٠). ثم نادى الرجل كلبه فخاض الكلب في النهر يسبح باتجاه صاحبه بسرعة ثابتة غ (> ع). فماذا يكون مسار الكلب ؟

٤ . اين يصل الكلب في التمرين ٣ الى البر اذا كان ع = غ ؟

٥ . بين ان الكلب في التمرين ٣ لن يصل الى البر اذا كان غ < ع .

افرض ان الرجل اخذ يمشي باتجاه سير النهر في اللحظة التي نادى فيها كلبه، وبسرعة ع فهل يستطيع الكلب الآن ان يصل الى البر ؟

٦ . في المثال ٢ ـ ٩ ـ ٣ إفرض ان المدمرة اتجهت نحو النقطة التي كانت فيها الغواصة، ثم دارت ٩٠° الى اليسار وقطعت ميلين قبل أن تبدأ سيرها اللولبي، فما معادلة المسار الذي يجب ان تسلكه الآن ؟

٧ . افـرض ان المـدمـرة في المثال ٢ ـ ٩ ـ ٣ تسير بمثلي سـرعة الغواصة وان الغواصة اكتشفت عنـدمـا كانت على بعـد ٣ اميـال عن المـدمرة. أوجد مساراً يضمن أن تمر المدمرة فوق الغواصة على فرض انهما يسيران على نفس المبدأ المبين بالمثال المذكور.

٨ . ثلاث زواحف على اركان مثلث متساوي الاضلاع ضلعه أ، بدأت تتحرك بسرعة واحـدة، كل نحـو التي الى يمينهـا . إجعل مركز المثلث عند نقطة الأصل واحد رؤوسه على محور س الموجب. أوجد مسار الزاحفة التي بدأت من محور س.

٩ . حل هذا التمرين اذا كانت الزواحف اربعاً على رؤوس مربع [٠، أ] × [٠، أ]. كم تقطع الزواحف قبل ان تلتقي ؟

٢ ـ ١٠ التحليل : الحجرات (compartments)

كثيراً ما تكون العملية الفيزيائية او البيولوجية من التعقيد بحيث تقسم الى عدة مراحل متميزة وعندها يمكن ان توصف العملية كلها عن طريق وصف التداخل بين هذه المراحل. فكل مرحلة من هذه المراحل نسميها **حجرة** ، ومحتويات كل حجرة تعتبر ممتزجة تمام الامتزاج. فاذا انتقل شيء من حجرة الى أخرى يستوعب فيها فوراً. وعلى هذا نسمي العملية كلها **منظومة حجرات** . فالمنظومة المفتوحة هي التي يمكن ان تعطي أو تأخذ عن طريق واحدة أو اكثر من الحجرات . فان لم يتوافر ذلك تعد المنظومة مغلقة .

وفي هذا البند ندرس أبسط هذه المنظومات وهي منظومة الحجرة الواحدة . اما المنظومات الأكثر تعقيداً فنجد شيئاً عنها في الفصول القادمة .

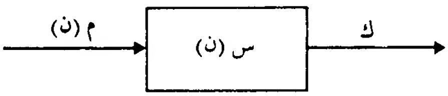
والشكل (٢ ـ ١٠) يمثل منظومة ذات حجرة واحدة تحتوي على كمية س (ن) من المادة . وهنالك وارد يرد اليها بسرعة م (ن) . اما ك فهو معامل تحويل كسري يبين الجزء من المادة الذي يصدر عنها في وحدة الزمن . ومن الواضح ان السرعة التي بها تتغير الكمية س تعتمد على الفرق بين الوارد والصادر في اي لحظة ن وهذا يفضي الى المعادلة التفاضلية

$$\frac{د\, س}{د\, ن} = ع\,(ن) - ك\, س\,(ن) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ ـ ١٠٦)$$

وكما رأينا في البند (٢ ـ ٣) فان حل هذه المعادلة هو

$$س\,(ن) = e^{-ك\,ن}\,[\int ع\,(ن)\, e^{ك\,ن}\, د\,ن + حـ] \quad \ldots\ldots \quad (٢ ـ ١٠٧)$$

وهذا النموذج البسيط ينطبق على كثير من المسائل كما سنرى .



(الشكل ٢ ـ ١٠)

المثال ٢ ـ ١٠ ـ ١ نصف عمر مادة السترنتيوم (Sr90) 90 خمسة وعشرون سنة. فاذا وضعنا ١٠ غرامات من هذه المادة في وعاء مختوم، فكم غراماً يبقى منها بعد عشر سنوات ؟

ليكن س (ن) عدد غرامات المادة في السنة ن. فلأن عدد الذرات كبير جداً فان العدد الذي يتلاشى في وحدة الزمن يتناسب مع العدد في ذلك الزمن. وثابت التناسب ك هو معامل التحول الكسري. ولأنه ليس هنالك وارد ، تصبح المعادلة

$$\frac{د\,س}{د\,ن} = -ك\,س\,(ن) \qquad (٢ - ١٠٨)$$

وحل هذه المعادلة هو $س\,(ن) = س_{٠}\,e^{-ك\,ن}$ ، حيث $س_{٠} = ١٠$ غرامات. فلايجاد ك نضع ن = ٢٥ فينتج :

$$٥ = ١٠\,e^{-٢٥ك}$$

ومن ذلك ينتج بعد أخذ اللوغرتمات ان ك = (لي ٢)/٢٥ ، فيكون

$$س\,(١٠) = ١٠\,e^{-(١٠\ لي\ ٢)/٢٥} = ١٠\,(٢)^{-٢/٥} \approx ٧,٥٧٨\ غ$$

المثال ٢ ـ ١٠ ـ ٢ صهريج فيه ١٠٠ غالون من الماء اذيب فيها ٥٠ باوند من الملح. ويصب في الصهريج في كل دقيقة ٢ غالون من محلول يحتوي الغالون منه على باوند واحد من الملح، فيمتزج المحلول بماء الصهريج في الحال نظراً لتحريكها بسرعة كبيرة،

ويخرج المزيج من الصهريج بسرعة ٢ غالون في الدقيقة. أوجد كمية الملح في الصهريج في أي لحظة ن.

لتكن س (ن) هي كمية الملح في الباوند بعد ن دقائق. فلأن كل غالون من المحلول ينصب في الصهريج يحتوي على باوند واحد من الملح، يكون ع (ن) = ٢.

ومن ناحية اخرى: ك = $\frac{٢}{١٠٠}$ لأن ٢ غالون من مئة تخرج كل دقيقة. فتكون المعادلة (٢-١٠٦) كما يلي:

$$\frac{د س}{د ن} = ٢ - \frac{٢}{١٠٠} س ،$$

وحلها

$$س (ن) = e^{-ن/٥٠} [٢ \int e^{ن/٥٠} د ن + حـ].$$

$$= ١٠٠ + حـ e^{-ن/٥٠} .$$

فعند ن = ٠ يكون ٥٠ = س (٠) = ١٠٠ + حـ،

فيكون

$$س (ن) = ١٠٠ - ٥٠ e^{-ن/٥٠} .$$

لاحظ أن س تتزايد مع الزمن وتقارب نسبة الملح الى الماء في المحلول الذي يصب في الصهريج.

والمعامل الكسري ك قد يكون متغيراً كما سنرى فى المثال التالي.

المثال ٢ ـ ١٠ ـ ٣ في المثال ٢ ـ ١٠ ـ ٢، افرض ان ٣ غالون من المحلول يحتوي كل منها على باوند واحد من الملح في الصهريج كل دقيقة وان كل عناصر المسألة الأخرى بقيت على حالها. فهنا م (ن) = ٣، ولأن كمية الملح في الصهريج تتزايد مع الوقت فاجزء

الجزء الذي يحول هوك = ٢/(١٠٠ + ن). بسط هذ الكسر هوعدد الغالونات التي تخرج.والمقام (١٠٠ + ن) هوعدد الغالونات في الصهريج في الزمن ك. والمعادلة التي تصف هذه المنظومة هي:

$$\frac{د س}{د ن} = ٣ - \frac{٢ س}{١٠٠ + ن} \quad \text{.......................} \quad (٢ - ١٠٩)$$

وباستخدام المعادلة (٢ ـ ١٠٧) نجد ان حل (٢ ـ ١٠٩) هو:

$$س (ن) = سا (- \int \frac{٢ د ن}{١٠٠ + ن}) [٣ \int سا (\int \frac{٢ د ن}{١٠٠ + ن}) د ن + حـ]$$

$$= (١٠٠ + ن) + حـ (١٠٠ + ن)^{-٢} .$$

فنضع ن = ٠ ، ونجد أن حـ = − ٥٠ $(١٠٠)^{٢}$ ، فيكون:

$$س (ن) = ١٠٠ + ن - ٥٠ (١ + ن/١٠٠)^{-٢} .$$

وبعد ١٠٠ دقيقة يكون س (١٠٠) = ٢٠٠ − ٥٠/٤ = ١٨٧,٥ باوند

من الملح في الصهريج.

وقد يعتمد الوارد م (ن) على الكمية الموجودة بالاضافة الى اعتماده على الزمن. ففي المثالين ١ ـ ١ ـ ٣ ، ١ ـ ١ ـ ٤ يعتمد الوارد على الكمية المتوافرة. وفي المثال ١ ـ ١ ـ ٤ يعتمد معامل التحويل الكسري ايضا على الكمية المتوافرة، ففيه ك = ὃ ع.

وفي العمليات البيولوجية نقابل منظومات فيها الوارد معاملات التحويل الكسرية دورية نظراً لناهية نشاطها. فمثلا افراز الغدد النخامية الأمامية لهرمون

(AC TH) المنشط لقشرة الغدة الكظرية يمضي في دورة مدتها اربع وعشرون ساعة فيها حـ تجرف افرازات الادرينالين على نحو يجعل مستواها في بلازما الدم أعلى ما يمكن حوالي الساعة ٨ صباحاً واقل ما يمكن حوالي ٨ مساء.

المثال ٢ ـ ١٠ ـ ٤ في ٢ ـ ١٠٦ ليكن ك (ن) = أ + ب جا W ن ، حيث أ > ب. فهذا يفضي الى المعادلة

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{م (ن)} - (\text{أ} + \text{ب جا } W \text{ ن}) \text{ س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢ - ١١٠)$$

$$\text{فلأن} \int (\text{أ} + \text{ب جا } W \text{ ن}) \text{ د ن} = \text{أ ن} - \frac{\text{ب}}{W} \text{جتا } W \text{ ن} + \text{حـ} ،$$

يمكن ان نضرب عامل التكامل سا [أ ن + (ب/W) (١ − جتا W ن] في طرفي (٢ ـ ١١٠) فينتج:

$$\frac{\text{د}}{\text{د ن}} \left(e^{\text{أ ن} + (\text{ب}/W)(١ - \text{جتا } W \text{ ن})} \text{ س (ن)}\right) =$$

$$e^{\text{أ ن} + (\text{ب}/W)(١ - \text{جتا } W \text{ ن})} [\text{سَ} + (\text{أ} + \text{ب جا } W \text{ ن}) \text{ س}]$$

$$= e^{\text{أ ن} + (\text{ب}/W)(١ - \text{جتا } W \text{ ن})} \text{ م (ن)} \quad \ldots \quad (٢ - ١١١)$$

فنكامل طرفي (٢ ـ ١١١) من ٠ الى ن فينتج:

$$e^{\text{أ ن} + (\text{ب}/W)(١ - \text{جتا } W \text{ ن})} \text{ س (ن)} \Big| = \int \text{م (ن)} \, e^{\text{أ مـ} + (\text{ب}/W)(١ - \text{جتا } W \text{ ن})} \text{ د ن}$$

اي أن

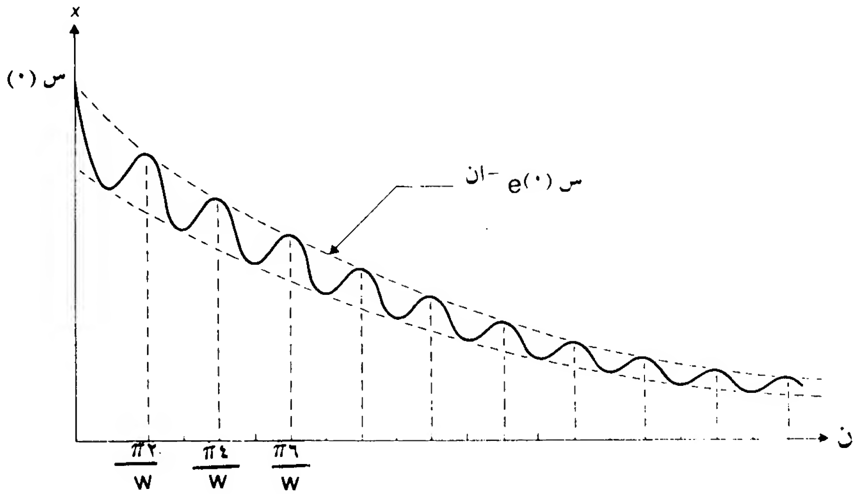
$$س(ن) = e^{-أن - (ب/W)(1 - جتا\, W ن)} \Big[س(0)$$

$$+ \int م(ن)\, e^{أن + (ب/W)(1 - جتا\, W ن)}\, دن \Big] \quad ....\quad (٢ - ١١٢)$$

ولأن $1 - جتا\, W ن = 2\, جا^2 (W ن/2)$ نكتب (٢ - ١١٢) بالصيغة:

$$س(ن) = e^{-أن - 2ب\, جا^2(W ن/2)/W} \Big[س(0)$$

$$+ \int م(ن)\, e^{أن + 2ب\, جا^2(W ن/2)/W}\, دن \Big] \quad ......\quad (٢ - ١١٣)$$



(الشكل ٢ - ١١)

فاذا كان م (ن) = ٠ ، فان س (ن) يسلك المسلك المبين بالشكل (٢ - ١١)، حيث $س(0)\, e^{-أن}$ هي حاصرة عليا والعامل سا $[-2ب\, جا^2 (W ن/2)/W]$ يتراوح بين سا $(-2ب/W)$ والواحد.

التمارين ٢ - ١٠

١ . للكربون C^{14} نصف عمر مقداره ٥٧٠٠ سنة وهو ينتشر في الجو بانتظام

على شكـل ثاني اكسيـد الكـربون. فالنباتات الحية تمتص ثاني اكسيد الكربون وتحافظ على نسبة معينة من (C^{14}) بالنسبة الى العنصر الثابت (C^{12}) . فاذا ماتت يتحلل (C^{14}) فتختـل هذه النسبـة. قارن بين تركيـز (C^{14}) في قطعتين متماثلتين من الخشب، احداهما قطعت حديثاً والأخرى عمرها ٢٠٠٠ سنة.

٢. كثـيراً ما يستعمـل اليـود المشـع I^{131} في الطب للكشف. افرض ان جرعة معينة $ج_٠$ منه قد حقنت في مجرى الدم في اللحظة ن = ٠ وانها قد انتشرت بانتظام في الدم قبل أن تحدث أي خسـارة فإذا كانت نسبـة ما يفـرز يومياً من اليـود عن طريق الكلية $ر_١$ في المئة، وعن طريق الغدة الدرقية $ر_٢$ في المئة، فأي نسبة من الجرعة الأصلية تبقى في الدم بعد يوم واحد.

٣. افرض ان شخصاً مصاباً جاء الى مجتمع عدد افراده ع، كلهم معرضون للاصابة. فاذا اعتـبرنـا ان سرعـة العـدوى تتنـاسب مع حاصـل ضرب عدد المصـابـين في عدد المعرضين للأصابة من الموجودين فكم يكون عدد المصابين في اي لحظة ن؟ لتكن نسبة الأصابة النوعية ك.

٤. صهريج كان في البدء يحتوي على ١٠٠ لتر من الماء النقي. ولكن اخذ ينصب فيه محلول بسرعة ٤ لترات في الدقيقة، وكان المحلول يحتوي على ٢٠ غم من الملح في كل لتر، وكـان المـزيـج يختلط فوراً بسبب الـرَّج المتواصل. فاذا كان الصهريج يتسرب منه المـزيـج بنفس السـرعـة التي يدخل بها المحلول، فمتى تصبح كمية الملح في الصهريج كيلوغراماً واحداً؟

٥. في التمـريـن ٤ كم يمضي من الـزمن حتى ترتفـع كميـة الملح في الصهـريـج من كيلوغرام واحد الى كيلوغرام ونصف؟

٦. صهـريـح فيـه ١٠٠ غالـون من الماء الصافي، أخذ يجري فيه محلول يحتوي على ٢

باونـد من الملح في كل غالـون، بسـرعـة ٤ غالـون في الدقيقة. وكان المزيج ينتظم فوراً بالرَّج. فاذا كان المزيج ينصب من الصهريج بسرعة ٥ غالون في الدقيقة، فأوجد:

أ) كمية الملح في الصهريج عندما يبلغ ما فيه ١٢٠ غالون.

ب) مقدار تركيز الملح في الصهريج بعد ٢٠ دقيقة.

٧. صهريج فيه ٥٠ لتراً من الماء، يجري فيه بسرعة ١,٥ لتر في الدقيقة محلول فيه س غرامات من الملح في كل لتر، فيرج المزيج وينتظم ويجري من الصهريج بسرعة لتر واحد في الدقيقة. فاذا صارت نسبة الملح في الصهريج بعد ٢٠ دقيقة ٢٠ غراماً لكل لتر فما قيمة س ؟

٨. صهريج فيه ٥٠٠ غالون من المحلول، أخذ ينصب فيه بسرعة ٥ غالون في الدقيقة محلول آخر نسبة الملح فيه ٢ باوند لكل غالون، فيتوزع الخليط بانتظام، وينسكب من الصهـريـج بسـرعة ١٠ غالون في الدقيقة. فاذا كان الملح يصل الى قيمته القصوى في الصهريج بعد ٢٠ دقيقة فكم كانت كمية الملح فيه في البدء ؟

٩. افـراز الفـوسفـات يبلغ ادنى مستـوى له عنـد السـادسة صباحاً ويصل الى اعلى مستوى عند السادسة مساء. فاذا كانت سرعة الافراز

$$\frac{١}{٦} + \frac{١}{٣} \text{ جتا } \frac{\pi}{٢} (ن - ٦)$$

غرامـات في اللحظـة ن (٠ ≤ ن ≤ ٢٤) وكـان الجسم يحتـوي على ٤٠٠ غرام من الفوسفات. فكم تكون نسبة الفوسفات في جسم مريض في الزمن ن علماً بان هذا المريض لا يشرب الا الماء.

١٠. في التمـرين ٩ اذا سمـح للمريض بتناول ثلاث وجبات يومياً بحيث يأخذ جسمه الفوسفات بالسرعة ع (ن) على النحو التالي:

$$ع(ن) = \begin{cases} \frac{١}{٣} \text{ غ/الساعة ، } ٨ \leqslant ن \leqslant ١٦ \\ ٠ \text{ غ/الساعة ، فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد قانوناً يبين كمية الفوسفات في جسم المريض في الزمن ن. حتى يبلغ اقصى حد له ؟

١١ . لدينا منظومة ذات حجرة واحدة فيها ك ثابت،

م (ن) = أ + ب جا W ن، أ > ب.

أوجد حلا لهذه المنظومة. كيف تختلف هذه المنظومة عن منظومة فيها الوارد ثابت ومعامل التحويل الكسري دوري ؟ [انظر المعادلة (٢ ـ ١١٣)].

الفصل الثالث

معادلات الرتبة الثانية
الخطية التفاضلية

٣ ـ ١ مقدمة

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية هي

ق (س ، ص ، صَ ، صً) = ٠

فهذه معادلة تحتوي على س ، ص ، صَ ، صً. وليست لدينا طريقة عامة لحل كل معادلة لاعلى التعيين، من هذا القبيل، حلا صريحاً، والواقع ان كثيراً من هذه المعادلات لا حل لها. وفي هذا الفصل ندرس صنفاً من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية لها دائماً حل وحيد، ونطرح طرقاً لايجاد حلولها.

ولنذكر إن المعادلة التفاضلية تكون خطية اذا كانت لا تحتوي على دوالّ غير خطية (كالمربعة والأُسية الخ) اوعلى ضرب للدوالّ المجهولة او مشتقاتها. بعضها

ببعض فمثلا :

$\text{صً} + (\text{س}^{٣}\ \text{جاس})^{٢}\ \text{صَ} + \text{ص} = \text{جاس}^{٣}$ خطية، في حين ان

$\text{صً} + (\text{صَ})^{٢} + \text{ص} = ٠$ غير خطية.

والصيغة العامة للمعادلة الخطية ذات الرتبة الثانية هي

$$\text{صً (س)} + \text{أ (س) صَ (س)} + \text{ب (س) ص (س)} = \text{ق (س)} \quad . \quad . \quad (٣ - ١)$$

والنظرية التالية يرد برهانها في البند (١١ ـ ٢) من الطبعة المطولة لهذا الكتاب.

النظرية ٣ ـ ١ اذا كانت أ (س) ، ب (س) ، ق (س) متصلة على الفترة المغلقة $[\text{س}_{٠}\ ،\ \text{س}_{١}]$، واعطينا الثابتين $\text{حـ}_{٠}$ ، $\text{حـ}_{١}$، فهناك اقتران وحيد ص (س) متصل وقابل للاشتقاق مرتين ويحقق المعادلة (٣ ـ ١)، وفيه

$\text{ص (س}_{٠}) = \text{جـ}_{٠}$ ، $\text{صَ (س}_{٠}) = \text{حـ}_{١}$.

تنص النظرية انه اذا كانت أ ، ب ، ق متصلة فان لمسألة القيمة الابتدائية حلا وحيداً.

ولكن في بعض التطبيقات الهامة قد لا يتوافر شرط الاتصال. ففي المعادلة

$(\text{س} - ١)\ \text{صً} + \text{س}^{٢}\ \text{صَ} + \text{ص} = ٠$ ، $\text{ص (٠)} = ١$، $\text{صَ (٠)} = ٠$ ،

فان أ (س) ، ب (س) هما على التوالي $\text{س}^{٢}/(\text{س} - ١)$ ، $١/(\text{س} - ١)$ ، وهما ينقطعان عند س = ١ . وهناك حيل معينة لمعالجة هذا النوع من المسائل، سندرسها في لفصل الخامس اما في سائر هذا الفصل فسنعتبر ان الاقترانات أ (س) ، ب (س) ، ق(س) متصلة لجميع قيم س الحقيقية، ما لم ينص على خلاف ذلك.

واذا كان ق (س) يساوي صفراً نقول ان المعادلة (٣ ـ ١) متجانسة؛ والا فهي غير متجانسة واذا كان المعاملان أ (س) ، ب (س) ثابتين، كأن يكون أ (س) = أ، ب(س) = ب، نقول ان المعادلة ثابتة المعاملات. وسنرى ان المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة هي الأسهل حلا.

التمارين ٣ - ١

في كل من التمارين ١ إلى ١٠ أذكر المعادلة خطية أم لا خطية، واذا كانت خطية ، فاذكر متجانسة هي أم غير متجانسة ، وذات معاملات ثابتة أم متغيرة :

١. $\text{ص}'' + ٢\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}' + \text{ص} = ٠$

٢. $\text{ص}'' + ٢\,\text{ص}' + \text{ص}^{٢} = \text{س}$

٣. $\text{ص}'' + ٣\,\text{ص}' + \text{ص}\,\text{ص}' = ٠$

٤. $\text{ص}'' + ٣\,\text{ص}' + ٤\,\text{ص} = ٠$

٥. $\text{ص}'' + ٣\,\text{ص}' + ٤\,\text{ص} = \text{جا}\,\text{س}$

٦. $\text{ص}'' + \text{ص}\,(٢ + ٣\,\text{ص}) = e^{\text{س}}$

٧. $\text{ص}'' + ٤\,\text{س}\,\text{ص}' + ٢\,\text{س}^{٣}\,\text{ص} = e^{٢\text{س}}$

٨. $\text{ص}'' + [\text{جا}\,(\text{س}\,e^{\text{س}})]\,\text{ص}' + ٤\,\text{س}\,\text{ص} = ٠$

٩. $٣\,\text{ص}'' + ١٦\,\text{ص}' + ٢\,\text{ص} = ٠$

١٠. $\text{ص}\,\text{ص}'\,\text{ص}'' = ١$

١١. اذا كان $\text{ص}_{١}$ (س) حلا للمعادلة المتجانسة

$$\text{ص}'' + \text{أ}\,(\text{س})\,\text{ص}' + \text{ب}\,(\text{س})\,\text{ص} = ٠ ،$$

على الفترة $\alpha \leq \text{س} \leq \beta$ ، وكان المنحنى $\text{ص}_{١}$ يمس محور س عند نقطة ما في هذه الفترة، فأثبت أن $\text{ص}_{١}$ يطابق الصفر.

١٢. اذا كان $\text{ص}_{١}$ (س) و $\text{ص}_{٢}$ (س) حلين للمعادلة المتجانسة

$$\text{ص}'' + \text{أ}\,(\text{س})\,\text{ص}' + \text{ب}\,(\text{س})\,\text{ص} = ٠ .$$

على الفترة $\propto \leqslant$ س $\leqslant \beta$ ، وكان $ص_1$ (س.) = $ص_2$ (س.) = ٠ عند نقطة ما $\propto \leqslant$ س. $\leqslant \beta$ ، فبين أن $ص_2$ يساوي $ص_1$ مضروباً في عدد ثابت.

٣ ـ ٢ خصائص حلول المعادلات الخطية

في هذا البند نضع الأسس النظرية لكثير من المواد التي سترد في هذا الفصل. ولنبدأ بتحليل المعادلة المتجانسة

$$ص'' + أ (س) ص' + ب (س) ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٢)$$

وسنعتبر طوال هذا البند أن أ (س) ، ب (س) متصلان، كي تتحقق النظرية ٣ ـ ١ الأساسية عن موجودية الحل ووحدانيته. والتعريفات والمصطلحات التي سنوردها تنطبق على معادلات الرتب العليا، كما تنطبق على معادلة الرتبة الثانية (٣ ـ ٢) التي هي قيد الدراسة. وسنقابل معادلات الرتب العليا في التمارين ٨ إلى ١٤ ،وبشكل أعم في البند ٣ ـ ١٢.

ليكن $ص_1$ ، $ص_2$ أي اقترانين. فالتوفيقة الخطية (Linear combination) لهما نعني بها اقترانا ص (س) يمكن ان يكتب بالصيغة

$$ص (س) = حـ_1 ص_1 (س) + حـ_2 ص_2 (س)$$

حيث $حـ_1$ ، $حـ_2$ ثابتان لاعلى التعيين. ويكون الاقترانان **مستقلين خطياً** (Linearly inedependent) في الفترة [س. ، $س_1$] كلما اقتضت العلاقة $حـ_1 ص_1$ (س) + $حـ_2 ص_2$ (س) = ٠ لكل س في [س. ، $س_1$] ان يكون $حـ_1$ = $حـ_2$ = ٠ والا فهما **مترابطان خطياً** (Linearly dependent) وهناك طريقة أسهل لنتبين ان اقترانين ما $ص_1$ ، $ص_2$ مترابطين : فاذا كان $حـ_1 ص_1$ (س) + $حـ_2 ص_2$ (س) = ٠ (حيث لا يكون $حـ_1$ ، $جـ_2$ كلاهما صفراً). نفرض أن $حـ_1 \neq ٠$

فنقسم هذه العبارة على $ح_1$، فينتج

$$ص_1 (س) + \frac{ح_2}{ح_1} ص_2 (س) = ٠$$

أي أن

$$ص_1 (س) = - \frac{ح_2}{ح_1} ص_2 (س) = ح ص_2 (س).$$

اذن، **يكون الاقترانان مترابطين خطياً على الفترة [$س_٠$ ، $س_1$] اذا وفقط اذا كان احدهما يساوي حاصل ضرب الآخر في عدد ثابت.**

وفكرتا التوفيق والاستقلال الخطي فكرتان مركزيتان في نظرية المعادلات المتجانسة الخطية، كما يتضح من النتائج التالية:

النظرية ٣ ـ ٢ إذا كان $ص_1$ (س) و$ص_2$ (س) أي حلين للمعادلة (٣ ـ ٢) فان أي توفيقة خطية لهما حل آخر للمعادلة

البرهان. ليكن ص (س) = $ح_1$ $ص_1$ (س) + $ح_2$ $ص_2$ (س). فيكون:

$ص'' + أ ص' + ب ص = ح_1 ص''_1 + ح_2 ص''_2 + ح_1 أ ص'_1 + ح_2 أ ص'_2 +$
$ح_1 ب ص_1 + ح_2 ب ص_2$

$= ح_1 (ص''_1 + أ ص'_1 + ب ص_1) + ح_2 (ص''_2 + أ ص'_2 + ب ص_2)$
= ٠ ، لأن $ص_1$ ، $ص_2$ حلان للمعادلة.

ولنفرض ان $ص_1$ ، $ص_2$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة (٣ ـ ٢) فسنبين ان **أي حل آخر لهذه المعادلة يمكن أن يكتب بشكل توفيق خطي للحلين $ص_1$ ، $ص_2$.**
ومعنى هذه الحقيقة الرائعة اننا حالما نجد حلين مستقلين خطياً للمعادلة (٣ ـ ٢)،

نكـون قد وجـدنـا في الـواقـع كل حلولهـا . ولكن قبل اثبات هذا القول سنتعرف على اقتران جديد يفيدنا كثيراً في اعمالنا الحسابية :

اذا كان $ص_1$ (س) ، $ص_2$ (س) أي حلين للمعـادلـة (٣ ـ ٢) فإن رنسكيـة (Wronksian) $ص_1$ ، $ص_2$ ، وسنكتبها ر ($ص_1$ ، $ص_2$) تعَّرف كما يلي :

$$ر(ص_1 ، ص_2)(س) = ص_1(س)\, صَ_2(س) - صَ_1(س)\, ص_2(س) \qquad (٣ - ٣)$$

فاذا فاضلنا (٣ ـ ٣) ، حسب قاعدة مشتقة حاصل الضرب ، ينتج أن :

$$رَ(ص_1 ، ص_2) = ص_1 صً_2 + صَ_1 صَ_2 - صَ_1 صَ_2 - صً_1 ص_2 =$$

$$ص_1 صً_2 - صً_1 ص_2$$

ولأن $ص_1$ ، $ص_2$ حلان للمعادلة ، يكون

$$صً_1 + أ صَ_1 + ب ص_1 = ٠ ، \quad صً_2 + أ صَ_2 + ب ص_2 = ٠$$

نضرب أولى هاتين المعادلتين في $ص_2$ ، والثانية في $ص_1$ ، ونطرح ، فينتج :

$$ص_1 صً_2 - ص_2 صً_1 + أ(ص_1 صَ_2 - ص_2 صَ_1) = ٠ ، \qquad (٣ - ٤)$$

اي ان

$$رَ + أ ر = ٠ \qquad (٣ - ٥)$$

وحسب طرق الفصل السابق نجد ان حل المعادلة (٣ ـ ٥) يمكن أن يكتب هكذا

$$ر(ص_1 ، ص_2) = حـ\, e^{-\int أ(س)\, دس} \qquad (٣ - ٦)$$

حيث حـ ثابت ما .

وتسمى الصيغة (٣ ـ ٦) صيغة آبل Abel's Formula

ولأن العبـارة الأسيـة لا تكـون صفـراً ، نجـد أن ر ($ص_1$ ، $ص_2$) اما ان تكون

صفراً دائماً (وذلك عندما تكون حـ = ٠)، واما الا تكون صفراً (وذلك عندما حـ ≠ ٠)، والنتيجة التالية تبين اهمية هذه الحقيقة :

النتيجة ٣ ـ ٣

يكون الحلان ص$_1$ (س) ، ص$_2$ (س) للمعادلة (٣ ـ ٢) مستقلين خطياً على الفترة [س$_0$ ، س$_1$] اذا وفقط اذا كان ر (ص$_1$ ، ص$_2$) ≠ ٠

البرهان: نبين أولا انه اذا كان ر (ص$_1$ ، ص$_2$) = ٠ كان ص$_1$ ، ص$_2$ مترابطين خطياً فلتكن س$_2$ نقطة في الفترة س$_0$ ≤ س ≤ س$_1$. ولننظر في المنظومة التالية :

حـ$_1$ ص$_1$ (س$_2$) + حـ$_2$ ص$_2$ (س$_2$) = ٠ ،

حـ$_1$ صَ$_1$ (س$_2$) + حـ$_2$ صَ$_2$ (س$_2$) = ٠ . ... (٣ ـ ٧)

فان محددة هذه المنظومة هي

ص$_1$ (س$_2$) صَ$_2$ (س$_2$) − ص$_2$ (س$_2$) صَ$_1$ (س$_2$)

= ر (ص$_1$ ، ص$_2$) (س$_2$) = ٠

فحسب نظرية المحددات (انظر الملحق ٤)، هنالك عددان حـ$_1$ ، حـ$_2$ يحققان المنظومة (٣ ـ ٧) ولا يكونان كلاهما صفراً فليكن ص (س) = حـ$_1$ ص$_1$ (س) + حـ$_2$ ص$_2$ (س). فحسب النظرية ٣ ـ ٢ يكون ص (س) حلا للمعادلة (٣ ـ ٢)، ولأن حـ$_1$ ، حـ$_2$ يحققان (٣ ـ ٧) يكون

ص (س$_2$) = حـ$_1$ ص$_1$ (س$_2$) + حـ$_2$ ص$_2$ (س$_2$) = ٠

صَ (س$_2$) = حـ$_1$ صَ$_1$ (س$_2$) + حـ$_2$ صَ$_2$ (س$_2$) = ٠

واذن فان ص (س) يحل مسألة القيمة الابتدائية :

صً + أ (س) صَ + ب (س) ص = ٠ ، حيث ص (س$_2$) = صَ (س$_2$) = ٠

ولكن هذه المسألة لها حل آخر هو $ص_٣ (س) \equiv ٠$ لكل قيم س في $س_. \leqslant س \leqslant س_١$

وحسب النظرية ٣ ـ ١ فان حل هذه المسألة ذات القيمة الابتدائية وحيد، فبتحتم ان يكون $ص (س) = ص_٣ (س) = ٠$ فيكون

$$ص (س) = حـ_١ ص_١ (س) + حـ_٢ ص_٢ (س) = ٠$$

لكل قيم س ضمن $س_. \leqslant س \leqslant س_١$، وهذا يثبت ان $ص_١$ ، $ص_٢$ متناسبان خطياً.

نفرض الآن ان $ر(ص_١ ، ص_٢) \neq ٠$ ضمن $[س_. ، س_١]$ ونبرهن ان $ص_١$ ، $ص_٢$ مستقلان خطياً. فاذا لم يكونا مستقلين فلا بد أن يكون هنالك ثابت ما حـ حيث $ص_٢ = حـ ص_١$ أو $ص_١ = حـ س_٢$ فلنفرض ان $ص_٢ = حـ ص_١$ فيكون $صَ_٢ = حـ صَ_١$ ويكون

$$ر(ص_١ ، ص_٢) = ص_١ صَ_٢ - صَ_١ ص_٢ = ص_١ (حـ صَ_١) - صَ_١ (حـ ص_١) = ٠$$

ولكن هذا يناقض فرضنا أ ن $ر \neq ٠$ فلا بد ان يكون الحلان $ص_١$ ، $ص_٢$ مستقلين خطياً.

المثال ٣ ـ ٢ ـ ١ خذ المعادلة $سً + س = ٠$ يسهل ان نحقق ان $س_١ =$ جتا ن، $س_٢ =$ جا ن، حلان لها . فالرنسكية

$$ر(س_١ ، س_٢) = \text{جتا ن جتا ن} - \text{جا ن} (- \text{جا ن}) = \text{جتا}^٢ \text{ن} + \text{جا}^٢ \text{ن} = ١$$

فالحلان مستقلان خطياً.

وباستعمال النتيجة ٣ ـ ٣ يمكن ان نبرهن على النظرية الأساسية المذكورة آنفاً.

النظرية ٣ ـ ٤ اذا كان ص$_١$ (س) ، ص$_٢$ (س) حلين مستقلين خطياً. للمعادلة (٣ ـ ٢)، في الفـترة [س$_٠$ ، س$_١$]، وكـان ص (س) حلا آخـر، فان ص (س) يمكن ان يكتب بصيغة توفيقة خطية للحلين ص$_١$ ، ص$_٢$.

البرهـان ليكن ص (س$_٠$) = أ، صَ (س$_٠$) = ب ولنأخـذ المنظـومـة الخطيـة التـاليـة بمجهولين حـ$_١$ ، حـ$_٢$:

ص$_١$ (س$_٠$) حـ$_١$ + ص$_٢$ (س$_٠$) حـ$_٢$ = أ ،

. . . . (٣ ـ ٨)

صَ$_١$ (س$_٠$) حـ$_١$ + صَ$_٢$ (س$_٠$) حـ$_٢$ = ب .

فكـما رأينـا سابقـاً، ان محددة هذه المنظـومـة هي الـرنسكيـة ر(ص$_١$ ، ص$_٢$)(س$_٠$) وهي ليست صفراً لأن الحلين مستقلان خطياً. فهناك اذن حل وحيد (حـ$_١$ ، حـ$_٢$) للمنظومة (٣ ـ ٨)، وحل آخر

ص* (س) = حـ$_١$ ص$_١$ (س) + حـ$_٢$ ص$_٢$ (س) يحقق الشرطين

ص* (س$_٠$) = أ ، ص$^{*\prime}$(س$_٠$) = ب لأن كل مسألة قيمة ابتدائية لها حل وحيد (انظر النظـريـة ٣ ـ ١) ينتج ان ص (س) = ص* (س) في الفـترة س$_٠$ $\leqslant$ س $\leqslant$ س$_١$.

وهكذا فقد تم البرهان.

وفي النظـريـة السـابقة بينا ان كل حل يمكن ان يكتب على شكل توفيق خطي لحلول مستقلة خطيا. ولذا يمكن ان نتكلم عن الحل العام للمعادلة (٣ ـ ٢). فليكن ص$_١$ ، ص$_٢$ حلين لها مستقلين خطياً، فيكون **حلها العام**:

ص (س) = حـ$_١$ ص$_١$ (س) + حـ$_٢$ ص$_٢$ (س) ، . . . . (٣ ـ ٩)

حيث حـ$_١$ ، حـ$_٢$ ثابتان اعتباطيان.

نعالج الآن باختصار المعادلة (٣ ـ ١) غير المتجانسة: ليكن ص$_د$ (ن) اي حل

للمعادلة (٣ ـ ١)، فاذا عرفنا الحل العام للمعادلة (٣ ـ ٢) فيمكن ان نعرف كل حلول (٣ ـ ١).

النظرية ٣ ـ ٥ اذا كان $ص_د$ (س) حلا للمعادلة (٣ ـ ١)، وكان $ص^*$ (س) أي حل آخر، فان $ص^*$ (س) − $ص_د$ (س) يكون حلا للمعادلة (٣ ـ ٢). أي ان

$$ص^* (ن) = حـ_1 ص_1 (ن) + حـ_2 ص_2 (ن) + ص_د (ن) ،$$

حيث $حـ_1$ ، $حـ_2$ ثابتان، $ص_1$ ، $ص_2$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة (٣ ـ ٢).

البرهان لدينا ما يلي:

$$(ص^* - ص_د)'' + أ (ص^* - ص_د)' + ب (ص^* - ص_د) =$$

$$(ص^{*''} + أ ص^{*'} + ب ص^*) - (ص''_د + أ ص'_د + ب ص_د) = ق - ق = ٠ .$$

واذن فلايجاد كل حلول المسألة غير المتجانسة يكفي ان نجد حلا واحداً لها والحل العام للمسألة المتجانسة.

المثال ٣ ـ ٢ ـ ٢ يسهل ان نحقق ان $\frac{١}{٤} e^{ن} (٢ن - ١)$ هو حل خاص للمعادلة:

$$س'' - س = e^{ن} \qquad \text{.............................} \qquad (٣ ـ ١٠)$$

وللمعادلة $س'' - س = ٠$ حلان مستقلان خطياً هما $س_1 = e^{ن}$ ، $س_2 = e^{-ن}$

فالحل العام للمعادلة (٣ ـ ١٠) هو:

$$\frac{١}{٤} e^{ن} (٢ن - ١) + حـ_1 e^{ن} + حـ_2 e^{-ن} .$$

لاحظ ان $س_1$ ، $س_2$ مستقلان لأن

$$ر(س_1 ، س_2) = e^{ن}(- e^{-ن}) - e^{-ن}(e^{ن}) = -2 .$$

وفي البنـود الثـلاثـة القـادمـة سنعـرض طريقتـين لايجـاد الحـل العـام للمسألة المتجانسة، وفي البندين (٣ ـ ٦) ، (٣ ـ ٧) نعرض طرقاً لايجاد حل المسألة غير المتجانسة .

التمارين ٣ ـ ٢

١. أ) بين أن $ص_1(س) = جا س^2$ ، $ص_2(س) = جتا س^2$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة :

$$س ص'' - ص' + ٤ س^3 ص = ٠$$

ب) إحسب $ر(ص_1 ، ص_2)$ وبـيِّن انـه يكـون صفراً عند س = ٠ . **هل يتعـارض** ذلك مع النتيجة (٣ ـ ٣) ؟

[**إرشاد**: في النتيجة (٣ ـ ٣)، وفي هذا البند كله، اعتبرنا ان أ (س) ، ب (س) متصلان .]

٢ . بيّن أن أي حلين $ص_1(س)$ ، $ص_2(س)$ للمعـادلـة (٣ ـ ٢) يكـونان مترابطين خطياً اذا وفقط اذا كان احدهما حـ أمثال الآخر، حيث حـ عدد ثابت.

٣ . بيِّن أن $ص_1(س) = جا س$، $ص_2(س) = ٤ جا س - ٢ جتا س$ حلان مستقـلان خطيـاً للمعـادلـة $ص'' + ص = ٠$ واكتب الحل $ص_3(س) = جتا س$ بشكل توفيقة خطية للحلّين $ص_1$ ، $ص_2$.

٤ . بيِّن أن $e^{س}$ جا س و $e^{س}$ جتـا س حلان مستقـلان خطيـاً للمعـادلة صً -
٢صَ + ٢ص = ٠

أ) أوجد حلا يحقق الشرطين ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٤ .

ب) أوجد حلين آخرين مستقلين خطياً .

٥ . خذ المعادلة

صً + أ (س) صَ + ب (س) ص = ٠ ، ص (٠) = ٠ ،

إفرض ان لها حلاً غير الصفر وانه يتلاشى عند $س_{١}$ حيث $س_{١}$ > ٠ ، وأثبت أن اي حل آخر لها يتلاشى ايضاً عند س = $س_{١}$.

٦ . ليكن الاقتران ش (س) هو الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية

صً + ص = ٠ ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ١ ،

وليكن الاقتران حـ (س) هو حل

صً + ص = ٠ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٠

فبدون استعمال المثلثات اثبت ما يلي :

أ) $\frac{\text{د ش}}{\text{د س}}$ = حـ (س) ،

ب) $\frac{\text{د حـ}}{\text{د س}}$ = - ش (س) ،

ج) $ش^{٢}$ + $حـ^{٢}$ = ١ .

٧ . أ) بيِّن أن $ص_{١}$ = جا لي $س^{٢}$ و $ص_{٢}$ = جتا لي $س^{٢}$ حلان مستقلان خطياً

للمعادلة

$$ص'' + \frac{1}{س} ص' + \frac{4}{س^2} ص = 0 \text{ ، } (ص > 0)$$

ب) إحسب ر $(ص_1 \text{ ، } ص_2)$.

٨. أنظر الى المعادلة التالية، وهي من الرتبة الثالثة:

$$ص''' + أ(س)\, ص'' + ب(س)\, ص' + حـ(س)\, ص = 0 \text{ ،}$$

حيث أ ، ب ، حـ اقترانات في س متصلة على فترة ما، ف. اثبت انه اذا كان $ص_1$ (س)، $ص_2$ (س) ، $ص_3$ (س) حلولا لهذه المعادلة فان اي توفيق خطي لهذه الحلول هو حل آخر أيضاً.

٩. في التمرين ٨: لنعرف الرنسكية ر $(ص_1 \text{ ، } ص_2 \text{ ، } ص_3)$ بالمحددة التالية:

$$ر(ص_1 \text{ ، } ص_2 \text{ ، } ص_3)(س) = \begin{vmatrix} ص_1 & ص_2 & ص_3 \\ ص'_1 & ص'_2 & ص'_3 \\ ص''_1 & ص''_2 & ص''_3 \end{vmatrix}$$

أ) بيِّن ان ر تحقق المعادلة التفاضلية

$$ر'(س) = -أ(س)\, ر.$$

ب) أثبت أن ر $(ص_1 \text{ ، } ص_2 \text{ ، } ص_3)$ (س) إما صفر دائماً او لا يساوي صفراً أبداً.

١٠) أ) أثبت ان حلول معــادلـة التمـرين ٨، أي $ص_1$ (س) ، $ص_2$ (س) ، $ص_3$ (س) تكون مستقلة خطياً في الفترة [$س_0$ ، $س_1$] اذا وفقط اذا كان ر $(ص_1 \text{ ، } ص_2$

، $ص_٣$) ≠ ٠ (هذا هو مقابل النتيجة ٣ ـ ٣ في معادلات المرتبة الثالثة.)

ب) بين ان جا ن ، جتا ن ، $e^{ن}$ حلول مستقلة خطياً للمعادلة

$$ص''' - ص'' + ص' - ص = ٠ ،$$

في أي فترة (أ ، ب) حيث $-\infty < أ < ب < \infty$.

١١ . باستعمال نتيجة التمرين ١٠ أوجد الحل الوحيد للمعادلة $ص''' - ص'' + ص' - ص = ٠$ الذي يحقق الشروط الابتدائية ص (٠) = ١ ، ص' (٠) = ٠ ، ص'' (٠) = ٤ .

١٢ . بيِّن انه اذا كانت $ص_١$ (س) ، $ص_٢$ (س) ، $ص_٣$ (س) ثلاثة حلول مستقلة خطياً للمعادلة المتجانسة في التمرين ٨ ، فان أي حل آخر لها يمكن أن يكتب على شكل توفيقه خطية لهذه الحلول.

[**إرشاد**: افرض صحة مقابل النظرية ٣ ـ ١ في معادلات المرتبة الثالثة.]

١٣ . على فرض ان $ص_١$ (س) ، $ص_٢$ (س) حلان للمعادلة

$$ص''' + أ (س) ص'' + ب (س) ص' + حـ (س) ص = ق (س).$$

اثبت ان $ص_٣$ (س) = $ص_١$ (س) − $ص_٢$ (س) هو حل للمعادلة المتجانسة التي تقترن بها.

١٤ . عمِّم نتائج التمارين ٨ ، ٩ ، ١٠أ ، ١٢ ، ١٣ حتى تنطبق على المعادلة الخطية ذات الرتبة ن ، وهي:

$$ص^{(ن)} - أ_١ (س) ص^{(ن-١)} + أ_٢ (س) ص^{(ن-٢)} + \ldots + أ_{ن-١} (س) ص'$$
$$+ أ_ن (س) ص = ق (س) ،$$

حيث $أ_ى$ (س) اقترانات متصلة على فترة ما، ف، ى = ١ ، ٢ ، . . . ، ن .

١٥ . ليكن $ص_١$ (س) حلا للمعادلة

$$ص'' + أ (س) ص' + ب (س) ص = ق_١ (س) ،$$

وليكن $ص_٢$ (س) حلا للمعادلة

$$ص'' + أ (س) ص' + ب (س) ص = ق_٢ (س)$$

بين ان $ص_٣$ (س) = $ص_١$ (س) + $ص_٢$ (س) حل للمعادلة

$$ص'' + أ (س) ص' + ب (س) ص = ق_١ (س) + ق_٢ (س) .$$

هذه العلاقة العامة تسمى مبدأ التراكم (Superposition)

٣ ـ ٣ استعمال حل لإيجاد حل آخر

رأينا في النظرية ٣ ـ ٤ انه يسهل ان نكتب الحل العام للمعادلة المتجانسة :

$$ص'' + أ (س) ص' + ب (س) ص = ٠ ، \quad \ldots\ldots \quad (٣ - ١١)$$

شريطة ان نعرف لها حلين مستقلين خطيا : $ص_١$ ، $ص_٢$ فيكون الحل العام :

$$ص = حـ_١ ص_١ + حـ_٢ ص_٢ ، \quad \ldots\ldots \quad (٣ - ١٢)$$

حيث $حـ_١$ ، $حـ_٢$ ثابتان اعتباطيان . ولكن لسوء الحظ، ليس لدينا اجراء عام لتعيين $ص_١$ ، $ص_٢$ وانما هناك اجراء قياسي لايجاد $ص_٢$ اذا عرف $ص_١$. وهذه الطريقة ذات أهمية كبيرة لأنه يمكن غالباً ان نعرف حلا للمعادلة بالحدس او بالتجربة .

ولنفرض ان $ص_١$ حل غير الصفر للمعادلة (٣ ـ ١١) ولنبحث عن حل آخر $ص_٢$ حيث $ص_١$ ، $ص_٢$ مستقلان خطيا . فاذا وجد فيلزم ان يكون

$$\frac{ص_٢}{ص_١} = غ\,(س)$$

اقتراناً في س غير ثابت وان يكون $ص_٢ = غ\,ص_١$ يحقق المعادلة (٣ ـ ١١)، فيكون

$$(غ\,ص_١)'' + أ\,(غ\,ص_١)' + ب\,(غ\,ص_١) = ٠$$

وبعد المفاضلة والتحليل يؤدي هذا الى :

$$غ\,(ص''_١ + أ\,ص'_١ + ب\,ص_١) + غ'\,(٢\,ص'_١ + أ\,ص_١) + غ''\,ص_١ = ٠ \quad \textbf{(٣ ـ ١٣)}$$

والقوس في الحد الأول في المعادلة (٣ ـ ١٣) يؤول الى صفر لأن $ص_١$ حل للمعادلة (٣ ـ ١١). فيبقى لدينا

$$غ''\,ص_١ + غ'\,(٢\,ص'_١ + أ\,ص_١) = ٠$$

والقسمة على $غ'\,ص_١$ يمكن ان نكتب هذه المعادلة بالشكل ،

$$\frac{غ''}{غ'} = -٢\,\frac{ص'_١}{ص_١} - أ. \quad \text{(٣ ـ ١٤)}$$

وبمكاملة (٣ ـ ١٤) نجد ان

$$لي\,غ' = -٢\,لي\,ص_١ - \int أ\,(س)\,د\,س.$$

فيكون

$$غَ = \frac{1}{ص_1^2} e^{-\int أ(س)\,دس} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ١٥)$$

ولأن الحد الأسي لا يكون صفراً فان غ لا يكون عدداً ثابتاً. فلأيجاد غ نكامل مرة أخرى فينتج

$$ص_2 = غ ص_1 = ص_1(س) \int \frac{e^{-\int أ(س)\,دس}}{ص_1^2(س)}\,دس \quad \ldots\ldots \quad (٣ - ١٦)$$

يبقى ان نبين أن $ص_2$ هو حل للمعادلة (٣ - ١١). وهذا ظاهر لأن غ حل للمعادلة (٣ - ١٤) و غ $ص_1$ حل للمعادلة (٣ - ١٣). وسنستعمل الصيغة (٣ - ١٦) في فصول تالية، والأمثلة التالية تبين سبل استخدامها.

المثال ٣ - ٣ - ١ نلاحظ ان $ص_1$ = س حل للمعادلة:

$$س^2 صً - س صَ + ص = ٠ ، س > ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ١٧)$$

فلأيجاد $ص_2$ نكتب (٣ - ١٧) بالشكل

$$صً - \left(\frac{1}{س}\right) صَ + \left(\frac{1}{س^2}\right) ص = ٠$$

فيكون $\int أ(س)\,دس = -$ لي س ، فباستعمال الصيغة (٣ - ١٦) ينتج:

$$ص_2 = س \int \frac{س}{س^2}\,دس = س\ لي\ س\ .$$

فالحل العام للمعادلة (٣ - ١٧) هو

$$ص = حـ_١ س + حـ_٢ س لي س ، س > ٠$$

المثال ٣ ـ ٣ ـ ٢ المعادلة التالية تسمى معادلة لاجاندر من الرتبة الأولى (Legendre)

$$(١ - س^٢) صً - ٢ س صَ + ٢ ص = ٠ ، -١ < س < ١ ، . \quad (٣ ـ ١٨)$$

فيكون

$$صً - \frac{٢ س}{١ - س^٢} صَ + \frac{٢ ص}{١ - س^٢} = ٠$$

ومن السهل ان نتحقق ان $ص_١ = س$ حل . فلأيجاد $ص_٢$ نلاحظ ان $\int أ(س) د س$ $= لي (١ - س^٢)$ فمن (٣ ـ ١٦) ينتج :

$$ص_٢ = س \int \frac{e^{- لي (١ - س^٢)}}{س^٢} د س = س \int \frac{د س}{س^٢ (١ - س^٢)} .$$

$$= س \int (\frac{١}{س^٢} + \frac{١}{١ - س^٢}) د س$$

$$= س [- \frac{١}{س} + \frac{١}{٢} لي (\frac{١ + س}{١ - س})]$$

$$= \frac{س}{٢} لي (\frac{١ + س}{١ - س}) - ١ .$$

يلاحظ في هذا المثال ان $ص_٢$ معرف في الفترة $- ١ < س < ١$ مع ان غ (٠) غير معرف .

التمارين ٣ - ٣

في التمارين من ١ الى ٥ تعطى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية، وحلا هو ص١ (س). تحقق ان ص١ (س) هو فعلا حل للمعادلة واوجد حلا آخر مستقلا عنه خطياً

١ . $ص'' - ٢ ص' + ص = ٠$ ، $ص_١ (س) = e^{س}$

٢ . $ص'' - ٢ س ص' + ٢ ص = ٠$ ، $ص_١ (س) = س$ $(س > ٠)$

٣ . $ص'' - (\frac{٢ س}{١ - س^٢}) ص' + (\frac{٦}{١ - س^٢}) ص = ٠$ ، $ص_١ (س) = \frac{٣ س^٢ - ١}{٢}$ $(|س| < ١)$

(تسمى هذه المعادلة معادلة لاجاندر من الرتبة الثانية .)

٤ . $ص'' + (\frac{٣}{س}) ص' = ٠$ ، $ص_١ (س) = ١$

٥ . $س^٢ ص'' + س ص' - ٤ ص = ٠$ ، $ص_١ (س) = س^٢$

٦ . إليك معادلة بيزيل التفاضلية : (Bessel)

$$س^٢ ص'' + س ص' + (س^٢ - ل^٢) ص = ٠$$

فعلى فرض ان $ل = \frac{١}{٢}$ تحقق ان $ص_١ (س) = (جا س)/\sqrt{س}$ هو حل لها، حيث $س > ٠$ ثم أوجد حلا آخر مستقلا خطياً .

٧ . في معادلة التمرين ٦ ، اذا جعلنا $ل = ٠$ نحصل على معادلة بيزيل الصفرية

وسنـدرسهـا في الفصـل الخامس وليكن ج. (س)، **اقتران بيزيل الصفري**، حلا لها،
فأوجد بدلالة ج. (س) حلا آخر مستقلا خطيا.

٨. خذا المعادلة ذات الرتبة الثالثة

$$ص''' + أ (س) ص'' + ب (س) ص' + حـ (س) ص = ٠$$

وليكن $ص_١$ (س)، $ص_٢$ (س) حلين **لها مستقلين خطيا**، وليكن

$ص_٣$ (س) = ع (س) $ص_١$ (س) حلا للمعادلة.

أ) أوجد معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية يكون عَ حلا لها.

ب) بين ان $(ص_٢/ص_١)'$ حل لهذه المعادلة.

جـ) استخـــدم نتيجـة (ب) في إيجـاد حل آخـر، مستقـل خطيـاً، للمعـادلـة التي استنتجتها في (أ).

٩. خذ المعادلة

$$ص'' - (\frac{٣}{س^٢}) ص' + (\frac{٣}{س^٣}) ص = ٠ ، (س > ٠).$$

أ) بين ان $ص_١$ (س) = س، $ص_٢$ (س) = $س^٣$ حلان مستقلان خطياً.

ب) استعمل نتائج التمرين ٨ في ايجاد حل ثالث مستقل خطيا.

٣ ـ ٤ المعادلة المتجانسة ذات المعاملات الثابتة والجذور الحقيقية

في هذا البنـد نعـرض اجـراء بسيطـا لايجـاد حل عام للمعـادلة الخطية المتجانسة ذات

$$ص'' + أ ص' + ب ص = ٠ \quad \cdots\cdots \quad (٣ - ١٩)$$

فلنذكر ان نظيرتها ذات المرتبة الأولى ص' + أ ص = ٠ حلها العام هو ص (س) = حـ $e^{-أس}$. فليس مستهجنا اذن ان نقدِّر انه قد يكون للمعادلة (٣ ـ ١٩) حل من النمط ص (س) = $e^{\lambda س}$ حيث λ ثابت له قيمة ما (حقيقية او مركبة). فاذا عوضنا ص (س) = $e^{\lambda س}$ في المعادلة (٣ ـ ١٩) ينتج :

$$\lambda^{٢} e^{\lambda س} + أ \lambda e^{\lambda س} + ب e^{\lambda س} = ٠ \quad \cdots\cdots \quad (٣ - ٢٠)$$

ولان $e^{\lambda س} = ٠$ نقسم عليها فينتج :

$$\lambda^{٢} + أ \lambda + ب = ٠ ، \quad \cdots\cdots \quad (٣ - ٢١)$$

حيث أ ، ب عددان حقيقيان . وسنسمي المعادلة (٣ ـ ٢١) **المعادلة المساعدة** ، للمعادلة (٣ ـ ١٩) وواضح انه اذا كانت λ تحقق المعادلة (٣ ـ ٢١) كان ص (س) = $e^{\lambda س}$ حلا للمعادلة (٣ ـ ١٩) وكما رأينا في البند ٣ ـ ٢ نحتاج الى ايجاد حلين مستقلين خطيا . فالمعادلة (٣ ـ ٢١) لها حلان هما

$$\lambda_{١} = \frac{- أ + \sqrt{أ^{٢} - ٤ب}}{٢} ، \quad \lambda_{٢} = \frac{- أ - \sqrt{أ^{٢} - ٤ب}}{٢} \quad \cdots \quad (٣ - ٢٢)$$

فهناك ثلاثة احتمالات : $أ^{٢} - ٤ب > ٠$ ، $أ^{٢} - ٤ب = ٠$ ، $أ^{٢} - ٤ب < ٠$.

الحالة الأولى : اذا كان $أ^{٢} - ٤ب > ٠$ كان $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ عددين حقيقيين مختلفين [المبينان في (٣ ـ ٢٢)] . فيكون $ص_{١}$ (س) = $e^{\lambda_{١} س}$ ، $ص_{٢}$ (س) = $e^{\lambda_{٢} س}$ حلين مختلفين . ونستطيع ان نبين انهما مستقلان خطياً لأن

$$ر(ص_1 ، ص_2) = e^{\lambda_1 س} . \lambda_2 e^{\lambda_2 س} - \lambda_1 e^{\lambda_1 س} e^{\lambda_2 س}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) س} \neq 0 ،$$

لأن $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

وحسب النظرية ٣ ـ ٤ يكون الحلان مستقلين. فقد أثبتنا النظرية التالية:

النظرية ٣ ـ ٦ اذا كان $أ^2 - 4ب > 0$ كان الحل العام للمعادلة (٣ ـ ١٩) هو:

$$ص(س) = حـ_1 e^{\lambda_1 س} + حـ_2 e^{\lambda_2 س} \qquad (٣ ـ ٢٣)$$

حيث $حـ_1$ ، $حـ_2$ ثابتان لاعلى التعيين، λ_1 ، λ_2 هما الجذران الحقيقيان للمعادلة (٣ ـ ٢١).

المثال ٣ ـ ٤ ـ ١ خذ المعادلة

$$صً + ٣ صَ - ١٠ ص = ٠ .$$

فالمعادلة المساعدة هي $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ ، حيث $أ^2 - 4ب = 49$. فالجذران هما $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = -5$ (ترتيب الجذرين ليس ذا بال).

فالحل العام:

$$ص(س) = حـ_1 e^{2س} + حـ_2 e^{-5س} .$$

واذا حددنا الشرطين الابتدائيين ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٣ مثلا، نحصل على المعادلتين الآتيتين

$$حـ_1 + حـ_2 = 1 ،$$

$$2 حـ_1 - 5 حـ_2 = 3 ،$$

ولهما حل وحيد هو $حـ_1 = \frac{8}{7}$ ، $حـ_2 = \frac{1}{7}$. فالحل الوحيد لمسألة القيم الابتدائية هو اذن :

$$ص(س) = \frac{1}{7}(8 e^{2س} - e^{-5س}).$$

الحالة الثانية $أ^2 - 4ب = 0$ في هذه الحالة يكون للمعادلة (٣ ـ ٢١) الحل المزدوج $\lambda_1 = \lambda_2 = -أ/2$.

فيكون $ص_1(س) = e^{-أس/2}$ حلا للمعادلة (٣ ـ ١٩) . فلأيجاد الحل الثاني $ص_2$ نستعمل المعادلة (٣ ـ ١٦) فحيث أن احد الحلين معروف، يكون

$$ص_2 = ص_1 \int \frac{e^{-اس}}{ص_1^2} د س = e^{-أس/2} \int د س = س e^{-أس/2}.$$

وقد رأينا في البند (٣ ـ ٣) ان $ص_1$ ، $ص_2$ مستقلان خطياً. فقد نتج ما يلي :

النظرية ٣ ـ ٧ اذا كان $أ^2 - 4ب = 0$ كان الحل العام للمعادلة (٣ ـ ١٩) هو:

$$ص(س) = حـ_1 e^{-(أ/2)س} + حـ_2 س e^{-(أ/2)س} ، \quad ..... \quad (٣ ـ ٢٤)$$

حيث $حـ_1$ ، $حـ_2$ ثابتان لاعلى التعيين.

المثال ٣ ـ ٤ ـ ٢ خذ المعادلة

$$صً - 6 صَ + 9 = 0$$

فالمعادلة المساعدة هي $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ ، $أ^2 - 4ب = 0$ فينتج الجذر المزدوج $\lambda_1 = -أ/2 = 3$ فالحل العام :

$\text{ص}(\text{س}) = \text{حـ}_1\, e^{3\text{س}} + \text{حـ}_2\, \text{س}\, e^{3\text{س}}$.

فاذا كان الشرطان الابتدائيان ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٣ ينتج المعادلتان الآتيتان :

$\text{حـ}_1 = 1$ ،

$3\,\text{حـ}_1 + \text{حـ}_2 = 3$

فالحل الوحيد للمعادلة هو

$\text{ص}(\text{س}) = e^{3\text{س}}$.

في البند التالي سنعالج حالة الجذور المركبة حيث $(\text{أ}^2 - 4\,\text{ب} < 0)$.

التمارين ٣ ـ ٤

في التمارين ١ الى ١٢ أوجد الحل العام لكل معادلة . فاذا اعطيت شروطاً ابتدائية فأعط الحل الخاص الذي يحققها .

١ . $\text{ص}'' - 4\,\text{ص} = 0$

٢ . $\text{س}'' + \text{س}' - 3\,\text{س} = 0$ ، $\text{س}(0) = 0$ ، $\text{س}'(0) = 1$

٣ . $\text{ص}'' - 3\,\text{ص}' + 2\,\text{ص} = 0$

٤ . $\text{ص}'' + 5\,\text{ص}' + 6\,\text{ص} = 0$ ، $\text{ص}(0) = 1$ ، $\text{ص}'(0) = 2$

٥ . $4\,\text{س}'' + 20\,\text{س}' + 25\,\text{س} = 0$ ، $\text{س}(0) = 1$ ، $\text{س}'(0) = 2$

٦ . $\text{ص}'' + 6\,\text{ص}' + 9\,\text{ص} = 0$

٧ . $\text{س}'' - \text{س}' - 6\,\text{س} = 0$ ، $\text{س}(0) = -1$ ، $\text{س}'(0) = 1$

٨ . $\text{ص}'' - 8\,\text{ص}' + 16\,\text{ص} = 0$ ، $\text{ص}(0) = 2$ ، $\text{ص}'(0) = -1$

٩. $ص'' - ٥ ص' = ٠$

١٠. $ص'' + ١٧ ص' = ٠$ ، $ص(٠) = ١$ ، $ص'(٠) = ٠$

١١. $ص'' + ٢\pi ص' + \pi^٢ ص = ٠$ ، $ص(١) = ١$ ، $ص'(١) = ١/\pi$

١٢. $ص'' - ١٣ ص' + ٤٢ ص = ٠$

١٣. خذ المعادلة المتجانسة الخطية ذات الرتبة الثالثة والمعاملات الثابتة :

$ص''' + أ ص'' + ب ص' + حـ ص = ٠$.

أ) بين ان $e^{\lambda س}$ حل لها اذا كان يحقق المعادلة المساعدة

$\lambda^٣ + أ \lambda^٢ + ب \lambda + حـ = ٠$

ب) بين انه اذا كان $\lambda_١$ ، $\lambda_٢$ ، $\lambda_٣$ ، حلول المعادلة المساعدة، مختلفة، يكون $ص_١ = e^{\lambda_١ س}$ ، $ص_٢ = e^{\lambda_٢ س}$ ، $ص_٣ = e^{\lambda_٣ س}$ حلولا للمعـــادلـــة مستقلة خطيـاً (انظـر التمرين ٣ ـ ٢ ـ ١٠) وحسب نتيجـة التمرين ٣ ـ ٢ ـ ١٢ ما الحل العام للمعادلة في هذه الحالة ؟

جـ) على فرض ان $\lambda_١$ جذر مزدوج : بين أن $ص_١(س) = e^{\lambda_١ س}$ ، $ص_٢(س) = س e^{\lambda_١ س}$ ، $ص_٣ = e^{\lambda_٣ س}$ حلول مستقلة خطياً. ما الحل العام ؟

د) على فرض ان $\lambda_١$ جذر مثلث [اي ان $\lambda^٣ + أ \lambda^٢ + ب \lambda + حـ = (\lambda - \lambda_١)^٣$]، بين ان

$ص_١(س) = e^{\lambda_١ س}$ ، $ص_٢(س) = س e^{\lambda_١ س}$ ، $ص_٣(س) = س^٢ e^{\lambda_١ س}$

هي حلول مستقلة خطيا.

ما الحل العام ؟ (لاحظ ان الحل س^{٢} e$^{λ١ س}$ يمكن استنتاجه من الحلين e$^{λ١ س}$ ، س e$^{λ١ س}$ باستعمال الحيلة المبنية بالتمرين ٣ ـ ٣ ـ ٨ .)

في التمارين ١٤ الى ١٨ استعمل الطريقة المبينة بالتمرين ١٣ لايجاد الحل العام لكل معادلة تفاضلية واوجد حلا خاصا عندما يطلب ذلك

١٤ . ص‴ − ص″ − ص′ + ص = ٠

١٥ . ص‴ − ٣ ص″ + ٣ ص′ − ص = ٠ ، ص(٠) = ١ ، ص′(٠) = ٢ ، ص″(٠) = ٣

١٦ . س‴ − ٥ س″ − س′ − ٥ س = ٠

١٧ . ص‴ − ٩ ص′ = ٠ ، ص (٠) = ١ ، ص′ (٠) = ٠ ، ص″ (٠) = ٢

١٨ . ص‴ − ٦ ص″ + ٣ ص′ + ١٠ ص = ٠

١٩ . في البند (٢ ـ ٤) ناقشنا معادلة ريكاتي غير الخطية

ص′ + ص^{٢} + أ (س) ص + ب (س) = ٠ .

فباستعمال طرق ذلك البند والبند الحالي حل المعادلة

ص′ + ص^{٢} − ١ = ٠

٢٠ . اوجد الحل العام للمعادلة ص′ + ص^{٢} + ص − ١ = ٠ .

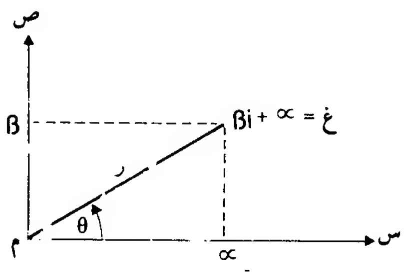
٢١ . أوجد الحل العام للمعادلة ص′ + أ ص^{٢} + ب ص + حـ = ٠ ، حيث أ ، ب ، حـ ثوابت .

٢٢ . على اعتبار ان أ (س) ، ب (س) اي اقترانين، أوجد حل مسألة القيم الابتدائية التالية عند نقطة ما، س. حيث يكون أ (س) ، ب (س) متصلين :

$$ص'' + أ(س) ص' + ب(س) ص = ٠ ، \quad ص(س_٠) = ص'(س_٠) = ٠ .$$

٣ ـ ٥ المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة والجذور المركبة

فبل البحث في هذه الحالة، نراجع باختصار بعض الحقائق عن الأعداد المركبة. **فالعدد المركب** غ هو اي عدد من النمط غ = $\alpha + i\beta$ ، حيث α ، β حقيقيان، أ^{2} = − ١ فاذا كان β = ٠ كان غ عدداً حقيقياً، واذا كان α = ٠، $\beta \neq$ ٠ كان غ عدداً تخيلياً وكل عدد مركب غ يمكن تمثيله بمتجه في المستوى س ص، حيث α تمثل الاحداثي السيني، β تمثل الاحداثي الصادي (انظر الشكل ٣ ـ ١) وكل عدد مركب غ = $\alpha + i\beta$ يمكن ان يوصف **بالاحـداثيـات القطبيـة**. فاذا كانت ر هي المسافة من غ الى نقطة الأصل، وكانت θ هي الزاوية التي يحصرها المتجه مع اتجاه س الموجب (انظر الشكل ٣ ـ ١)، يتضح ما يلي:



الشكل ٣ ـ ١

$$ر = \sqrt{\alpha^{٢} + \beta^{٢}} ،\quad \theta = ظا^{-١} \frac{\beta}{\alpha} ،$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٢٥)$$

$$\beta = ر جا\ \theta ،\quad \alpha = ر جتا\ \theta .$$

وباستخدام العلاقتين الأخيرتين من (٣ ـ ٢٥) نجد ان :

$$غ = ر (جتا\ \theta + i\ جا\ \theta). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٢٦)$$

ويمكن باختبار النسبة ان نثبت ان متتاليات القوى التالية تتقارب لكل قيم θ المركبة :

$$e^{\theta} = ١ + \theta + \frac{\theta^{٢}}{٢!} + \ldots + \frac{\theta^{ن}}{ن!} + \ldots = \sum_{ن=٠}^{\infty} \theta^{ن}/ن! ،$$

$$جتا\ \theta = ١ - \frac{\theta^{٢}}{٢!} + \frac{\theta^{٤}}{٤!} - \ldots = \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \theta^{٢ن}/(٢ن)! ، \ldots (٣ - ٢٧)$$

$$جا\ \theta = \theta - \frac{\theta^{٣}}{٣!} + \frac{\theta^{٥}}{٥!} - \ldots = \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \theta^{٢ن+١}/(٢ن+١)! .$$

فاذا وضعنا $i\theta$ ، بدل كل θ في متتالية وذكرنا ان $i^{٢} = -١$ تنتج **قاعدة اويلر** (Euler) :

$$e^{i\theta} = ١ + i\theta - \frac{\theta^{٢}}{٢!} - \frac{i\theta^{٣}}{٣!} + \frac{\theta^{٤}}{٤!} + \frac{i\theta^{٥}}{٥!} - \frac{\theta^{٦}}{٦!} - \frac{i\theta^{٧}}{٧!} + \ldots$$

$$= جتا\ \theta + i\ جا\ \theta . \qquad (٣ - ٢٨)$$

واذن فكل عدد مركب غ = $\alpha + i\beta$ يمكن ان يمثل بالشكل القطبي بالمعادلة

$$غ = r e^{i\theta}$$

حيث r ، θ كما في (٣ ـ ٢٥). ورغم انـا استعملنـا متـواليـة القوى لاستخراج قاعدة اويلر فاننا لن نستعمل هذه المتوالية في الفصل الحالي.

نعود الآن الى دراسة الحالة عندما يكون $أ^2 - ٤ ب < ٠$

الحالة الثالثة : $أ^2 - ٤ ب < ٠$. هنا يكون جذران المعادلة المساعدة (٣ ـ ٢١):

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta ، \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٣٠)$$

حيث $\alpha = - أ/٢$ ، $\beta = \sqrt{٤ ب - أ^2}/٢$ ، فيكون $ص_1 = e^{\lambda_1 س}$ ، $ص_2 = e^{\lambda_2 س}$ حلين للمعـــادلــة (٣ ـ ١٩). ولأن اي وفيقـة خطيـة للحلين هي أيضـاً حل، نفرض ما يلي:

$$ص_1^* = \frac{١}{٢} (ص_1 + ص_2) ، \qquad ص_2^* = \frac{١}{٢ i} (ص_1 - ص_2) .$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (٣ ـ ٣١)$$

فيكون $ص_1^*$ ، $ص_2^*$ حلين ويكون:

$$ص_1^* = \frac{e^{\lambda_1 س} + e^{\lambda_2 س}}{٢} = \frac{e^{\alpha س}}{٢} (e^{i\beta س} + e^{-i\beta س})$$

$$= \frac{e^{\alpha س}}{٢} [جتا \beta س + i \; حا \beta س + جتا (- \beta س) + i \; حا (- \beta س)]$$

$= e^{\propto س}$ حتاβس، لأن جتا $(-\theta)$ = جتا θ ، جا $(-\theta) = -$ حا θ ،
وبالمثل نبين ان

$$ص^{*}_{٢} \qquad e^{\propto س} \text{ جا } \beta \text{ س}$$

والآن نستنتج بسهولة ان $ص^{*}_{١}$ ، $ص^{*}_{٢}$ مستقلان خطياً لأن

$$\frac{ص^{*}_{١}}{ص^{*}_{٢}} = \text{ظتا } \beta \text{ س} ، \beta \neq ٠ ،$$

وهذا ليس ثابتا . وبطريقة أخرى : يسهل أن نحسب أن ر($ص^{*}_{١}$ ، $ص^{*}_{٢}$)
$= \beta^{\propto س} \neq ٠$. اذن فقد برهن هنا النظرية التالية :

النظرية ٣ ـ ٨ : اذا كان $أ^{٢} - ٤ ب < ٠$ فالحل العام للمعادلة (٣ ـ ١٩) هو

$$ص (س) = e^{\propto س} (حـ_{١} \text{ جتا } \beta \text{ س} + حـ_{٢} \text{ جا } \beta \text{ س}) \quad ...... \quad (٣ ـ ٣٢)$$

حيث $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ ثابتان اعتباطيان ،

$$\propto = -\frac{أ}{٢} ، \beta = \frac{\sqrt{٤ ب - أ^{٢}}}{٢} .$$

المثال ٣ ـ ٥ ـ ١ ليكن صً + ص = ٠ . فتكون المعادلة المساعدة $\lambda^{٢} + ١ = ٠$ ويكون الجذران$\pm i$ وهنا $\propto = ٠$ ، $\beta = ١$ ، فيكون الحل العام هو :

$$ص (س) = حـ_{١} \text{ جتا س} + حـ_{٢} \text{ جا س} . \quad .... \quad (٣ ـ ٣٣)$$

وهذه هي معادلة الحركة التوافقية (harmonic motion)

المثال ٣ ـ ٥ ـ ٢ : خذ المعادلة صً + صَ + ص = ٠ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٣
هنا $\lambda^{٢} + \lambda + ١ = ٠$ ، فيكون $\lambda_{١} = (-١ + i\sqrt{٣})/٢$ ،
$\lambda_{٢} = (-١ - i\sqrt{٣})/٢$

فتكون $\alpha = -\frac{١}{٢}$ ، $\beta = \sqrt{٣}/٢$ ، والحل العام هو:

$$ص(س) = e^{-س/٢}\left(جـ_١ جتا \frac{\sqrt{٣}س}{٢} + جـ_٢ جا \frac{\sqrt{٣}}{٢} س\right).$$

وفي حل مسألة القيم الابتدائية نحصل على المعادلتين الآتيتين :

$حـ_١ = ١$ ،

$$\frac{\sqrt{٣}}{٢} حـ_٢ - \frac{١}{٢} حـ_١ = ٣.$$

فيكون $حـ_١ = ١$ ، $حـ_٢ = ٧/\sqrt{٣}$ ، ويكون :

$$ص(س) = e^{-س/٢}\left(جتا \frac{\sqrt{٣}}{٢} س + \frac{٧}{\sqrt{٣}} جا \frac{\sqrt{٣}}{٢} س\right).$$

التمارين ٣ ـ ٥

في التمارين التالية أوجد الحل العام لكل معادلة، وحيث تعطى قيماً ابتدائية أوجد حلا خاصاً يحققها.

١. $صً + ٢ صَ + ٢ ص = ٠$

٢. $٨ صً + ٤ صَ + ص = ٠$ ، $ص(٠) = ٠$ ، $صَ(٠) = ١$

٣. $سً + سَ + ٧ س = ٠$

٤. $صً + صَ + ٢ ص = ٠$

٥. $\frac{د^2 س}{د \theta^2}$ + ٤ س = ٠ ، س $(\frac{\pi}{٤})$ = ١ ، سَ $(\frac{\pi}{٤})$ = ٣

٦. صً − صً + صَ − ص = ٠ [**إرشاد** : انظر التمرين ٣ ـ ٢ ـ ١٠ .]

٧. صً − ٣ صً + ٤ صَ − ٢ ص = ٠ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٢ ،
صً (٠) = ٣

٣ ـ ٦ المعادلات اللامتجانسة Nonhomogeneous Equations

طريقة المعاملات غير المعينة Method of Undetermined Coefficients

في هذا البند والبنود التالية نعطي طرقاً لأيجاد حل خاص للمعادلة الخطية اللامتجانسة ذات المعاملات التالية :

صً + أ صَ + ب ص = ق (س) .... (٣ ـ ٣٤)

لتكن ح ن (س) تدل على حدودية من الدرجة ن في س . وفي هذا البند يتخذ ق (س) احد الأشكال التالية :

١. ح ن (س) ،

٢. ح ن (س) $e^{أ س}$ ،

٣. ح ن (س) $e^{أ س}$ جا ب س أو ح ن (س) $e^{أ س}$ جتا ب س .

والطريقة التي سنجري عليها هي ان «نحزر» ان للمعادلة (٣ ـ ٣٤) حلا من شكل ق (س) ، ثم نعوض هذا الحل في (٣ ـ ٣٤) فنحدد المعاملات المجهولة . ولنمثل على هذه الطريقة بعدة أمثلة .

المثال ٣ ـ ٦ ـ ١ : خذ المعادلة

صً − ص = $س^2$ .... (٣ ـ ٣٥)

فبما ان ق (س) = س^{٢} حدودية من الدرجة الثانية، «تحزر» ان للمعادلة (٣ ـ ٣٥) حلا هو حدودية ص $_{ح}$ (س) من الدرجة الثانية، اي ان :

ص $_{ح}$ (س) = أ + ب س + حـ س^{٢} .

فيكون صً $_{ح}$ = ٢ حـ ، ونعوض في (٣ ـ ٣٥) فينتج :

٢ حـ − (أ + ب س + حـ س^{٢}) = س^{٢} .

فتساوي المعاملات يجعل

٢ حـ − أ = ٠ ، − ب = ٠ ، − حـ = ١

فيكون أ = − ٢ ، ب = ٠ ، حـ = − ١ ، والحل

ص $_{ح}$ (س) = −٢ − س^{٢}

ويمكن بسهولة تحقيق هذا الحل بالتعويض في المعادلة (٣ ـ ٣٥). وأخيراً: بما ان الحل العام للمعادلة المتجانسة صً − ص = ٠ هو

ص = حـ$_{١}$ e ^{س} + حـ$_{٢}$ e $^{-س}$ ،

يكون الحل العام للمعادلة (٣ ـ ٣٥) هو :

ص = حـ$_{١}$ e ^{س} + حـ$_{٢}$ e $^{-س}$ − ٢ − س^{٢} .

المثال ٣ ـ ٦ ـ ٢ : خـذ

صً − ٣ صَ + ٢ ص = e ^{س} جا س . . . . (٣ ـ ٣٦)

فلأن ق (س) من النوع (٣)، ح $_{ن}$ (س) = ١ اي حدودية من درجة الصفر، «نحزر» ان هناك حلا للمعادلة (٣ ـ ٣٦) من النوع

ص $_{ح}$ (س) = أ e ^{س} جا س + ب e ^{س} جتا س .

فيكون

$$ص'_ح(س) = (أ - ب)\, e^{س} جا\, س + (أ + ب)\, e^{س} جتا\, س ،$$

$$ص''_ح(س) = ٢\, أ\, e^{س} جتا\, س - ٢\, ب\, e^{س} جا\, س .$$

فبالتعويض في (٣ ـ ٣٦) ينتج :

$$e^{س}(٢\, أ\, جتا\, س - ٢\, ب\, جا\, س) - ٣\, e^{س}[(أ - ب)\, جا\, س + (أ + ب)\, جتا\, س]$$
$$+ ٢\, e^{س}(أ\, جا\, س + ب\, جتا\, س) = e^{س} جا\, س .$$

وبقسمة الطرفين على $e^{س}$ ومعادلة المعاملات ينتج :

$$٢\, أ - ٣\, (أ + ب) + ٢\, ب = ٠$$

$$- ٢\, ب - ٣\, (أ - ب) + ٢\, أ = ١ ،$$

فيكون $أ = - \frac{١}{٢}$ ، $ب = \frac{١}{٢}$ ،

$$ص_ح = \frac{e^{س}}{٢}(جتا\, س - جا\, س) .$$

وهنا ايضاً يسهل تحقيق هذه النتيجة بالتعويض وأخيراً، ان الحل العام للمعادلة (٣ ـ ٣٦) هو :

$$ص = حـ_١\, e^{٢س} + حـ_٢\, e^{س} + \frac{e^{س}}{٢}(جتا\, س - جا\, س)$$

المثال ٣ ـ ٦ ـ ٣ : $ص'' + ص = س\, e^{٢س}$. هنا ق (س) من النوع الثاني حيث $ح_ن(س)$ حدودية من الدرجة الأولى . فنجرب حلا من النوع :

ص $_ح$ (س) = $e^{٢س}$ (أ + ب س) .

فيكون

صَ $_ح$ (س) = $e^{٢س}$ (٢ أ + ب + ٢ ب س) ، صً $_ح$ (س) = $e^{٢س}$ (٤ أ + ٤ ب + ٤ ب س) ،

فينتج بالتعويض

$e^{٢س}$ (٤ أ + ٤ ب + ٤ ب س) + $e^{٢س}$ (أ + ب س) = س $e^{٢س}$.

فبقسمة الطرفين على $e^{٢س}$ ومساواة قوى س المتشابهة ينتج :

٥ أ + ٤ ب = ٠ ، ٥ ب = ١ .

فيكون أ = − ٤/٢٥ ، ب = $\frac{١}{٥}$ ، والحل الخاص

$$ص_ح (س) = \frac{e^{٢س}}{٢٥} (٥ س − ٤)$$

فالحل العام في المثال هو :

$$ص (س) = حـ_١ جا س + جـ_٢ جتا س + \frac{e^{٢س}}{٢٥} (٥ س − ٤) .$$

وقد تنشأ صعوبات في حل هذه المسائل وذلك عندما يكون أحد حدود ق (س) حلا للمعادلة المتجانسة

صً + أ صَ + ب ص = ٠ .

المثال ٣ ـ ٦ ـ ٤ خذ المعادلة

$$ص'' - ص = ٢ \, e^{س}$$

فلأن الحل العام للمعادلة ص'' − ص = ٠ هو

$$ص(س) = حـ_١ \, e^{س} + حـ_٢ \, e^{-س} ،$$

يكون ق (س) في الواقع حلا للمعادلة المتجانسة . فاذا حاولنا ان نجد حلا من النوع $ص_ح(س) = أ \, e^{س}$ ، يكون $ص''_ح(س) = أ \, e^{س}$ ، والتعويض في المعادلة الاصلية يفضي الى ٠ = ٢ $e^{س}$ ، وهذا مستحيل .

فيلزم اذن ان نبحث عن حل من نوع آخر. ومثل هذه المشكلة وقع في حالة الجذر المزدوج للمعادلة المساعدة التي نجمت عن حل المعادلات التفاضلية المتجانسة . فلنجرب ذلك الحل هنا، ولنحزر ان هناك حلا من النوع $ص_ح(س) = أ \, س \, e^{س}$.

فيكون $ص'_ح(س) = أ \, e^{س}(س + ١)$ ، $ص''_ح(س) = أ \, e^{س}(س + ٢)$، فاذن

$$ص''_ح - ص_ح = أ \, e^{س}(س + ٢) - أ \, س \, e^{س} = ٢ \, أ \, e^{س} .$$

وهذا يجب ان يساوي ٢ $e^{س}$ فتكون أ = ١ ، $ص_ح = س \, e^{س}$.

فالحل العام

$$ص(س) = حـ_١ \, e^{س} + حـ_٢ \, e^{-س} + س \, e^{س}$$

وأخيراً نذكر انه اذا كان ق (س) = $ق_١$ (س) + $ق_٢$ (س) حيث $ق_١$ ، $ق_٢$ كلاهما من احد الانواع الثلاثة السابقة، فيمكن ان نستعمل مبدأ التراكم (انظر (انظر التمرين ٣ ـ ٢ ـ ١٥) اي اننا يمكن ان نحل

المعادلة ص'' + أ ص' + ب ص = $ق_١$ (س) ،

لنحصل على الحل الخاص ص $_{ح_1}$ (س) ، ونحل المعادلة

ص̋ + أ صَ + ب ص = ق$_٢$ (س) ،

لنحصل على الحل الخاص ص $_{ح_2}$ (س) ، فيكون الحل الخاص للمعادلة

ص̋ + أ صَ + ب ص = ق (س) = ق$_١$ (س) + ق$_٢$ (س)

هو ص $_ح$ (س) = ص $_{ح_1}$ (س) + ص $_{ح_2}$ (س) .

المثال ٣ ـ ٦ ـ ٥ خذ المعادلـة

صَ - ص = س^٢ + ٢ e ^{س} .

باستعمال نتائج المثالين ٣ ـ ٦ ـ ١ ، ٣ ـ ٦ ـ ٤ ومبدأ التراكم ، نجد ان الحل الخاص هو

ص $_ح$ (س) = - ٢ - س^٢ + س e ^{س} .

فخلاصة نتائج هذا البند كما يلي :

خذ المعادلة غير المتجانسة

ص̋ + أ صَ + ب ص = ق (س) .... (٣ ـ ٣٧)

والمعادلة المتجانسة

ص̋ + أ صَ + ب ص = ٠ .... (٣ ـ ٣٨)

الحالـة ١ . ليس هنـاك حد في ص$_ح$ (س) هو حل للمعـادلة (٣ ـ ٣٨) . فهناك حل خاص للمعادلة (٣ ـ ٣٧) من النوع ص $_ح$ (س) حسب الجدول التالي :

ق (س)	ص $_ح$ (س)
ع $_ن$ (س)	أ. + أ$_1$ س + أ$_2$ س^2 + . . . + أ$_ن$ س^ن
ح $_ن$ (س) e ^{أس}	(أ. + أ$_1$ س + أ$_2$ س^2 + . . . + أ$_ن$ س^ن) e ^{أس}
ح $_ن$ (س) e ^{أس} جا ب س أو ح $_ن$ (س) e ^{أس} جتا ب س	(أ. أ$_1$ س + أ$_2$ س^2 + . . . + أ$_ن$ س^ن) e ^{أس} جا ب س (حـ. + حـ$_1$ س + حـ$_2$ س^2 + . . . + حـ$_ن$ س^ن) e ^{أس} جتا ب س

الحالة ٢ . اذا كان أي حد من ص $_ح$ (س) حلا للمعادلة (٣ ـ ٣٨) اضرب الاقتران ص $_ح$ (س) الناجم من الحالة ١ بالمقدار س^ك حيث ك اصغر عدد صحيح يضمن الا يكون اي حد في س^ك ص $_ح$ (س) حلا في (٣ ـ ٣٨) .

نلاحـظ ان طريقـة المعـاملات غير المحددة تستعمل فقط عندما يكون ق (س) من نمط محدد يبينه الجدول السابق . اما الحالة العامة فسنعالجها في البند التالي .

التمارين ٣ ـ ٦

في التـمارين ١ الى ١٣ أوجـد الحـل العـام لكـل معادلة تفاضلية معطاة ، واذا اعطيت شروطاً ابتدائية فأوجد الحل الخاص الذي يحققها .

١ . صً + ٤ ص = ٣ جا س

٢ . صً − صَ − ٦ ص = ٢٠ e $^{-٢س}$ ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ٦

٣ . صً − ٣ صَ + ٢ ص = ٦ e ^{٣س}

٤ . صً + صَ = ٣ س^{٢} ، ص (٠) = ٤ ، صَ (٠) = ٠

٥ . صً − ٢ صَ + ص = − ٤ e^{س}

٦ . صً − ٤ صَ + ٤ ص = ٦ س e^{٢س} ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ٣

٧ . صً − ٧ صَ + ١٠ ص = ١٠٠ س ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ٥

٨ . صً + ص = ١ + س + س^{٢}

٩ . صً + صَ = س^{٣} − س^{٢}

١٠ . صً + ٤ ص = ١٦ س جا ٢ س

١١ . صً − ٤ صَ + ٥ ص = ٢٠ جته ٢س جتا س

١٢ . صً − ص − ٢ ص = س^{٢} + جتا س

١٣ . صً + ٦ صَ + ٩ ص = ١٠ e$^{-٣س}$

١٤ . صً + ص = ١ + ٢ جا س

استخدم مبدأ التراكم لايجاد الحل العام لكل معادلة في التمارين من ١٤ الى ١٧ .

١٥ . صً − ٢ صَ − ٣ ص = س − س^{٢} + e^{س}

١٦ . صً + ٤ ص = ٣ جتا ٢س − ٧ س^{٢}

١٧ . صً + ٤ صَ + ٤ ص = س e^{س} + جا س

١٨ . استعمل طرق هذا البند لأثبات ان المعادلة :

صً + ٢ أ صَ + ب^{٢} ص = ل جا W س ، (أ ، W > ٠)

لها حل خاص هو

$$\text{ص} = \frac{\text{ل جا}\,(\omega\,\text{س} - \propto)}{\sqrt{(\text{ب}^{2} - \omega^{2})^{2} + 4\,\omega^{2}\,\text{أ}^{2}}}\ ،$$

حيث

$$\propto = \text{ظا}^{-1}\ \frac{2\,\text{أ}\,\omega}{(\text{ب}^{2} - \omega^{2})}\ ،\quad (0 < \propto < \pi)$$

١٩ . افرض ان ق (س) حدودية من الدرجة ن ، وبيِّن أن هناك دائماً حلا هو حدودية من الدرجة ن ، للمعادلة ، صً + أ صَ + ب ص = ق (س) .

٢٠ . أستعمل الطريقة المذكورة في التمرين ١٩ لايجاد حل خاص للمعادلة :

صً + ٣ صَ + ١٧ ص = ١ + س − س^{2} .

٣ ـ ٧ المعادلات اللامتجانسة :

تغيير الثوابت Variation of Constants

لننظر ثانية في المعادلة

صً + أ صَ + ب ص = ق (س) . . . . (٣ ـ ٣٩)

ولنفرض اننا وجدنا حلين مستقلين ص_{1} ، ص_{2} خطياً للمعادلة المتجانسة صً + أ صَ + ب ص = ٠ وان حلها العام هو

$\text{حـ}_{1}\,\text{ص}_{1}$ (س) + $\text{حـ}_{2}\,\text{ص}_{2}$ (س) . . . . (٣ ـ ٤٠)

فكل حل خاص، مثل ص^{*}، للمعادلة (٣ ـ ٣٩) يجب ان يكون بحيث ان $\text{ص}^{*}/\text{ص}_{1}$

ص* / ص$_{٢}$ ليس اي منهما ثابتاً . وهذا يوحي باننا يجب ان نعوض عن حـ$_{١}$ ، حـ$_{٢}$ في (٣ ـ ٤٠) بالاقترانين جـ$_{١}$ (س) ، جـ$_{٢}$ (س) وان نبحث للمعادلة (٣ ـ ٣٩) عن حل من النوع :

ص (س) = حـ$_{١}$ (س) ص$_{١}$ (س) + حـ$_{٢}$ (س) ص$_{٢}$ (س) . . . (٣ ـ ٤١)

وللتعويض عن الثوابت بمتغيرات اعطيت هذه الطريقة اسم الحل بتغيير الثوابت .

نفاضل (٣ ـ ٤١) فينتج :

صَ (س) = حـ$_{١}$ (س) صَ$_{١}$ (س) + حـ$_{٢}$ (س) صَ$_{٢}$ (س)

صَ (س) = جـ$_{١}$ (س) صَ$_{١}$ (س) + جـ$_{٢}$ (س) صَ$_{٢}$ (س)

+ جَـ$_{١}$ (س) ص$_{١}$ (س) + جَـ$_{٢}$ (س) ص$_{٢}$ (س) .

ونبسط هذه العبارة بافتراض ان

جَـ$_{١}$ (س) ص$_{١}$ (س) + جَـ$_{٢}$ (س) ص$_{٢}$ (س) = ٠ . . . . (٣ ـ ٤٢)

فيكون

صَ (س) = حـ$_{١}$ (س) صَ$_{١}$ (س) + حـ$_{٢}$ (س) صَ$_{٢}$ (س) .

فنفاضل ثانية، وينتج :

صً (س) = جـ$_{١}$ (س) صً$_{١}$ (س) + جـ$_{٢}$ (س) صً$_{٢}$ (س) + جَـ$_{١}$ (س) صَ$_{١}$ (س)

+ جَـ$_{٢}$ (س) صَ$_{٢}$ (س) .

وبتعويض ذلك بدل ص (ن) ، صَ (ن) ، صً (ن) في المعادلة (٣ ـ ٣٩) ينتج :

صً (س) + أ صَ (س) + ب ص (س) = جـ$_{١}$ (س) (صً$_{١}$ + أ صَ$_{١}$ + ب ص$_{١}$) +

جـ$_{٢}$ (س) (صً$_{٢}$ + أ صَ$_{٢}$ + ب ص$_{٢}$) + جَـ$_{١}$ صَ$_{١}$ + جَـ$_{٢}$ صَ$_{٢}$ = ق (س) .

ولكن ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ هما حلان للمعادلة المتجانسة ، فتختزل المعادلة السابقة الى

$$جَـ_١ \, ص_١ + جَـ_٢ \, ص_٢ = ق\,(س) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٤٣)$$

هذه معادلة ثانية في $جَـ_١$ (س) ، $جَـ_٢$ (س) . فلدينا اذن المعادلتان الآنيتان :

$$\left.\begin{array}{l} ص_١ \, جَـ_١ + ص_٢ \, جَـ_٢ = ٠ \text{ ،} \\ صَ_١ \, جَـ_١ + صَ_٢ \, جَـ_٢ = ق\,(س) \text{ .} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٤٤)$$

وقبل الاستمرار في النقاش يحسن ان نلاحظ ان المسألة قد حلت مبدئياً . فالمعادلتان (٣ ـ ٤٤) تعطيان قيمة وحيدة لكل من $جَـ_١$ ، $جَـ_٢$ ، فنجد $جـ_١$ ، $جـ_٢$ بالتكامل .

ولإكمال الحل نضرب اولى المعادلتين في $صَ_٢$ والثانية في $ص_٢$ ، ونطرح لنحصل على $جَـ_١$ (س) . وبعدها نجد $جَـ_٢$ بطريقة مماثلة . والناتج :

$$\left.\begin{array}{l} جَـ_١\,(س) = \dfrac{-\,ق\,(س)\,ص_٢\,(س)}{ص_١\,(س)\,صَ_٢\,(س) - صَ_١\,(س)\,ص_٢\,(س)} \\[2ex] جَـ_٢\,(س) = \dfrac{ق\,(س)\,ص_١\,(س)}{ص_١\,(س)\,صَ_٢\,(س) - صَ_١\,(س)\,ص_٢\,(س)} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٤٥)$$

لاحظ ان المقام في هذين ليس صفراً ، لأنه يساوي ر $(ص_١ ، ص_٢)$ ، $ص_١$ ، $ص_٢$ مستقلان خطياً .

وأخيراً نكامل $جَـ_١$ ، $جَـ_٢$ ثم نعوض قيمتي $حـ_١$ ، $حـ_٢$ في المعادلة (٣ ـ ٤١) لنجد حلا خاصا للمعادلة اللامتجانسة .

المثال ٣ ـ ٧ ـ ١ حل $صً - ص = e^{س}$ بطريقة تغيير الثوابت . حلا المعادلة المتجانسة هما $ص_١ = e^{-س}$ ، $ص_٢ = e^{س}$ ، ر $(ص_١ ، ص_٢) = ٢$ فتصير المعادلة (٣ ـ ٤٥)

$$\text{ح}_1(\text{س}) = \frac{-e^{\text{س}}e^{\text{س}}}{2} = -\frac{e^{2\text{س}}}{2} \quad ، \quad \text{ح}_2(\text{س}) = \frac{e^{\text{س}} \cdot e^{-\text{س}}}{2} = \frac{1}{2} .$$

فبمكاملة هذين، نجد ان $\text{ح}_1(\text{س}) = -e^{2\text{س}}/4$ ، $\text{ح}_2(\text{س}) = \text{س}/2$.

فالحل الخاص اذن

$$\text{ح}_1(\text{س})\,\text{ص}_1(\text{س}) + \text{ح}_2(\text{س})\,\text{ص}_2(\text{س}) = -\frac{e^{\text{س}}}{4} + \frac{\text{س}}{2}e^{\text{س}} ،$$

والحل العام

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{ح}_1 e^{\text{س}} + \text{ح}_2 e^{-\text{س}} + \frac{\text{س}}{2}e^{\text{س}} - \frac{e^{\text{س}}}{4} = \text{ح}^*_1 e^{\text{س}} + \text{ح}^*_2 e^{-\text{س}} + \frac{\text{س}}{2}e^{\text{س}}$$

المثال ٣ ـ ٧ ـ ٢ أوجد حل المعادلة $\text{ص}'' + \text{ص} = 2\ \text{جتا س}$ الذي يحقق $\text{ص}(0) = 5$ ، $\text{ص}'(0) = 2$ هنا $\text{ص}_1(\text{س}) = \text{جتا س}$ ، $\text{ص}_2(\text{س}) = \text{جا س}$ ، $\text{ر}(\text{ص}_1 ، \text{ص}_2) = 1$

فيكون $\text{ح}'_1 = -2\ \text{جتا س جا س}$، $\text{ح}'_2 = 2\ \text{جتا}^2\text{س}$

وعلى التوضيح ينتج ان $\text{ح}_1(\text{س}) = \text{جتا}^2\text{س}$ ، $\text{ح}_2(\text{س}) = \text{س} + \text{جا س جتا س}$

فالحل العام هو

$$\text{ص} = \text{ح}_1\ \text{جتا س} + \text{ح}_2\ \text{جا س} + \text{جتا}^3\text{س} + \text{س جا س} + \text{جا}^2\text{س جتا س} ،$$

$$= \text{ح}_1\ \text{جتا س} + \text{ح}_2\ \text{جا س} + \text{س جا س} .$$

ولأن $5 = \text{ص}(0) = \text{ح}_1$ ، $2 = \text{ص}'(0) = \text{ح}_2$ ، يكون الحل المطلوب

ص (س) = (س + ٢) جا س + ٥ جتا س

المثال ٣ ـ ٧ ـ ٣ حل صً + ص = ظا س هنا حلا المعادلة المتجانسة هما

ص$_1$ = جتا س، ص$_2$ = جا س، ر(ص$_1$ ، ص$_2$) = ١ فالمعادلتان (٣ ـ ٤٥) تصيران :

$$\text{جَـ}_1\,(\text{س}) = -\ \text{ظا س جا س} = -\ \frac{\text{جا}^2\,\text{س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جتا}^2\text{س} - 1}{\text{جتا س}} = \text{جتا س} - \text{قا س}\ ،$$

جَـ$_2$ (س) = ظا س جتا س = جا س .

فباستعمال التكاملات ١٧ ، ٢٢ ، ٣٣ في الملحق ١ ينتج :

حـ$_1$ (س) = جا س − لي | قاس + ظا س

، حـ$_2$ (س) = − جتا س .

فالحل الخاص هو

ص$_{ح}$ (س) = حـ$_1$ (س) ص$_1$ (س) + حـ$_2$ (س) ص$_2$ (س)

= جتا س جا س − جتا س لي | قا س + ظا س | − جا س جتا س

= − جا س لي | قا س + ظا س | ،

والحل العام هو

ص (س) = حـ$_1$ جتا س + حـ$_2$ جا س − جتا س لي | قا س + ظا س |

يبين المثال ٣ ـ ٧ ـ ٣ ان هنالك حالات لا نستطيع فيها استعمال طريقة المعاملات غير المحددة. (حاول أن تحزر حلا في هذه الحالة). والقاعدة العامة هي أن طريقة المعاملات غير المحددة تكون اسهل على الحل اذا كان الاقتران ق (س) من الانماط التي عيناها. اما طريقة تغيير الثوابت فهي أعم لأنها تؤدي الى حل كلما كان .

الاقترانان $حـ_1$ ، $حـ_م$ لهما تكامل غير محدود .

التمارين ٣ ـ ٧

في التمارين ١ الى ١٠ أوجد الحل العام لكل معادلة بطريقة تغيير الثوابت :

١ . صً + ص = جتا ٢س

٢ . صً + ص = ظتا س

٣ . صً + ٤ ص = قا ٢س

٤ .صً + ٤ ص= قا س ظا س

٥ . صً − ٢ صَ + ص = $\dfrac{e^{س}}{(١ - س)^{٢}}$

٦ . صً − ص = $جا^{٢}$ س

٧ . صً + صَ = جته س

٨ . صً − ٣ صَ − ٤ ص = $e^{س} + e^{٢س}$ [إرشاد : استعمل مبدأ التراكم]

٩ . صً − ٤ صَ + ٤ ص = $e^{٢س}$

١٠ . صً + ٢ صَ + ص = $e^{-س}$ لي | س |

١١ . أوجد حلاً خاصاً للمعادلة

$$صً + \frac{١}{س} صَ - \frac{ص}{س^{٢}} = \frac{١}{س^{٢} + س^{٣}} \text{ ، } (س > ٠) \text{ ،}$$

علماً بأن للمعادلة المتجانسة حلين هما $ص_1 = س$ ، $ص_2 = 1/س$.

١٢ . أوجد حلا خاصاً للمعادلة

$$ص'' - \frac{2}{س} ص' + \frac{2}{س^2} ص = \frac{لي\,|س|}{س} \quad ، (س > 0)$$

علماً بان للمعادلة المتجانسة حلين هما $ص_1 = س$ ، $ص_2 = س^2$

١٣ . بيِّن ان $ص = \frac{1}{W} \int_{0}^{س} ق(ن)\ جا\ W (س - ن)\ د ن$ حل خاص للمعادلة $ص''$

$+ W^2 ص = ق(س)$

١٤ . خذ هذه المعادلة ذات الرتبة الثالثة :

$ص''' + أ ص'' + ب ص' + حـ ص = ق(س)$.

وليكن $ص_1(س)$ ، $ص_2(س)$ ، $ص_3(س)$ ثلاثة حلول مستقلة خطياً (انظر التمارين (٣ - ٢ - ٨) ، (٣ - ٢ - ٩) ، (٣ - ٢ - ١٠)) ولنفرض ان للمعادلة حلا من النوع

$ص(س) = حـ_1(س) ص_1(س) + حـ_2(س) ص_2(س) + حـ_3(س) ص_3$ $(س)$

أ) باتباع الخطوات التي اتبعناها في طريقة تغيير الثوابت في معاملات الرتبة الثانية، استنتج اجراء مماثلا لمعادلات الرتبة الثالثة

ب) أوجد حلا خاصاً للمعادلة $ص''' - 2 ص' - 4 ص = e^{-س}\ جا\ س$

١٥ . استعمل الطريقة التي استنتجتها في التمرين ١٤ لايجاد حل خاص للمعادلة :

$$ص''' + ٥ ص'' + ٩ ص' + ٥ ص = ٣ e^{٢س}$$

٣ ـ ٨ المعاملات المتغيرة :

معادلة اويلر

في هذا البند سندرس حالة خاصة ذات معاملات متغيرة، ولدينا طرق معروفة لحلها. المعادلة

$$س^٢ ص'' + أ س ص' + ب ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٤٦)$$

حيث أ ، ب ثابتان تسمى **معادلة اويلر**، ونقابلها في مسألة سريان الحرارة على طبق ذي بعدين وحالة ثابتة. ويمكن ان نحلها بايجاد حل من النوع ص = $س^{\lambda}$ حيث λ ثابت ما. فاذا عوضنا ذلك في المعادلة (٣ ـ ٤٦) ينتج :

$$س^٢ [\lambda(\lambda - ١) س^{\lambda - ٢}] + أ س \lambda س^{\lambda - ١} + ب س^{\lambda} = ٠ \ ،$$

وبالقسمة على $س^{\lambda}$ ينتج :

$$\lambda^٢ (أ - ١) \lambda + ب = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٤٧)$$

فاذا كان $د_١$ ، $د_٢$ جذرين مختلفين للمعادلة (٣ ـ ٤٧) ينتج لنا جذران مستقلان خطياً هما $ص_١ = س^{د_١}$ ، $ص_٢ = س^{د_٢}$ فالحل العام :

$$ص(س) = حـ_١ س^{د_١} + حـ_٢ س^{د_٢}$$

وسنرى في المثال ٣ ـ ٨ ـ ٤ ان للعبارة $س^{د_١}$ معنى حتى عندما يكون $د_١$ مركباً ويكون الجذران عددين مركبين مترافقين.

وفي حالـة الجـذر المـزدوج، حيث $د = د_١ = د_٢$ نستعمـل طريقة البند (٣ ـ ٣).

وواضح ان ص (س) = س ^{د} حل فلايجاد حل آخر مستقل خطياً نستعمل المعادلة (٣ـ ١٦) فنحصل على :

$$ص_{٢}\,(س) = س^{د} \int \frac{سا\,[-\int (أ/س)\, د\,س]}{س^{٢د}}\, د\,س = س^{د} \int س^{-أ-٢د}\, د\,س \;.$$

فلأن د جذر مزدوج في المعادلة (٣ ـ ٤٧) فقانون المعادلة التر بيعية يعطي د = (١ - أ)/٢ ، فيكون -أ - ٢د = -١، فيكون

$$ص_{٢}\,(س) = س^{د} \int س^{-١}\, د\,س = س^{د}\, لي\, س \;. \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٤٨)$$

فيكون الحل العام للمعادلة (٣ ـ ٤٦)، في حالة الجذر المزدوج هو :

$$ص\,(س) = حـ_{١}\, س^{د} + حـ_{٢}\, س^{د}\, لي\, س \;. \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٤٩)$$

ولا بد من الاشارة الى ان هذه الطريقة تصح مع معادلات اويلر ذات الرتب الأعلى :

$$س^{ن}\, ص^{(ن)} + أ_{ن-١}\, س^{ن-١}\, ص^{(ن-١)} + \ldots + أ_{١}\, س\, صَ +$$

$$أ_{.}\, ص = ٠ \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٥٠)$$

وفي حالة الرتبة ن يلزم طبعاً ايجاد جذور الحدودية ذات الدرجة ن التي نحصل عليها بتعويض ص = س$^{\lambda}$ في المعادلة (٣ ـ ٤٩) ثم القسمة على س$^{\lambda}$.

المثال ٣ ـ ٨ ـ ١ س^{٢} صً + س صَ - ص = ٠

ضع ص = س$^{\lambda}$ فينتج $\lambda\,(\lambda - ١)$ س$^{\lambda}$ + λ س$^{\lambda}$ - س$^{\lambda}$ = ٠ ، وبعد القسمة على س$^{\lambda}$ يبقى :

$\lambda^{٢} - ١ = ٠$ ،

فلأن جذري هذه المعادلة هما $\pm$ ١ ، يكون الحل العام

$$ص = حـ_{١} س + حـ_{٢} س^{-١} .$$

المثال ٣ ـ ٨ ـ ٢ $س^{٢} صً - ٥ س صَ + ٩ ص = ٠$ ضع $ص = س^{\lambda}$ ، فبعد القسمة على $س^{\lambda}$ ، ينتج :

$$\lambda (\lambda - ١) - ٥ \lambda + ٩ = \lambda^{٢} - ٦ \lambda + ٩ = ٠ .$$

فالجذر الوحيد هو د = ٣ . فالحل العام ، استناداً الى (٣ ـ ٤٩) هو :

$$ص (س) = حـ_{١} س^{٣} + حـ_{٢} س^{٣} لي س .$$

المثال ٣ ـ ٨ ـ ٣ $س^{٣} صً + س^{٢} صً - ٢ س صَ + ٢ ص = ٠$. هذه معادلة اويلر من الرتبة الثالثة ، من النمط (٣ ـ ٥٠) . ضع $ص = س^{\lambda}$ ، فبعد التفاضل والتبسيط نحصل على المعادلة

$$(\lambda^{٣} - ٢ \lambda^{٢} - \lambda + ٢) س^{\lambda} = ٠ .$$

وبالقسمة على $س^{\lambda}$ نحصل على المعادلة التكعيبية

$$\lambda^{٣} - ٢ \lambda^{٢} - \lambda + ٢ = ٠ ،$$

وجذورها: $\lambda_{١} = ١$ ، $\lambda_{٢} = -١$ ، $\lambda_{٣} = ٢$. فالحل العام

$$ص (س) = حـ_{١} س + حـ_{٢} س^{-١} + حـ_{٣} س^{٢} .$$

المثال ٣ ـ ٨ ـ ٤ $س^{٢} صً - س صَ + ٢ ص = ٠$ ، $س > ٠$ ضع $ص = س^{\lambda}$ ، فبعد التبسيط تحصل على المعادلة $\lambda^{٢} - ٢ \lambda + ٢ = ٠$ وجذراها $\lambda_{١} = ١ + i$ ، $\lambda_{٢} = ١ - i$. فيكون $ص_{١} = س^{١+i}$ ، $ص_{٢} = س^{١-i}$ وهذان حلان مستقلان خطيا .

ولكي نضع الحلين بصيغة أكثر فائدة، نذكر ان س = $e^{\text{لي س}}$ ، ونستعمل قاعدة اويلر:

$e^{i\theta}$ = جتا θ + i جا θ ، فنجري ما يلي :

ص$_1$ = س$^{1+i}$ = س • س^{i} = س $e^{i \text{ لي س}}$ = س (جتا لي س + i جا لي س) .

وبالمثل ص$_2$ = س (جتا لي س − i جا لي س) وحسب طريقة المعادلة (٣ ـ ٣١) نجعل

$$\text{ص}^*_1 = \frac{1}{2}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2) \text{ ، } \text{ص}^*_2 = \frac{1}{2i}(\text{ص}_1 - \text{ص}_2) \text{ ،}$$

فنحصل على الحلين التاليين وهما مستقلان خطياً:

ص$^*_1$ = س جتا لي س ، ص$_2$ = س جا لي س .

وبالطبع يكون هذان الحلان معرفين شرط ان يكون س > ٠

نستعمل هذه الطريقة كلما كانت الجذور مركبة . والنظرية التالية خلاصة كل نتائج هذا البند :

النظرية ٣ ـ ٩ في معادلة اويلر (٣ ـ ٤٦)، ليكن λ_1 ، λ_2 جذري المعادلة (٣ ـ ٤٧).

١ . اذا كان λ_1 ، λ_2 عددين حقيقيين مختلفين، فالحل العام هو :

ص = حـ$_1$ $|\text{س}|^{\lambda_1}$ + حـ$_2$ $|\text{س}|^{\lambda_2}$.

٢ . واذا كان λ_1 = λ_2 فالحل العام :

ص = حـ$_١$ | س | $^{\lambda_1}$ + حـ$_٢$ | س | $^{\lambda_2}$ لي | س | .

٣ . واذا كان λ_1 ، λ_2 مركبين مترافقين (λ_1 = أ + i ب ، λ_2 = أ − i ب) فالحل العام :

ص = | س |^{أ} [حـ$_١$ جتا (لي | س |^{ب}) + حـ$_٢$ جا (لي | س |^{ب})].

التمارين ٣ ـ ٨

في التمارين ١ الى ٧ أوجد الحل العام لكل معادلة تفاضلية . وحيث تعطى شروطاً ابتدائية أوجد حلا خاصاً :

١ . س^٢ ص‌ً − ٢ ص = ٠ ، ص (١) = ٣ ، ص (١) = ١

٢ . ٤ س^٢ صً − ٤ س صَ + ٣ ص = ٠ ، س > ١ ، ص (١) = ٠ ، صَ (١) = ١

٣ . س^٢ صً + ٣ س صَ + ٢ ص = ٠

٤ . س^٢ صً − ٣ س صَ + ٣ ص = ٠

٥ . س^٢ صً + ٥ س صَ + ٤ ص = ٠ ، س > ٠ ، ص (١) = ١ ، صَ (١) = ٣

٦ . س^٢ صً + ٥ س صَ + ٥ ص = ٠

٧ . س^٣ صٍّ + ٤ س^٢ صً − ٨ س صَ + ٨ ص = ٠

٨ . هذه طريقة أخرى لحل معادلة اويلر (٣ ـ ٤٦).

أ) اجعل س = $e^{ن}$ ، واستعمل طريقة السلسلة لبيان ما يلي :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{س} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \text{ ، } \frac{\text{د}^{٢}\text{ ص}}{\text{د ن}^{٢}} = \text{س}^{٢} \frac{\text{د}^{٢}\text{ ص}}{\text{د س}^{٢}} + \text{س} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

ب) بتعويض هذين حول المعادلة (٣ ـ ٤٦) الى معادلة خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة.

٩. حل $\text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٢\,\text{س}\,\text{ص}' - ١٢\,\text{ص} = ٠$ بطريقة التمرين ٨. حل المعادلة اولا بدلالة ن ثم حول الجواب الى حل بدلالة س.

١٠. حل $\text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + \text{س}\,\text{ص}' + \text{ص} = ٠$ بطريقة التمرينين ٨ ، ٩.

في التمارين الأربعة القادمة استعمل طريقة التمرين ٨ لتحويل كل معادلة الى معادلة خطية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة، ثم أوجد الحل بطرق البندين (٣ ـ ٦) و(٣ ـ ٧)

١١. $\text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٧\,\text{س}\,\text{ص}' + ٥\,\text{ص} = \text{س}$

١٢. $\text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٣\,\text{س}\,\text{ص}' - ٣\,\text{ص} = ٥\,\text{س}^{٥}$

١٣. $\text{س}^{٢}\,\text{ص}'' - ٢\,\text{ص} = \text{لو س ، س} > ٠$

١٤. $٤\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}'' - ٤\,\text{س}\,\text{ص}' + ٣\,\text{ص} = \text{جا لو}(-\text{س})\text{، س} < ٠$

١٥. احسب رنسكية الحلين في كل من الحالات الثلاث في النظرية ٣ ـ ٩ واثبت انها لا تكون صفراً.

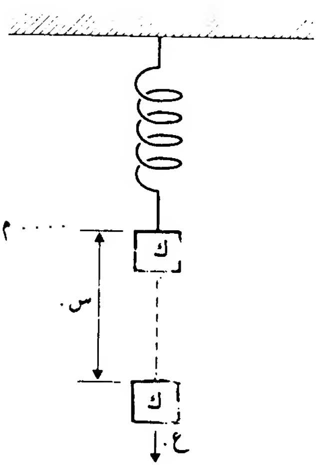
٣ ـ ٩ حركة التأرجح Vibratory Motion

كان بدء دراسة المعادلات التفاضلية في محاولة لوصف حركات الاجسام. ولنأخذ مثالا بسيطاً. افرض كتلة مقدارها ك مربوطة بسلك ملتف (نابض) طوله $\text{ل}_{\text{و}}$ وطرفه

العلوي ثابت (انظر الشكل ٣ ـ ٢).

لقـد أشـرنـا بالحـرف م الى وضع توازن الكتلة في السلك، اي النقطة التي تثبت عندها الكتلة. ولنفرض ان الكتلة اعطيت ازاحة اولية مقدارها س. وسرعة اولية مقدارها ع. فهل يمكن ان نصف حركة الكتلة ؟ لذلك نتخذ الافتراضات التالية بشأن القوة التي يبذلها السلك على الكتلة :

أ) انها تتحرك في خط رأسي يمر بمركز ثقل الكتلة (ونعتبرها نقطة كتلة)، واتجاهها هو



الشكل ٣ ـ ٢

دائماً من موضع الكتلة نحو نقطة التوازن.

ب) في أي زمن ق فان القـوة المبـذولـة على الكتلة تتنـاسب مع الفـرق بين طول السلك، ل ، عندئذٍ ..وطـولـه ل. عنـد التـوازن، وثابت التناسب λ موجب ويسمى الثابت النوعي للسلك. وهذا المبدأ يسمى قانون هوك Hooke's Law .

وينص قانـون نيـوتن الثـاني في الحـركـة على ان القوة ق التي تؤثر على نقطـة كهـذه تتحـرك بسرعة متغيرة ع تساوي مقدار تغير زخم الحركة، م ع ،

مع الزمن أي أن

$$ق = \frac{د(م ع)}{د ن} = م ت .$$

فمعادلة القوتين وتطبيق قانون هوك يفضي الى المعادلة

$$ك \frac{د^{٢} س}{د ن^{٢}} = - \lambda س ، \quad \text{.......................} \quad (٣ - ٥١)$$

حيث س (ن) هو مقدار بعد الكتلة عن موقع التوازن، ويكون هذا البعد موجباً عندما يكون السلك مشدوداً. والأشارة السالبة في المعادلة (٣ - ٥١) سببها ان القوة تعمل دائماً نحو وضع التوازن، فهي تكون في الاتجاه السالب عندما يكون س موجباً.

يلاحظ اننا اهملنا كل القوى الأخرى التي تؤثر على السلك (كالاحتكاك ومقاومة الهواء، الخ). فالمعادلة (٣ - ٥١) تفضي الى مسألة ذات قيم ابتدائية، هي :

$$\frac{د^{٢} س}{د ن^{٢}} + \frac{\lambda}{م} س = ٠ ، \quad س (٠) = س_{٠} ، \quad سَ (٠) = ع \quad .$$

$$\text{.................................} (٣ - ٥٢)$$

وعند حل المعادلة (٣ - ٥٢) نجد ان المعادلة المساعدة لها جذران تخيليان هما $\pm i \sqrt{\lambda / ك}$ فالحل العام هو

$$س (ن) = حـ جتا \sqrt{\lambda/ك}\, ن + د جا \sqrt{\lambda/ك}\, ن .$$

وهذه المعادلة من نوع المعادلة (٣ ـ ٣٣)، فلذا تسمى حركة هذه الكتلة حركة توافقية بسيطة. وبتعويض الشروط الابتدائية ينتج ان حـ = س. ، د = ع. / $\sqrt{\lambda / ك}$.

فحل المعادلة (٣ ـ ٥٢) هو :

س (ن) = س. جتا $\sqrt{\lambda / ك}$ ن + (ع. / $\sqrt{\lambda / ك}$) جا $\sqrt{\lambda / ك}$ ن.

.... (٣ ـ ٥٣)

فنستخدم القاعدة جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جتا ب، ونرمز الى

$\sqrt{س._{}^{٢} + ك ع._{}^{٢} / \lambda}$ بالرمز أ، والى س. $\sqrt{\lambda / ك}$ / ع. بالرمز ظا$\propto$ ، فينتج :

س (ن) = أ جا ($\sqrt{\lambda / ك}$ ن + $\propto$). .... (٣ ـ ٥٤)

من هذه المعادلة يتبين ان الكتلة تخطر بين الوضعين ± أ. فلذا نسمي أ سعة الحركة. ولأن دورة الجيب هنا ٢π $\sqrt{ك / \lambda}$ فهذا هو الزمن اللازم لكل خطرة كاملة. وتردد الحركة هو عدد الخطرات الكاملة في وحدة الزمن :

د = $\sqrt{\lambda / ك}$ / ٢π. .... (٣ ـ ٥٥)

يلاحظ ان السعة تعتمد على الشروط الابتدائية في حين ان التردد لا يعتمد عليها.

المثال ٣ ـ ٩ ـ ١ خذ سلكاً ثبت طرفه العلوي وتدلى من طرفه السفلي ثقل مقداره ١٠ باوند. ولنفرض ان هذا الثقل يشد الخيط ٦ بوصات. فما معادلة الحركة لهذا الثقل اذا شد الى ٤ بوصات تحت موضع التوازن ثم أفلت ؟

الحل* : نستعمل قانون هوك . فبما ان قوة ١٠ باوند تشد السلك $\frac{١}{٢}$.قدم فان ١٠ = λ ($\frac{١}{٢}$) ي ان λ = ٢٠ (باوند / قدم) . وقد اعطينا الشرطين الابتدائيين س. = $\frac{١}{٣}$ (قدم) وع. = ٠ فمن المعادلة (٣ ـ ٥٣) والمتطابقة λ /ك = حـ λ. /و= ٦٤ ينتج :

$$س (ن) = \frac{١}{٣} جتا ٨ ن$$

فالسعة $\frac{١}{٣}$ قدم أي ٤ بوصة ، والتردد د = ٤/π خطوات في الثانية .

التأرجح المكبوح Damped Vibrations

في بحثنا السابق اعتبرنا ان السلك لا تؤثر عليه قوى خارجية . وهذا افتراض غير واقعي . فاذا اخذنا بعين الاعتبار قوى مثل احتكاك السلك ومقاومة الهواء لزم ان نعتبر ان هنالك قوة مخففة (تميل الى كبح الحركة) وهي محصلة جميع القوى الخارجية (عدا الجاذبية) التي تؤثر على السلك . ومن المعقول ان نفترض ان مقدار هذه القوة المخففة يتناسب مع سرعة الجسم . (فمثلا كلما انخفضت السرعة انخفضت مقاومة الهواء) . لذا نضيف الى المعادلة (٣ ـ ٥١) حلاً هو مـ (د س / د ن) حيث مـ هو ثابت الكبح ويعتمدعلى عوامل خارجية ، ويمكن تحديده بالتجربة . فتصبح معادلة الحركة

$$\frac{د^{٢} س}{د ن^{٢}} = - \frac{\lambda}{ك} س - \frac{مـ}{ك} \frac{د س}{د ن} ، س (٠) = س. ، سَ (٠) = ع. . . (٣-٥٦)$$

*ستعمل المتطابقة ك = و /حـ لتحويل الوزن الى كتلة . تذكر ان الباوند وحدة وزن (قوة) وان الكيلوغرام وحدة كتلة .

[وبالطبع، بما ان $م_{ـ}$ يعتمد على عوامل خارجية فقد لا يكون ثابتاً بل يتغير حسب الزمن وحسب موضع الجسم المتحرك فعندها يكون $م_{ـ}$ هو $م_{ـ}(ن ، س)$ وعندها تصبح المعادلة اصعب بكثير مما لو كان $م_{ـ}$ ثابتاً.]

فلدراسة المعادلة (٣ ـ ٥٦) نبدأ بأيجاد جذري المعادلة المساعدة، وهما :

$$\frac{-م_{ـ} \pm \sqrt{م_{ـ}^{٢} - ٤ ك \lambda}}{٢ ك} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٣ ـ ٥٧)$$

وتعتمد طبيعة الحل العام على لفارق $\sqrt{م_{ـ}^{٢} - ٤ ك \lambda}$. فاذا كان $م_{ـ}^{٢} > ٤ ك \lambda$ كان الجذران سالبين لأن $\sqrt{م_{ـ}^{٢} - ٤ ك \lambda} > م_{ـ}$، فهنا يكون

$$س (ن) = حـ_{١} \, سا \left(\frac{-م_{ـ} + \sqrt{م_{ـ}^{٢} - ٤ ك \lambda}}{٢ ك} ن \right)$$

$$+ حـ_{٢} \, سا \left(\frac{-م_{ـ} - \sqrt{م_{ـ}^{٢} - ٤ ك \lambda}}{٢ ك} ن \right) \quad \dots\dots \quad (٣ ـ ٥٨)$$

فهنا تتناقص س (ن) مع الزمن مهما تكن الشروط الابتدائية.

وكذلك عندما يكون الفارق صفراً يكون :

$$س (ن) = e^{(-م_{ـ}/٢ ك) ن} (حـ_{١} + حـ_{٢} ن)، \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٣ ـ ٥٩)$$

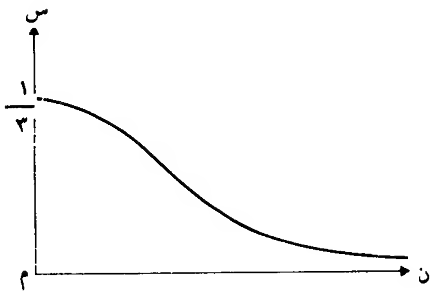
وهنا أيضاً يتناقص س (ن) مع الزمن. فمثلاً اذا كان $\mu = ٥$ (باوند ثانية / قدم) في المثال ٣ ـ ٩ ـ ١ ، يكون الفارق صفراً ويكون

$$س (ن) = e^{-\lambda ن} (حـ_{١} + حـ_{٢} ن).$$

فاذا عوضنا القيم الابتدائية يصير

$$س(ن) = \frac{١}{٣} e^{-\lambda ن} (١ + \lambda ن) ،$$

والخـط البيـاني لهذه هو المبـين بالشكل ٣ ـ ٣ ونلاحظ ان الحركة لا تتأرجح . ومثل هذه الحركة ما يحدث في وسط لزج (كالزيت والماء) .



الشكل ٣ ـ ٣

واذا كان $م^{٢} < ٤ ك \lambda$ يصبح الحل العام .

$$س(ن) = e^{(-م/٢ك)ن} \left(ح_{١} \text{ جتا } \frac{\sqrt{٤ك\lambda - م^{٢}}}{٢ ك} ن + ح_{٢} \text{ جا } \frac{\sqrt{٤ك\lambda - م^{٢}}}{٢ ك} ن \right) ، \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٦٠)$$

وهذا تأرجح تردده

$$د = \frac{\sqrt{٤ ك \lambda - م^{٢}}}{٤ \pi ك}$$

والعامل $e^{(-م / ٢ك) ن}$ يسمى **عامل الكبح** . ففي المثال ٣ ـ ٩ ـ ١ :

فاذا كان مـ = ٤ (قدم ثانية / قدم)، يصبح الحل العام

$$س(ن) = e^{-٣٢ن/٥} (حـ_١ جتا \frac{٢٤}{٥} ن + حـ_٢ جا \frac{٢٤}{٥} ن).$$

فاذا عوضنا القيم الابتدائية نجد ان $حـ_١ = \frac{١}{٣}$ ، $حـ_٢ = \frac{٤}{٩}$

والخط البياني لهذه الحركة مبين بالشكل ٣ ـ ٤ .

التأرجح المدفوع

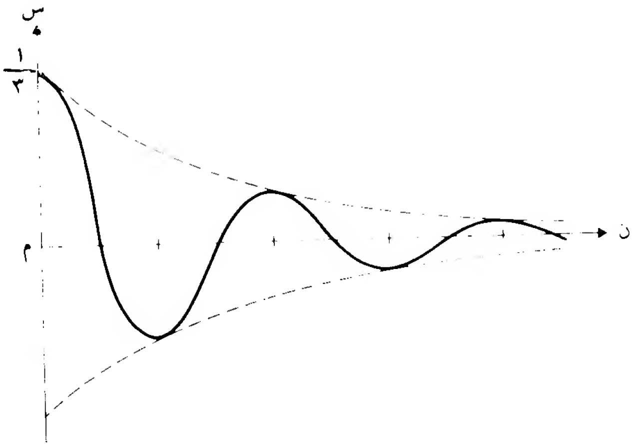
تعتمد الحركة التي درسناها في الحالتين السابقتين على القوى الذاتية للسلك والثقل والقوى الطبيعية التي تؤثر عليها. لهذا تسمى الحركة في هاتين الحالتين بالتأرجح الحر أو الطبيعي وسندرس الآن الحالة عندما تكون هناك قوة خارجية دورية تؤثر على الجسم هي ث جا W ن ، كأن يكون الجسم الذي ثبت فيه السلك ذا حركة معينة (انظر الشكل ٣ ـ ٢). وفي هذه الحالة تتحرك الكتلة في **تأرجح مدفوع** (Forced).

فالمعادلة (٣ ـ ٥٦) يستعاض عنها بمعادلة تفاضلية غير متجانسة من الرتبة الثانية هي :

$$ك \frac{د^٢ س}{د ن^٢} = - \lambda س - مـ \frac{د س}{د ن} + ث جا W ن ،$$

ونكتبها بالشكل :

$$\frac{د^٢ س}{د ن^٢} + \frac{مـ}{ك} \frac{د س}{د ن} + \frac{\lambda}{ك} س = \frac{ث}{م} جا W ن \quad ...... \quad (٣ ـ ٦١)$$



الشكل ٣ ـ ٤

ونعرف بطريقة المعاملات غير المحددة ان س (ن) لها حل خاص هو :

$$\text{س}_{\text{ح}}(\text{ن}) = \text{جـ}_{1}\ \text{جتا}\ W\ \text{ن} + \text{جـ}_{2}\ \text{جا}\ W\ \text{ن} \qquad \ldots\ldots (٣ ـ ٦٢)$$

فنعوض هذا الاقتران في (٣ ـ ٦١) فتنتج المعادلتان الآيتان :

$$\left(\frac{\lambda}{\text{ك}} - W^{2}\right)\text{جـ}_{1} + \frac{\text{مـ}\ W}{\text{ك}}\ \text{جـ}_{2} = ٠$$

$$-\frac{\text{مـ}\ W}{\text{ك}}\ \text{جـ}_{1} + \left(\frac{\lambda}{\text{ك}} - W^{2}\right)\text{جـ}_{2} = \frac{\text{ث}}{\text{ك}} \qquad \ldots\ldots (٣ ـ ٦٣)$$

ومنهما نستنتج ان

$$\text{حـ}_{1} = \frac{-\ \text{ث}\ \text{مـ}\ W}{(\lambda - \text{ك}\ W^{2})^{2} + (\text{مـ}\ W)^{2}}\ ،$$

$$حـ_2 = \frac{ث(\lambda - ك W^2)}{(\lambda - ك W^2)^2 + (مـ W)^2}.$$

وبمثل الطريقة التي بها حصلنا على المعادلة (٣ ـ ٥٤) نجد ان :

$$س_ح (ن) = أ جا (W ن + \propto) ، \qquad \text{.................} \qquad (٣ - ٦٤)$$

حيث

$$أ = \frac{ث}{\sqrt{(\lambda - ك W^2)^2 + (مـ W)^2}} ، \quad ظا \propto = \frac{مـ W}{ك W^2 - \lambda}.$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (٣ ـ ٦١)، نضيف الحل العام للمعادلة المتجانسة الى الحل الخاص (٣ ـ ٦٤). وهنا أيضاً تعتمد طبيعة الحل العام على المميز $\sqrt{مـ^2 - 4 ك \lambda}$ فاذا كان $مـ^2 \geqslant 4 ك \lambda$ ، فهنا ينضاف الاقتران الدوري (٣ ـ ٦٤) الى المعادلة (٣ ـ ٥٨) أو المعادلة (٣ ـ ٥٩). ولأن (٣ ـ ٥٨) و(٣ ـ ٥٩) يتضاءلان مع الزمن، فعندما تصير ن كبيرة تكون الحركة قريبة من (٣ ـ ٦٤).

واذا كان $مـ^2 < 4 ك \lambda$، فلنفرض اولا ان مـ = ٠ ، فيكون الحل العام عندما $\sqrt{\lambda / ك} \neq W$ هو

$$س (ن) = حـ_1 جتا \sqrt{\lambda / ك}\, ن + جـ_2 جا \sqrt{\lambda / ك}\, ن +$$

$$\frac{ث}{ك (\lambda / ك - W^2)} جا W ن \qquad \text{.......................} \qquad (٣ - ٦٥)$$

يلاحظ ان تأثير القوة الدورية ت جا W ن هو انها تنضاف الى الحركة التوافقية البسيطة ودورة هذه الحركة المضافة هي نفسها دورة القوة الخارجية ، وسعتها تكون ثابتة اذا كانت

W ثابتة، فاذا قاربت W المقدار $\sqrt{\lambda/\text{ك}}$ تقترب السعة من اللانهاية. واذا كانت W = $\sqrt{\lambda/\text{ك}}$ صار الحل الخاص على النحو :

$$\text{س}_{\text{ح}}(\text{ن}) = \text{ج}_1\,\text{ن جتا}\,W\,\text{ن} + \text{ج}_2\,\text{ن جا}\,W\,\text{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٣ - ٦٦})$$

فتعويض (٣ - ٦٦) في (٣ - ٥٢) مع اتخاذ $\text{ج}_1 = -\text{ث}/2W$ ، $\text{ج}_2 = 0$ نحصل على الحل العام التالي :

$$\text{س}(\text{ن}) = \text{حـ}_1\,\text{جتا}\,W\,\text{ن} + \text{حـ}_2\,\text{جا}\,W\,\text{ن} - \frac{\text{ث}}{2W}\,\text{ن جتا}\,W\,\text{ن} \quad \ldots \quad (\text{٣ - ٦٧})$$

نلاحظ انه كلما تزايد التأرجح دون حد. وبالطبع ان هذا لا يحدث في الواقع لأنه لا بد من قيام مقاومة للحركة (مـ ≠ ٠). الا ان من المؤكد انه اذا كانت المقاومة ضعيفة، وكانت قوة التنشيط تتفق مع التأرجح الحر فإن الازاحة س تكبر حتى تتجاوز حد مرونة السلك فينقطع اويتشوه. واذا كانت W = $\sqrt{\lambda/\text{ك}}$ نقول ان القوة الخارجية في تجاوب او تزامن مع الكتلة المتأرجحة.وظاهرة التجاوب هذه ذات اهمية كبيرة في علم المعمار، ففي بعض الأحيان، كما في حالة السلك الذي ندرسه، يلزم ان نتحاشى حالة التجاوب حتى لا يقع توتر غير محتمل. الا ان هذا التجاوب مرغوب فيه في كثير من مسائل الراديو.

التمارين ٣ - ٩*

١. سلك مطاطي احد طرفيه مثبت عند النقطة أ، وفي الطرف الآخر ب كتلة مقدارها ١ كغ، أ ب في وضع رأسي وطوله يزيد ١٦ سم عن السلك الأصلي. فاذا بذل على الكتلة شد إضافي نزل بها مسافة ٨سم تحت ب ثم افلتت فكم تكون

---

* انظر حاشية المثال ٣ - ٩ - ١

سرعتها عندما تعود الى ب؟ (اهمل المقاومة).

٢ . في التمـرين ١ اذا رفعت الكتلة مسـافـة ٨سم فوق ب ثم افلتت، فكم تكون سرعتها عندما تكون فوق ب بمسافة ١ سم ؟

٣ . قطعة خشب اسطـوانيـة طول كل من ارتفـاعهـا ونصف قطـرهـا ١ قدم، ووزنهـا ١٢,٤٨ باوند، طفت على سطح الماء ومحورها في وضع رأسي (كثافة الماء ٦٢,٤ باوند/قدم^{3}) فاذا ضغطت حتى تساوي سطحها العلوي مع سطح الماء، ثم افلتت، فكم تكون دورة تأرجحها وما معادلة حركتها ؟ اهمل المقاومة.

[**إرشاد** : الضغط على القطعة الى أعلى يساوي وزن الماء الذي تزيحه.]

٤ . قطعة خشب مكعبة، طول ضلعها ١ قدم، ضغطت في الماء حتى تساوى سطحها العلوي مع سطـح المـاء ثم أفلتت فوجـد ان دورة تأرجحها ١ ثانية. فما وزن القطعة ؟ اهمل المقاومة.

٥ . كتلة ١٠ غ معلقـة في طرف سلك وهي تتأرجـح تأرجحـاً حراً ضد مقـاومة تساوي رقميـاً لنصف السـرعـة (بالامتار / الثانية). فاذا كانت دورة التأرجح ٨ ثوانٍ فما الثابت النوعي للسلك (بالغرام / الثانية^{2}) ؟

٦ . علق ثقل ب باوند في سلك ثابته النوعي ١٠ باوند / قدم، فكان تأرجحه ضد مقاومة مقدارها بالباوند يساوي رقمياً لنصف السرعة (بالأقدام/الثانية) . فاذا كانت الدورة ثانية واحدة فما القيم الممكنةللثقل ب؟

٧ . كتلة ٥٠ غ علقت في طرف سلك فزادت طوله مقدار ١٠ سم. فاذا أثر على رأس السلك العلوي قوة دورية مقدارها ١٠ جا ٢ ن (غ . م / ث^{2}) وكانت المقاومة تساوي

١٠٠ $\sqrt{١٧}$ (غ / ت) مضروبة في السرعة بالأمتار/الثانية فما معادلة الحركة لهذه الكتلة ؟

٨. في التمرين ٧، اذا وقع الطرف العلوي للسلك تحت تأثير قوة مقدارها ١ - $e^{-\sqrt{\text{ح}}\,\text{ت}}$ غ/ث^{٢} فكم تكون الأزاحة بعد ثانية ؟

٣ ـ ١٠ الدوائر الكهربائية

سنستخدم المفاهيم التي درسناها في البند (٢ ـ ٨) بالأضافة الى طرق هذا الفصل لدراسة الدائرة الكهربائية البسيطة التي تشتمل على مقاومة وحث ومواسعة موصولة على التوالي مع قوة دافعة، كما في الشكل (٣ ـ ٥). افرض ان و ، ح ، س ، ق ثوابت. فبتطبيق قانون كرتشوف ينتج ما يلي :

$$\text{ح}\,\frac{\text{د ت}}{\text{د ن}} + \text{و ت} + \frac{\text{ش}}{\text{س}} = \text{ق} \qquad \text{(٣ ـ ٦٨)}$$

فنفاضل المعادلة (٣ ـ ٦٨) علماً بان د ش/د ن = ت ، فنحصل على معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية هي :

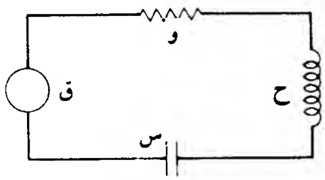
$$\text{ح}\,\frac{\text{د}^{٢}\,\text{ت}}{\text{د ن}^{٢}} + \text{و}\,\frac{\text{د ت}}{\text{د ن}} + \frac{\text{ت}}{\text{س}} = ٠ \qquad \text{(٣ ـ ٦٩)}$$

ولحل هذه المعادلة نكتب مساعدتها، وهي :

$$\lambda^{2} + \frac{\text{و}}{\text{ح}}\,\lambda + \frac{1}{\text{ح س}} = 0 \quad ، \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٧٠)$$

وهذه لها الجدران التاليان :

$$\lambda_{1} = \frac{-\text{و} + \sqrt{\text{و}^{2} - ٤\,\text{ح}/\text{س}}}{٢\,\text{ح}} \ ، \quad \lambda_{2} = \frac{-\text{و} - \sqrt{\text{و}^{2} - ٤\,\text{ح}/\text{س}}}{٢\,\text{ح}} \quad \ldots \quad (٣ - ٧١)$$



الشكل ٣ ـ ٥

المثال ٣ ـ ١٠ ـ ١ في الشكل (٣ ـ ٥) : نفرض ان ح = ١ هنري (هن) ، و= ١٠٠ اوم (م) ، و س = ١٠$^{-٤}$ فاراد (فد) ، ق = ١٠٠٠ فولت (ف) ، وانه عند ن = ٠ لم يكن هنالك شحنة ولا تيار جار وعندها وصلت الدائرة . فمن المعادلة (٣ ـ ٧١) ينتج ان المعادلة المساعدة لها الجذران التاليان :

$$\lambda_{1} = -٥٠ + ٥٠\sqrt{٣}\,i \ ، \quad \lambda_{2} = -٥٠ - ٥٠\sqrt{٣}\,i$$ ، فيكون

$$\text{ت (ن)} = e^{-٥٠\text{ن}} \left(\text{جـ}_{1}\ \text{جتا}\ ٥٠\sqrt{٣}\ \text{ن} + \text{جـ}_{2}\ \text{جا}\ ٥٠\sqrt{٣}\ \text{ن}\right)$$

ومن الشرط الابتدائي ت (٠) = ٠ ينتج ان $\text{حـ}_{1} = ٠$ ، فيكون :

$$\text{ت (ن)} = \text{حـ}_{2}\ e^{-٥٠\text{ن}}\ \text{جا}\ ٥٠\sqrt{٣}\ \text{ن} . \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٧٢)$$

فلأيجاد قيمة $ح_٢$ نقدم المعادلة (٣ ـ ٦٨) والشرط الابتدائي ش (٠) = ٠ فلأن

$$ش (ن) = س (ق - ح \frac{د ت}{د ن} - و ت)$$

$$= \frac{١}{١٠} - \frac{ح_٢}{٢٠٠} e^{-٥٠ن} (جا ٥٠ \sqrt{٣} ن + \sqrt{٣} جتا ٥٠ \sqrt{٣} ن) ،$$

ينتج انه عند ن = ٠ يكون $ح_٢ = ٢٠ \sqrt{٣}$ ، فيكون

$$س (ن) = \frac{١}{١٠} - \frac{١}{١٠ \sqrt{٣}} e^{-٥٠ن} (جا ٥٠ \sqrt{٣} ن + \sqrt{٣} جتا ٥٠ \sqrt{٣} ن)$$

$$، ت (ن) = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}} e^{-٥٠ن} جا ٥٠ \sqrt{٣} ن .$$

ومن هاتين المعادلتين نلاحظ ان التيار سيتلاشى بسرعة وان الشحنة ستصل بسرعة الى قيمتها عند الحالة الثابتة ، وهي $\frac{١}{١٠}$ كولوم (كل) .

المثـال ٣ ـ ١٠ ـ ٢ اذا كان الحث والمقـاومـة والمـواسعة كما في المثال (٣ ـ ١٠ ـ ١) ولكن كانت ق = ١٠٠٠ جا ٦٠ ن ، فحسب المعادلة (٣ ـ ٦٨) يكون :

$$\frac{د ت}{د ن} + ١٠٠ ت + ١٠^٤ ش = ١٠٠٠ جا ٦٠ ن ، \quad .... \quad (٣ ـ ٧٣)$$

نحول (٣ ـ ٧٣) حتى تكون كل الحدود بدلالة ش (ن) فيكون :

$$\frac{د^٢ ش}{د ن^٢} + ١٠٠ \frac{د ش}{د ن} + ١٠^٤ ش = ١٠٠٠ جا ٦٠ن . \quad .... \quad (٣ ـ ٧٤)$$

وواضح ان (٣ ـ ٧٤) لها حل خاص من النوع :

$$س_{ح}(ن) = ث_{١} \text{ جا } ٦٠ن + ث_{٢} \text{ جتا } ٦٠ن \qquad (٣ - ٧٥)$$

فلأيجاد قيمتي $ث_{١}$ ، $ث_{٢}$ نعوض (٣ ـ ٧٥) في المعادلة (٣ ـ ٧٣) فنجد المعادلتين الآنيتين :

$$٦٤٠٠ ث_{١} - ٦٠٠٠ ث_{٢} = ١٠٠٠ ،$$

$$٦٠٠٠ ث_{١} + ٦٤٠٠ ث_{٢} = ٠$$

فيكون $ث_{١} = \frac{٤٠}{٤٨١}$ ، $ث_{٢} = - \frac{٧٥}{٩٦٢}$ ،

ولأن الحل العام للمعادلة المتجانسة مثل حل المعادلة (٣ ـ ٦٩)، يكون الحل العام للمعادلة (٣ ـ ٦٨) هو

$$ش(ن) = e^{-٥٠ن} (جـ_{١} \text{ جتا } ٥٠ \sqrt{٣} ن + جـ_{٢} \text{ جا } ٥٠ \sqrt{٣} ن)$$

$$+ \frac{٤٠}{٤٨١} \text{ جا } ٦٠ ن - \frac{٧٥}{٩٦٢} \text{ جتا } ٦٠ ن \qquad (٣ - ٧٦)$$

فنفاضل (٣ ـ ٧٦) ونحصل على المعادلة

$$ت(ن) = ٥٠ e^{-٥٠ن} [(\sqrt{٣} حـ_{٢} - حـ_{١}) \text{ جتا } ٥٠ \sqrt{٣} ن -$$

$$(حـ_{٢} + \sqrt{٣} حـ_{١}) \text{ جا } ٥٠ \sqrt{٣} ن]$$

$$+ \frac{٢٤٠٠}{٤٨١} \text{ جتا } ٦٠ن + \frac{٢٢٥٠}{٤٨١} \text{ جا } ٦٠ن \qquad (٣ - ٧٧)$$

فنضع ن = ٠ ونطبق الشروط الابتدائية، فنحصل على المعادلتين الآتيتين :

$$ح_١ = \frac{٧٥}{٩٦٢} ،$$

$$٥٠ (\sqrt{٣} ح_٢ - ح_١) = - \frac{٢٤٠٠}{٤٨١} .$$

فيكون $ح_١ = \frac{٧٥}{٩٦٢}$ ، $ح_٢ = - ٧ \sqrt{٣} / ٩٦٢$ ، فيكون

$$س (ن) = \frac{e^{-٥٠ن}}{٩٦٢} (٧٥ جتا ٥٠ \sqrt{٣} ن - ٧ \sqrt{٣} جا ٥٠ \sqrt{٣} ن)$$

$$+ \frac{٨٠ جا ٦٠ن - ٧٥ جتا ٦٠ن}{٩٦٢}$$

$$ت (ن) = \frac{-e^{-٥٠ن}}{٤٨١} (٢٤٠٠ جتا ٥٠ \sqrt{٣} ن + ١٧٠٠ \sqrt{٣} جا ٥٠ \sqrt{٣} ن)$$

$$+ \frac{٢٤٠٠ جتا ٦٠ن + ٢٢٥٠ جا ٦٠ن}{٤٨١}$$

التمارين ٣ ـ ١٠

١ . في المثال ٣ ـ ١٠ ـ ١ : اذا كان ح = ٢ هن، و = ٥٠م ، س = ٣ × ١٠$^{-٤}$ فد، ق = ٢٠٠٠ ف، مع بقاء الشروط الأخرى على حالها، فأحسب التيار والشحنة لكل قيم ن ⩾ ٠ .

٢ . في المثال ٣ ـ ١٠ ـ ٢ : غيِّر ق الى ٥٠ جتا ٣٠ن واحسب ش (ن) لكل قيم ن ⩾ ٠ .

٣ . اذا كان ح = ١ هن، و= ١٢٠٠ م، س = ١٠ $^{-٦}$ فد، ت (٠) = شَ (٠) = ٠، ق = ١٠٠ حا ٦٠٠ ن ف فبين ايهما اكبر عددياً عند ن = ٠,٠٠١ ث : التيار المؤقت ام تيار الحالة الثابتة ؟

٤ . أوجد النسبة بين التيار الجاري في الدورة المبينة بالتمرين ٣ والتيار الذي يجري فيه لو لم يكن هنالك مقاومة، وذلك عند ن = ٠,٠٠١ ث .

٥ . ادرس المنظومة التي تحكمها المعادلة (٣ ـ ٦٨) عندما تكون صفراً وتكون ق = $ق_٠$ جا W ن : بيّن ان الحل يتكون من جزأين : حل عام فيه التردد ١ / $\sqrt{ح س}$، وحل خاص فيه التردد W . نسمي التردد ١ / $\sqrt{ح س}$ بالتردد الطبيعي للدائرة . لاحظ انه اذا كان W = ١ / $\sqrt{ح س}$ فان الحل الخاص يتلاشى .

٦ . في المعادلة (٣ ـ ٦٨) : لنفرض ان ق = $ق_٠$ $e^{iن}$ (= $ق_٠$ جتا ن + i $ق_٠$ جا ن) وذلك لنتيح احداث تغيير في الفولتية . ولنفرض ايضاً، كما في التمرين ٥، ان و= ٠ واخيراً لنفرض، للتبسيط، ان $ق_٠$ = ح = س = ١ . فيكون ١ = W = ١ / $\sqrt{ح س}$.

أ) بين ان المعادلة (٣ ـ ٦٩) تصبح $\frac{د^٢ ت}{د ن^٢}$ + ت = $e^{iن}$.

ب) عين λ حيث ت (ن) = λ ن $e^{iن}$ هو حل للمعادلة .

جـ) احسب الحل العام وبين ان التيار يتزايد بمرور الزمن دون حد . هذه الظاهرة ستفضي الى تجاوب .

٧ . وصلنا حثاً مقاديره ح هنري ومقاومة مقدارها و اوم ومواسعة مقدارها س

فاراد علىّ التوالي مع ق د ك مقدارها ق. جا W ن فولت. افرض ان س (٠) = ت (٠) = ٠ وان ٤ ح > و٢ س.

أ) أوجد تعبيراً لكل من س (ن) ، ت (ن).

ب) ما قيمة W التي تؤدي الى التجاوب ؟

٨. حل التمرين ٧ عندما يكون ٤ ح = و٢ س.

٩. حل التمرين ٧ عندما يكون ٤ ح > و٢ س.

---

٣ ـ ١١ تحليل الحجرات ٢

سنرى الآن كيف تستعمل طرق هذا الفصل في حل منظومات من ذات الحجرتين.

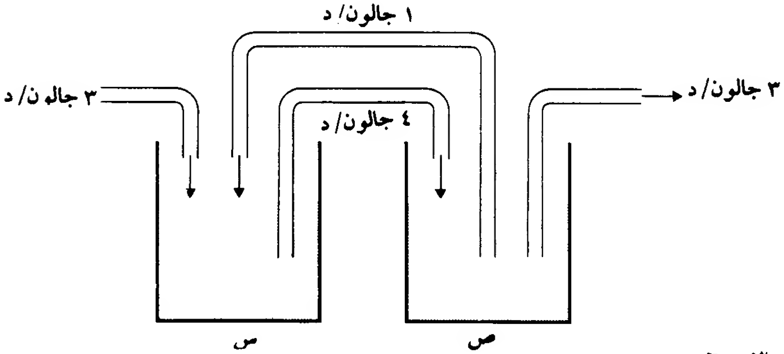
المثال ٣ ـ ١١ ـ ١ خذ وعاءين : س ، ص. أما س فيحتوي على ١٠٠ جالون من محلول اذيب فيه ١٠٠ باوند من الملح ، واما ص فيحتوي على ١٠٠ جالون من الماء العذب. وهناك ماء يصب في س بسرعة ٣ جالون في الدقيقة ، فيجري المحلول من س الى ص بسرعة ٤ جالون في الدقيقة ، وهناك مضخة تعيد من ص الى س جالوناً واحداً في الدقيقة ، في حين يخرج من ص الى الخارج ٣ جالون في الدقيقة ، (كما في الشكل ٣ ـ ٦). أوجد القيم العظمى للملح في الوعاء ص.

تمثل هذه المسألة بالمنظومة المفتوحة ذات الحجرتين ، المبنية بالشكل (٣ ـ ٧) ومعاملات التحويل الكسرية (انظر البند ٢ ـ ١٠) هي

$$ك_{٢١} = \frac{٤}{١٠٠} ، ك_{١٢} = \frac{١}{١٠٠} ، ك = \frac{٣}{١٠٠}$$

ولتكن س (ن) ، ص (ن) كميتي الملح في الوعاءين س ، ص في اللحظة ن. فيمكن ان نعبر عن سرعة تغير كمية الملح في كل وعاء بالمعادلتين التفاضليتين :

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{ك}_{١٢}\,\text{ص} - \text{ك}_{٢١}\,\text{س} \quad \text{،} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ \text{ ـ } ٧٨)$$



الشكل ٣ ـ ٦

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{ك}_{٢١}\,\text{س} - (\text{ك}_{١٢} + \text{ك})\,\text{ص}. \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ \text{ ـ } ٧٩)$$

هذه منظومة معادلات سندرسها بشكل أعم في الفصل ٧.

لاحظ ان م (ن) = ٠ لأن الذي يصب في الوعاء هو ماء صافٍ.

فاذا فاضلنا المعادلة (٣ ـ ٧٩) وعوضنا عن $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ بالمعادلة (٣ ـ ٧٨) ينتج :

$$\frac{\text{د}^{٢}\,\text{ص}}{\text{د ن}^{٢}} = \text{ك}_{٢١}\,(\text{ك}_{١٢}\,\text{ص} - \text{ك}_{٢١}\,\text{س}) - (\text{ك}_{١٢} + \text{ك})\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \qquad \ldots\ldots \quad (٣ \text{ ـ } ٨٠)$$

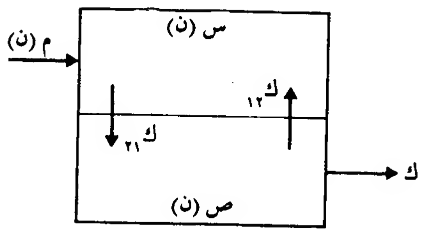
فنعوض عن $\text{ك}_{٢١}$ س في المعادلة (٣ ـ ٨٠) بقيمتها في المعادلة (٣ ـ ٧٩) فتنتج المعادلة التالية المتجانسة :

$$\frac{د^2 ص}{د ن^2} + (ك_{21} + ك_{12} + ك) \frac{د ص}{د ن} + ك ك_{21} ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٨١)$$

فجذرا المعادلة المساعدة هما $-\frac{١}{٥٠}$ ، $-\frac{٣}{٥٠}$، والحل العام للمعادلة (٣ ـ ٨١) هو

$$ص(ن) = حـ_1 e^{-ن/٥٠} + حـ_2 e^{-٣ن/٥٠} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٨٢)$$

ولأيجاد $حـ_1$ ، $حـ_2$ ، ينبغي ان نحصل على شرطين ابتدائيين : نعرف ان ص (٠) = ٠ ، ومن (٣ ـ ٧٩) ينتج ان



الشكل ٣ ـ ٧

$$صَ(٠) = ك_{21} س(٠) - (ك_{21} + ك) ص(٠) = ٤ .$$

فمن (٣ ـ ٨٢) وهذين الشرطين تنتج المعادلتان الآنيتان :

$$جـ_1 + جـ_2 = ٠ .$$

$$-\frac{حـ_1}{٥٠} - \frac{٣ حـ_2}{٥٠} = ٤ .$$

فيكون $حـ_1 = ١٠٠$ ، $حـ_2 = -١٠٠$. فقيمة الملح في الوعاء ص في أي لحظة ن

$$ص(ن) = ١٠٠ (e^{-ن/٥٠} - e^{-٣ن/٥٠}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٨٣)$$

ولأيجاد الوقت الذي تكون فيه هذه القيمة في نهايتها العظمى، تفاضل (٣ - ٨٣) فينتج

$$صَ(ن) = ٦ e^{-٣ن/٥٠} - ٢ e^{-ن/٥٠} = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٨٤)$$

نحل المعادلة لايجاد قيمة ن فنجد ان $e^{ن/٢٥} = ٣$ فتكون ن = ٢٥ لي ٣.

ويسهل ان نبين ان نهاية عظمى تحدث عندن = ٢٥ لي ٣ دقائق يكون في الوعاء ص:

$$ص(٢٥ لي ٣) = ١٠٠ (e^{-(لي ٣)/٢} - e^{-(٣ لي ٣)/٢}) = \frac{٢٠٠}{٣\sqrt{٣}} \text{ باوند}$$

من الملح. ومن السهل ايجاد عبارة تعطي س (ن) بتعويض (٣ - ٨٣) و (٣ - ٨٤) في المعادلة (٣ - ٧٩)، فينتج:

$$س(ن) = ٥٠ (e^{-ن/٥٠} + e^{-٣ن/٥٠}).$$

المثال ٣ - ١١ - ٢ الحركة الكيميائية: تصور تفاعلاً كيميائياً بين نوعين من الجزئيات أ، ب يجري حسب المعادلة

$$أ + ب \underset{ك_٢}{\overset{ك_١}{\rightleftarrows}} أب. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٨٥)$$

وافرض ان $س_١$، $س_٢$، $س_٣$ هي على الترتيب تركيزات المركبات أ، ب، أب. ففي مثل هذه المنظومة تجري عمليتان اساسيتان: تفاعل أمامي بسرعة $ر_م$، وتفاعل راجع بسرعة $ر_ج$. والتفاعل الراجع في (٣ - ٨٥) هو من الرتبة الأولى لأنه يعتمد على تركيز أب وحده. اي ان

$ر_{جـ} = ك_٢ س_٣$

والتفاعل الأمامي يتطلب تصادم جزئيات أ بجزئيات ب فهويتناسب مع حاصل ضرب تركيزيهما. فيكون $ر_{مـ} = ك_١ س_١ س_٢$. ولذا نقول ان $ر_{مـ}$ **تفاعل من الدرجة الثانية** ويسمى الثابتان $ك_١$ ، $ك_٢$ **معدلي التفاعل النوعيين**، ويشيران الى السرعة التي بها يجري التفاعل (على درجة حرارة ثابتة). ولأن تركيزي أ ، ب يتغيران بسرعة واحدة يمكن ان نصف سرعة تغير التركيز في أ، ب ، أ ب بالمعادلات:

$$\frac{د س_١}{د ن} = \frac{د س_٢}{د ن} = ر_{جـ} - ر_{مـ} = ك_٢ س_٣ - ك_١ س_١ س_٢ ،$$

$$\frac{د س_٣}{د ن} = ر_{مـ} - ر_{جـ} = ك_١ س_١ س_٢ - ك_٢ س_٣ .$$

وندرس الآن تفاعلا أسهل هو الانشطار:

$$أ + أ \underset{ك_٢}{\overset{ك_١}{\rightleftarrows}} أ_٢ \quad \text{.......................... (٣ - ٨٦)}$$

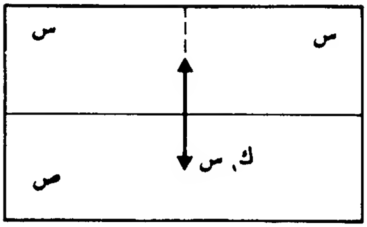
لنفرض ان التفاعل يجري في وعاء مغلق ذي حجم ثابت، ح ، وليكن س تركيز أ، ص تركيز ب ، فيكون معدل تغير التركيز في كل من أ، $أ_٢$ كما يلي:

$$\frac{د س}{د ن} = ٢ ك_٢ ص - ٢ ك_١ س^٢ ، \quad \text{.................... (٣ - ٨٧)}$$

$$\frac{د ص}{د ن} = ك_١ س^٢ - ك_٢ ص ، \quad \text{.................... (٣ - ٨٨)}$$

التضعيف في المعادلة (٣ ـ ٨٧) يشير الى ان أ$_٢$ ينحل الى أ، أ.

ويمكن ان يمثل هذا الوضع بمنظومة الحجرات الثلاث (في الشكل ٣ ـ ٨).



الشكل ٣ ـ ٨

نمضي كما صنعنا في المثال ٣ ـ ١١ ـ ١، فنفاضل المعادلة (٣ ـ ٨٧)، ونستخدم (٣ ـ ٨٧) و (٣ ـ ٨٨) كي نحصل على معادلة من الرتبة الثانية في س فقط :

$$\text{سً} = ٢\,ك_٢\,(ك_١\,س^٢ - ك_٢\,ص) - ٤\,ك_١\,س\,\text{سَ} = - ك_٢\,\text{سَ} - ٤\,ك_١\,س\,\text{سَ}$$

أي أن

$$\frac{د^٢\,س}{د\,ن^٢} + \frac{د\,س}{د\,ن}(٤\,ك_١\,س + ك_٢) = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٨٩)$$

وهذه معادلة من الرتبة الثانية، ولكنها غير خطية. فنستعمل التعويض التالي :

$$ف = \frac{د\,س}{د\,ن} \quad ، \quad \text{فَ} = ف\,\frac{د\,ف}{د\,س} = \frac{د^٢\,س}{د\,ن^٢}$$

فتحول المعادله الى :

$$\text{ف}\left(\frac{\text{د ف}}{\text{د س}} + ٤\,\text{ك}_{١}\,\text{س} + \text{ك}_{٢}\right) = ٠ \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (٣ - ٩٠)$$

فاما ان تكون ف = ٠، فيكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٠ ويكون التفاعل في حالة اتزان.

او ان يكون د ف = − (٤ ك$_{١}$ س + ك$_{٢}$) د س وهذا يعني ان

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{حـ}_{١} - \text{ك}_{٢}\,\text{س} - ٢\,\text{ك}_{١}\,\text{س}^{٢} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (٣ - ٩١)$$

فتقارن المعادلتين (٣ ـ ٩١) و (٣ ـ ٨٧) فنجد ان

$$٢\,\text{ك}_{٢}\,\text{ص} = -\,\text{ك}_{٢}\,\text{س} + \text{حـ}_{١} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (٣ - ٩٢)$$

وهذه تحدد حـ$_{١}$ اذا كانت الشروط الابتدائية معروفة، اي س (٠)، ص (٠) وبما ان ميل الخط (٣ ـ ٩٢) سالب، فاذا زاد تركيز أ$_{٢}$ ينقص تركيز أ، وبالعكس. واخيرا يمكن فصل المتغيرين في (٣ ـ ٩١)، فينتج :

$$\frac{١}{\text{أ}}\ \text{لي}\ \frac{٤\,\text{ك}_{١}\,\text{س} + \text{ك}_{٢} + \text{أ}}{٤\,\text{ك}_{١}\,\text{س} + \text{ك}_{٢} - \text{أ}} = \text{ن} + \text{حـ}_{٠}\ ،$$

حيث أ = $\sqrt{\text{ك}_{٢}^{٢} + ٨\,\text{حـ}_{١}\,\text{ك}_{١}}$. ومن ذلك ينتج بعد التبسيط الجبري .

$$\text{س}(\text{ن}) = \frac{\text{أ}}{٤\,\text{ك}_{١}}\left[\frac{\text{جـ}\,e^{\text{أن}} + ١}{\text{جـ}\,e^{\text{أن}} - ١} - \frac{\text{ك}_{٢}}{٤\,\text{ك}_{١}}\right]، \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (٣ - ٩٣)$$

$$\text{حيث حـ}_{٠} = \frac{٤\,\text{ك}_{١}\,\text{س}(٠) + \text{ك}_{٢} + \text{أ}}{٤\,\text{ك}_{١}\,\text{س}(٠) + \text{ك}_{٢} - \text{أ}}\ .$$

ومن (٣ ـ ٩٣) نلاحظ انه بازدياد ن تقترب س من (أ − ك$_2$)/٤ ك$_1$. ويمكن ايجاد ص (ن) بسهولة بادخال (٣ ـ ٩٣) في المعادلة (٣ ـ ٨٧).

ولنذكر ان المثال ١ ـ ١ ـ ٥ عن المفترس والفريسة يمكن ان يعالج باعتباره منظومة حجرات.

التمارين ٣ ـ ١١

١. يحتوي الوعاء س على ٥٠٠ جالون من محلول اذيب فيه ٥٠٠ باوند من الملح. ويحتوي الوعاء ص على ٥٠٠ جالون من الماء. ويصب ماء في وعاء س بمعدل ٣٠ جالون/الدقيقة، ويخرج منه المزيج الى ص بمعدل ٤٠ جالون/الدقيقة، فيضخ المزيج عائداً من ص الى س بمعدل ١٠ جالون/الدقيقة، والى وعاء ثالث بمعدل ٣٠ جالون/الدقيقة. أوجد أكبر كمية من الملح تتجمع في ص، ومتى يحدث ذلك.

٢. في التمرين ١، حل المسألة علماً بان الوعاء س فيه خرم يتسرب منه المحلول بمعدل ١ جالون/الدقيقة، مع بقاء المعطيات الأخرى على حالها.

٣. حل المعادلة (٣ ـ ٨٥) عن التفاعل الكيميائي، على فرض ان التركيز في أ، ب واحد. عبِّر عن هذه الحالة باعتبارها منظومة ذات حجرتين.

٤. عبِّر عن المثال ١ ـ ١ ـ ٥ عن المفترس والفريسة باعتباره منظومة ذات حجرتين.

٥. في دراسة عن توزيع البوتاسيوم المشع K^{42} بين خلايا الدم الحمراء والبلازما في دم الإنسان قام عالمان باضافة K^{42} الى دم استنزف حديثاً فوجدا انه بالرغم من ان الكمية الكلية للبوتاسيوم (الثابت منه والمشع) في الخلايا الحمراء والبلازما بقيت ثابتة اثناء

التجربة الا ان الاشعاع كان ينتقل تدريجياً من البلازما الى الخلايا الحمراء. فالاشعاع الكسري اذن شأنه كشأن منظومة خطية مغلقة ذات حجرتين. فاذا كان معامل التحويل الكسري من البلازما الى الخلايا $ك_{٢١}$ = ١,٣٠ في المئة في الساعة في حين ان $ك_{١٢}$ = ١,٧ في المئة في الساعة، وكان الاشعاع الاصلي ٨٠٠ وحدة في الدقيقة في البلازما و٢٥ وحدة في الدقيقة في الخلايا الحمراء، فكم وحدة في الدقيقة تكون في الخلايا الحمراء بعد ٣٠٠ دقيقة؟

٣ ـ ١٢ المعادلات الخطية ذات الرتب العالية

سنرى في هذا البند كيف ان معظم نتائج التنبؤ السابق يمكن ان تعمم فوراً بحيث تنطبق على معادلات أعلى من الرتبة الثانية. ولنبدأ بالمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة ن :

$$ص^{(ن)} + أ_{١} (س) ص^{(ن-١)} + أ_{٢} (س) ص^{(ن-٢)} + \ldots + أ_{ن-١} (س) صَ + أ_{ن} (س) ص = ق (س) \ldots\ldots (٣ ـ ٩٤)$$

ورفيقتها المتجانسة :

$$ص^{(ن)} + أ_{١} (س) ص^{(ن-١)} + أ_{٢} (س) ص^{(ن-٢)} + \ldots + أ_{ن-١} (س) صَ + أ_{ن} (س) ص = ٠ ، \ldots\ldots (٣ ـ ٩٥)$$

حيث الأقترانات $أ_{ر}$(س) ، ر= ١ ، ٢ ، . . . ، ن ، ق (س) متصلة فرضاً.

فنظرية البند ٣ ـ ٢ تشمل كلا المعادلتين (٣ ـ ٩٤) و(٣ ـ ٩٥).

فنقول ان $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، . . . $ص_{ن}$ تكون مستقلة خطياً على طول الفترة س. ≤ س ≤ $س_{١}$ اذا كان الشرط

$حـ_1$ $ص_1$ (س) + $حـ_2$ $ص_2$ (س) + . . . + $حـ_ن$ $ص_ن$ (س) = ٠ لكل س حيث $س_0 \leqslant س \leqslant س_1$ يقتضي ان يكون $حـ_1$ = $حـ_2$ = . . . = $حـ_ن$ = ٠

ونعرف **الرنسكية** ر ($ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$) (س) بالمحددة :

$$ر(ص_1 ، ص_2 ، \ldots ، ص_ن)(س) = \begin{vmatrix} ص_1 & ص_2 & \ldots & ص_ن \\ صَ_1 & صَ_2 & & صَ_ن \\ \vdots & & & \\ ص_1^{(ن-1)} & & \ldots & ص_ن^{(ن-1)} \end{vmatrix}$$

وبطريقة مطابقة لبرهان النتيجة (٣ ـ ٣)، يمكن ان نبرهن ان ر($ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$) (س) يساوي صفراً اذا، وفقط اذا كانت الاقترانات $ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$ حلولا مستقلة خطياً للمعادلة (٣ ـ ٩٥). ويمكن ان نبرهن ايضاً تعميم المعادلة (٣ ـ ٦) المعروفة باسم قاعدة آبل، الى **الصيغة** :

$$ر(ص_1 ، \ldots ، ص_ن)(س) = حـ e^{-\int أ_1(س)\, د س} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ ـ ٩٦)$$

ونستطيع ايضاً، كما في النظرية ٣ ـ ٤ ، ان نبين انه اذا كان $ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$ حلولاً مستقلة خطياً للمعادلة المتجانسة (٣ ـ ٩٥)، فكل حل آخر ص (س) لهذه المعادلة يمكن ان يكتب بالصيغة :

$$ص(س) = حـ_1 ص_1(س) + حـ_2 ص_2(س) + \ldots + حـ_ن ص_ن(س) ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٣ ـ ٩٧)$$

حيث $حـ_1$ ، $حـ_2$ ، . . . ، $حـ_ن$ ثوابت. فلذا يمكن ن تسمى (٣ ـ ٩٧) **الحل العام** للمعادلة (٣ ـ ٩٥)، وبذا تتحول المسألة الى ايجاد ن حلول مستقلة خطياً

للمعادلة (٣ ـ ٩٥). وأخيراً اذا كان $ص_{ح_١}$ ، $ص_{ح_٢}$ حلين للمعادلة غير المتجانسة (٣ ـ ٩٤)، فمن مبدأ التراكم ينتج ان

$$ص(س) = ص_{ح_١}(س) - ص_{ح_٢}(س)$$

هو حل للمعادلة المتجانسة (٣ ـ ٩٥). واذن، كما في المعادلة ذات الرتبتين، يكفي ان نجد حلاً واحداً خاصاً للمعادلة (٣ ـ ٩٤) وبراهين كل هذه الحقائق هي تعميمات مباشرة لنتائج البند (٣ ـ ٢)، وسنبقي للتمرين، ونكرس باقي هذا البند لحل معادلات من رتب عالية.

وكما في معادلات الرتبة الثانية، ليس هنالك طريقة عامة لايجاد حل نهائي لأي من (٣ ـ ٩٤) أو (٣ ـ ٩٥) الا اذا كانت $أ_ر(س)$ ، ر = ١ ، ٢ ، . . . ، ن، كلها ثوابت. ولهذا سنقتصر على حل المعادلة الخطية ذات الرتبة التي معاملاتها ثابتة (وحقيقية)، وهي :

$$ص^{(ن)} + أ_١ ص^{(ن-١)} + \ldots + أ_{ن-١} صَ + أ_ن ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٩٨)$$

فكما في حالة الرتبة الثانية، «تحزر» بان هناك حلاً من النوع :

$$ص = e^{\lambda س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣ - ٩٩)$$

فنعوض (٣ ـ ٩٩) في المعادلة (٣ ـ ٩٨)، مع ملاحظة ان المشتقة الرائية للاقتران $e^{\lambda س}$ هي $\lambda^{ر} e^{\lambda س}$ ، فينتج :

$$e^{\lambda س} (\lambda^{ن} + أ_١ \lambda^{ن-١} + \ldots + أ_{ن-١} \lambda + أ_ن) = ٠$$

وبعد القسمة على $أ^{\lambda س}$ ينتج :

$$ح(\lambda) = \lambda^{ن} + أ_{1}\lambda^{ن-1} + \ldots + أ_{ن-1}\lambda + أ_{ن} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (٣ - ١٠٠)$$

وسنسمي المعادلة (٣ ـ ١٠٠)، كشأننا فيما مضى، بالمعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة (٣ ـ ٩٨)، وواضح انه اذا كانت λ جذراً للمعادلة (٣ ـ ١٠٠)، كان $e^{\lambda س}$ حلاً للمعادلة (٣ ـ ٩٨).

والحدودية $ح_{\lambda}$ يمكن ان تحلل :

$$ح_{\lambda} = (\lambda - \lambda_{1})^{ن_{1}} (\lambda - \lambda_{2})^{ن_{2}} \ldots (\lambda - \lambda_{ر})^{ن_{ر}}$$

حيث $ن_{ر}$ يدل على عدد المرات التي بها يقع الجذر $\lambda_{ر}$، وواضح ان $ن_{1} + ن_{2} + \ldots + ن_{ر} = ن$.

فاذا كان $ن_{ر} = 1$ حيث ر = عدداً ما نسمي $\lambda_{ر}$ بالجذر البسيط للمعادلة (٣ ـ ١٠٠).

ولقد افترضنا ان المعاملات $أ_{ر}$، ر = ١ ، . . . ، ن حقيقية، فأي الجذور مركبة للمعادلة (٣ ـ ١٠٠) تأتي ازواجاً مترافقة.

فلنلخص الآن طبيعة حلول المعادلة (٣ ـ ٩٨) التي تناظر الانماط المختلفة لجذور المعادلة (٣ ـ ١٠٠).

١) اذا كان λ_{1} ، λ_{2} ، . . . ، $\lambda_{ر}$ هي ر جذور بسيطة للمعادلة (٣ ـ ١٠٠)، يكون

$$e^{س} ، e^{\lambda_{2} س} ، \ldots ، e^{\lambda_{ر} س}$$

من الحلول المستقلة خطياً للمعادلة (٣ ـ ٩٨).

٢) اذا كان $\lambda_{ي}$ جذراً في المعادلة (٣ ـ ١٠٠)، مكرراً $ن_{ي} > 1$ من المرات، يكون

$$e^{\lambda_{ى} س} ، س e^{\lambda_{ى} س} ، س^{2} e^{\lambda_{ى} س} ، \ldots ، س^{ن_{ى} - 1} . e^{\lambda_{ى} س}$$

حلولا للمعادلة (٣ ـ ٩٨) خطية مستقلة عددها $ن_ي$.

٣) اذا كان $\lambda_ل = \alpha + \beta i$ ، $\lambda_ي = \alpha - \beta i$ زوجين من الجذور البسيطة المركبة المترافقة للمعادلة (٣ ـ ١٠٠)، يكون

$e^{\alpha س}$ جتا β س، $e^{\alpha س}$ جا β س

جذرين مستقلين خطياً للمعادلة (٣ ـ ٩٨) .

٤) اذا كان $\lambda_ل = \alpha + \beta i$ ، $\lambda_ي = \alpha - \beta i$ زوجين من الجذور المركبة المترافقة، مكرراً كل منهما ن مرات، يكون

$e^{\alpha س}$ جتا β س، $e^{\alpha س}$ جا β س ، س $e^{\alpha س}$ جتا β س ، س $e^{\alpha س}$ جا β س

$س^٢ e^{\alpha س}$ جتا β س ، $س^٢ e^{\alpha س}$ جا β س ، . . . ،

$س^{ن-١} e^{\alpha س}$ جتا β س ، $س^{ن-١} e^{\alpha س}$ جا β س ،

هي ٢ ن من الجذور المستقلة خطياً للمعادلة (٣ ـ ٩٨). وبراهين هذه الحقائق هي تعميمات واضحة لنتائج البندين ٣ ـ ٤ و٣ ـ ٥ . وسنوضح هذه النتائج بعدد من الأمثلة، ونترك البراهين للتمرين.

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ١ خذ المعادلة

$$ص''' + ٤ ص'' + ص' - ٦ص = ٠ .$$

فمساعدتها

$$\lambda^٣ + ٤ \lambda^٢ + \lambda - ٦ = ٠ ،$$

ولهذه ثلاثة جذور هي $\lambda_١ = ١$ ، $\lambda_٢ = -٢$ ، $\lambda_٣ = -٣$. فالحل العام إذن هو

$$ص(س) = حـ_١ e^{س} + حـ_٢ e^{-٢س} + حـ_٣ e^{-٣س}$$

وقبـل متـابعـة النقـاش ينبغي ان نذكـر ان ايجاد حلول اي حدودية من درجة أعلى من الثـانيـة هو في العـادة عمـل شاق. الا اننـا نورد هنـا امثلة مما يسهل ايجاد جذوره . فلا يحسبنَّ القاريء ان كل المعادلات بهذه السهولة . في معظم حالات الحدوديات العليا لا توجد الجذور الا بالتقريب. وهنالك طرق معروفة لمثل هذا التقريب فعلى من يعنيه الأمر ان يراجع بشأنه عدداً من الكتب في التحليل العددي* .

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ٢ خذ المعادلة صً − ٣ صَ − ٢ ص = ٠ ،

فمساعدتها : λ^٣ − ٣ λ − ٢ = (λ + ١)^٢ (λ − ٢) = ٠ . ولهذه جذر مكرر λ = − ١ وجذر بسيط λ = ٢ . فالحل العام :

ص (س) = حـ~١~ e^{−س} + حـ~٢~ س e^{−س} + حـ~٣~ e^{٢س} .

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ٣ خذ المعادلة

ص^{(٤)} + ١٦ صً + ٩٦ صً + ٢٥٦ صَ + ٢٥٦ ص = ٠ ،

ومساعدتها :

λ^٤ + ١٦ λ^٣ + ٩٦ λ^٢ + ٢٥٦ λ + ٢٥٦ = (λ + ٤)^٤ = ٠ .

فهنا λ = −٤ جذر مكرر اربع مرات . فالحل العام كما يلي :

ص (س) = حـ~١~ e^{−٤س} + حـ~٢~ س e^{−٤س} + حـ~٣~ س^٢ e^{−٤س} + حـ~٤~ س^٣ e^{−٤س}

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ٤ خذ صً + صَ = ٠ . ومساعدتها λ^٣ + λ = ٠ ، وجذورها ٠ ، ± i

* مثل

Peter Henrici, Elements of Numerical Analysis, Wiley, New York, 1964

فالحل العام :

ص (س) = حـ$_1$ + حـ$_2$ جتا س + حـ$_3$ جا س .

لمثال ٣ ـ ١٢ ـ ٥ خذ المعادلة :

ص$^{(4)}$ − ١٦ ص‴ + ٤٢ ص″ − ١٠٤ ص′ + ١٦٩ ص = ٠

فالمعادلة المساعدة :

$$\lambda^4 - 16\lambda^3 + 42\lambda^2 - 104\lambda + 169 = (\lambda^2 - 4\lambda + 169)^2 = 0 ،$$

ولهذه : الجذران ٢ ± ٣ i مكرران. فالحل العام :

ص (س) = حـ$_1$ $e^{2س}$ جتا ٣س + حـ$_2$ $e^{2س}$ جا ٣س + حـ$_3$ س $e^{2س}$ جتا ٣س

+ حـ$_4$ س $e^{2س}$ جا ٣س.

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ٦ خذ المعادلة

ص$^{(4)}$ + ص = ٠ .

فمساعدتها $\lambda^4 + 1 = 0$. فجذورها هي مقادير الجذر الرابع للعدد −١ . ويمكن ايجاد هذه بالطريقة التالية، استناداً الى قاعدة أويلر (٣ ـ ٢٨) : نعرف ان

$e^{i\pi}$ = جتا π + i جا π = −١ ،

$e^{2i\pi}$ = جتا ٢ π + i جا ٢ π = ١

فيكون

$$-1 = e^{i\pi} = e^{3i\pi} = e^{5i\pi} = e^{7i\pi} ،$$

فنأخذ الجذر الرابع لكل من هذه فينتج ما يلي :

$$e^{i\pi/٤} = \text{جتا}\ \pi / ٤ + i\ \text{جا}\ \pi / ٤ = \frac{(١ + i)}{\sqrt{٢}}\ ،$$

$$e^{٣i\pi/٤} = \text{جتا}\ ٣\pi / ٤ + i\ \text{جا}\ ٣\pi / ٤ = \frac{(-١ + i)}{\sqrt{٢}}\ ،$$

$$e^{٥i\pi/٤} = \text{جتا}\ ٥\pi / ٤ + i\ \text{جا}\ ٥\pi / ٤ = \frac{(-١ - i)}{\sqrt{٢}}\ ،$$

$$e^{٧i\pi/٤} = \text{جتا}\ ٧\pi / ٤ + i\ \text{جا}\ ٧\pi / ٤ = \frac{(١ - i)}{\sqrt{٢}}\ .$$

فباستعمال المتطابقات (٣ ـ ٣١) يمكن ان نعبر عن الحل العام بدلالة الجيوب وجيوب التمام كما يلي :

$$\text{ص (س)} = \text{حـ}_١\ e^{\text{س}/\sqrt{٢}}\ \text{جتا}\ \frac{\text{س}}{\sqrt{٢}}\ ،\ + \text{حـ}_٢\ e^{\text{س}/\sqrt{٢}}\ \text{حا}\ \frac{\text{س}}{\sqrt{٢}}$$

$$+\ \text{حـ}_٣\ e^{-\text{س}/\sqrt{٢}}\ \text{جتا}\ \frac{\text{س}}{\sqrt{٢}}\ ،\ + \text{حـ}_٤\ e^{-\text{س}/\sqrt{٢}}\ \text{جا}\ \frac{\text{س}}{\sqrt{٢}}$$

ويمكن دائماً استعمال هذه الطريقة لايجاد الجذر النوني لأي عدد، حقيقي (او مركب).

نستطيع الآن ان ندرس المعادلة غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة، ولتكن :

$$\text{ص}^{(\text{ن})} + \text{أ}_١\ \text{ص}^{(\text{ن}-١)} + \ldots + \text{أ}_{\text{ن}-١}\ \text{صَ} + \text{أ}_\text{ن}\ \text{ص} = \text{ق (س)} \quad .. \quad (٣ ـ ١٠١)$$

كما في البند (٣ ـ ٦)، تحل هذه المعادلة بطريقة المعاملات غير المعينة شرط ان يكون

ق(س) من نمط محدود ويمكن ان تحل، مهما تكن ق (س)، بطريقة تغيير الثوابت. وتعمل طريقة المعاملات غير المعينة بمثل طريقة المعادلات ذات الرتبة الثانية. واليك الأمثلة التالية.

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ٧ : انظر المعادلة

$$ص''' + ٤ ص'' + ص' - ص = س^٢ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣ـ١٠٢)$$

كما في البند (٣ ـ ٦) : بما ان $س^٢$ حدودية تربيعية، نحزر ان هناك حلًا للمعادلة (٣ ـ ١٠٢) هو حدودية تربيعية، اي ان

$$ص_ح (س) = أ س^٢ + ب س + حـ .$$

فيكون $ص'_ح = ٢ أ س + ب$ ، $ص''_ح = ٢ أ$ ، $ص'''_ح = ٠$. نعوض في (٣ ـ ١٠٢) فينتج

$$٨ أ + (٢ أ س + ب) - ٦ (أ س^٢ + ب س + حـ) = س^٢$$

فبمساواة معاملات القوى المتشابهة نحصل على المعادلات :

$$٨ أ + ب - ٦ حـ = ٠ ،$$
$$٢ أ - ٦ ب = ٠ ،$$
$$- ٦ أ = ١ ،$$

فيكون $أ = - \frac{١}{٦}$ ، $ب = - \frac{١}{١٨}$ ، $حـ = - \frac{٢٥}{١٠٨}$ ،

والحل الخاص للمعادلة (٣ ـ ١٠٢) هو $ص_ح(س) = - \frac{١}{٦} س^٢ - \frac{١}{١٨} س - \frac{٢٥}{١٠٨}$ ،

ونستطيع ان نتحقق من ذلك بالتعويض.

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ٨ ليكن

$$ص''' - ص'' + ٤ ص' - ٤ ص = جا س \quad (٣ ـ ١٠٣)$$

فالحل العام لرفيقتها المتجانسة هو :

$$ص (س) = حـ_١ e^{س} + حـ_٢ جتا ٢س + حـ_٣ جا ٢س .$$

فلأيجاد حل خاص للمعادلة (٣ ـ ١٠٣) نفرض

$$ص_ح (س) = أ جا س + ب جتا س .$$

فيكون $ص'_ح = أ جتا س - ب جا س$ ، $ص''_ح = - أ جا س - ب جتا س$ ، $ص'''_ح = - أ جتا س + ب جا س$. نعوض هذه القيم في المعادلة (٣ ـ ١٠٣) فينتج :

$$- أ جتا س + ب جا س + أ جا س + ب جتا س + ٤ أ جتا س - ٤ ب جا س$$
$$- ٤ أ جا س - ٤ ب جتا س = جا س .$$

فبتجميع الحدود المتشابهة ومساواة المعاملات ينتج :

$$٣ أ - ٣ ب = ٠ \quad ،$$

$$- ٣ أ - ٣ ب = ١ \quad ،$$

أي ان أ = ب = $-\frac{1}{6}$ فيكون ص$_ح$ (س) = $-\frac{1}{6}$ (جا س + جتا س) .

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ٩ خذ المعادلة

$ص''' - ٣ ص' - ٢ ص = ٣ e^{-س}$ . ... (٣ ـ ١٠٤)

في المثال (٣ ـ ١٢ ـ ٢) رأينا ان الحل العام لمرافقتها المتجانسة هو :

$ص (س) = ح_1 e^{-س} + ح_2 س e^{-س} + ح_3 e^{2س}$.

فاذن $e^{-س}$ ، س $e^{-س}$ كلاهما حل للمعـادلـة المتجـانسة . فحسب قاعدة البند (٣ ـ ٦)، نبحث عن حل من النمط

$ص_ح (س) = أ س^2 e^{-س}$.

فيكون $ص'_ح = أ e^{-س} (- س^2 + ٢س)$ ، $ص''_ح = أ e^{-س} (س^2 - ٤س + ٢)$ ، $ص'''_ح = أ e^{-س} (- س^2 + ٦س - ٦)$. نعوض في المعادلة (٣ ـ ١٠٤) فينتج :

$أ e^{-س} (- س^2 + ٦س - ٦ + ٣ س^2 - ٦س - ٢ س^2) = - ٦ أ e^{-س} = ٣ e^{-س}$

فتكون أ = $-\frac{1}{2}$ ، $ص_ح = -\frac{1}{2} س^2 e^{-س}$.

وطريقة تغيير المعاملات في المعادلة النونية الترتيب شاقة، الا انها تعميم مباشر لطـريقـة معادلات الرتبة الثانية . ليكن $ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$ حلولاً للمعادلة المتجانسة (٣ـ ٩٨) مستقلة خطياً، عددها ن . فنبحث عن حل للمعادلة (٣ ـ ١٠١) من النوع :

$$\text{ص}_{\text{ح}}(\text{س}) = \text{حـ}_{١}(\text{س})\,\text{ص}_{١}(\text{س}) + \text{حـ}_{٢}(\text{س})\,\text{ص}_{٢}(\text{س}) + \dots + \text{حـ}_{\text{ن}}(\text{س})\,\text{ص}_{\text{ن}}(\text{س}) \quad \dots\dots\dots \quad (٣ - ١٠٥)$$

نفاضل (٣ ـ ١٠٥) فينتج :

$$\text{ص}'_{\text{ح}}(\text{س}) = (\text{حـ}_{١}\,\text{ص}'_{١} + \text{حـ}_{٢}\,\text{ص}'_{٢} + \dots + \text{حـ}_{\text{ن}}\,\text{ص}'_{\text{ن}}) + (\text{حـ}'_{١}\,\text{ص}_{١} + \text{حـ}'_{٢}\,\text{ص}_{٢} + \dots \text{حـ}'_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}}).$$

ومن المناسب، كما في حالة الرتبة الثانية، ان نجعل

$$\text{حـ}'_{١}\,\text{ص}_{١} + \text{حـ}'_{٢}\,\text{ص}_{٢} + \dots + \text{حـ}'_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}} = ٠ .$$

فيكون

$\text{ص}'_{\text{ح}} = \text{حـ}_{١}\,\text{ص}'_{١} + \text{حـ}_{٢}\,\text{ص}'_{٢} + \dots + \text{حـ}_{\text{ن}}\,\text{ص}'_{\text{ن}}$ ، ونفاضل ثانية فينتج :

$$\text{ص}''_{\text{ح}}(\text{س}) = (\text{حـ}_{١}\,\text{ص}''_{١} + \text{حـ}_{٢}\,\text{ص}''_{٢} + \dots + \text{حـ}_{\text{ن}}\,\text{ص}''_{\text{ن}}) + (\text{حـ}'_{١}\,\text{ص}'_{١} + \text{حـ}'_{٢}\,\text{ص}'_{٢} + \dots + \text{حـ}'_{\text{ن}}\,\text{ص}'_{\text{ن}}).$$

فنجعل

$(\text{حـ}'_{١}\,\text{ص}'_{١} + \text{حـ}'_{٢}\,\text{ص}'_{٢} + \dots + \text{حـ}'_{\text{ن}}\,\text{ص}'_{\text{ن}}) = ٠$ ، فينتج .

$\text{ص}''_{\text{ح}} = \text{حـ}_{١}\,\text{ص}''_{١} + \text{حـ}_{٢}\,\text{ص}''_{٢} + \dots + \text{حـ}_{\text{ن}}\,\text{ص}''_{\text{ن}}$. نستمر على هذه الشاكلة ونجعل

$\text{حـ}'_{١}\,\text{ص}_{١}^{(\text{ك})} + \text{حـ}'_{٢}\,\text{ص}_{٢}^{(\text{ك})} + \dots + \text{حـ}'_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}}^{(\text{ك})} = ٠$، $\text{ك} = ٠ ، ١ ، \dots ، \text{ن} - ٢$ ،

فينتج

$ص_ح^{(ك)} = حـ_١ ص_١^{(ك)} + حـ_٢ ص_٢^{(ك)} + \dots + حـ_ن ص_ن^{(ك)}$ ، ك = ٠ ، ١ ، . . . ، ن − ٢

وأخيراً، بما ان

$ص_ح^{(ن-١)} = حـ_١ ص_١^{(ن-١)} + حـ_٢ ص_٢^{(ن-١)} + \dots + حـ_ن ص_ن^{(ن-١)}$ ،

يعطي تفاضل أخير :

$$ص_ح^{(ن)} = [حـ_١ ص_١^{(ن)} + حـ_٢ ص_٢^{(ن)} + \dots + حـ_ن ص_ن^{(ن)}]$$
$$+ [حَـ_١ ص_١^{(ن-١)} + حَـ_٢ ص_٢^{(ن-١)} + \dots + حَـ_ن ص_ن^{(ن-١)}] .$$

فقد حصلنا على كل مشتقات $ص_ح$ حتى المشتقة ن ويمكن ان نعوض ذلك في المعادلة (٣-١٠١) فاذا ذكرنا ان $ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . ، $ص_ن$ جذور في المعادلة المتجانسة (٣-٩٨) وان $ص_ح$ يحقق المعادلة (٣-١٠١) نجد ان

$$حَـ_١ ص_١^{(ن-١)} + حَـ_٢ ص_٢^{(ن-١)} + \dots + حَـ_ن ص_ن^{(ن-١)} = ق (س)$$

فقد وجدنا ن معادلات في ن مجاهيل $حَـ_١$ ، $حَـ_٢$ ، . . . ، $حَـ_ن$ ، هي

$$حَـ_١ ص_١ + حَـ_٢ ص_٢ + \dots + حَـ_ن ص_ن = ٠ ،$$
$$حَـ_١ صَ_١ + حَـ_٢ صَ_٢ + \dots + حَـ_ن صَ_ن = ٠ ،$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (٣-١٠٦)$$
$$حَـ_١ ص_١^{(ن-٢)} + حَـ_٢ ص_٢^{(ن-٢)} + \dots + حَـ_ن ص_ن^{(ن-٢)} = ٠ ،$$
$$حَـ_١ ص_١^{(ن-١)} + حَـ_٢ ص_٢^{(ن-١)} + \dots + حَـ_ن ص_ن^{(ن-١)} = ق .$$

ومحددة المنظومة (٣-١٠٦) هي ر = ر ($ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . ، $ص_ن$). وهذه ليست

صفـراً لأن $ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$ مستقلة خطيـاً. اذن فهنـالـك حل وحيـد، تعطيه قاعدة كريمر (انظر الملحق ٤) هو

$$\bar{ح}_ك = \frac{ر_ك}{ر} \text{ ، } ك = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٣ ـ ١٠٧)$$

حيث $ر_ك$ هو المحددة التي تنتج من التعويض عن العمود ك في ر بالعمود

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ \vdots \\ ق \end{bmatrix}$$

واخيراً، نجد الاقترانات $ح_1$ ، $ح_2$ ، . . . ، $ح_ن$ بالتكامل، اذا امكن ذلك.

المثال ٣ ـ ١٢ ـ ٩ (تتمة) سنحل المعادلة

$$ص'' - ٣ ص' - ٢ ص = ٣ e^{-س}$$

بطريقة تغيير المعاملات هنا $ص_1 = e^{-س}$ ، $ص_2 = س e^{-س}$ ، $ص_3 = e^{٢س}$

وحسب قاعدة آبل (٣ ـ ٩٦) يكون :

$$ر(س) = \begin{vmatrix} e^{-س} & س e^{-س} & e^{٢س} \\ -e^{-س} & (١ - س) e^{-س} & ٢ e^{٢س} \\ e^{-س} & (س - ٢) e^{-س} & ٤ e^{٢س} \end{vmatrix} = جـ e^{\int ٠ \, دس} = جـ ،$$

وهو ثابت. فيكون:

$$ر(س) = ر(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 9 .$$

ومن المعادلة (٣ ـ ١٠٧) ينتج:

$$ر_1 = \begin{vmatrix} 0 & س\, e^{-س} & e^{2س} \\ 0 & (1 - س)\, e^{-س} & 2\, e^{2س} \\ 3\, e^{-س} & (س - 2)\, e^{-س} & 4\, e^{2س} \end{vmatrix} = 9س - 3 ،$$

$$ر_2 = \begin{vmatrix} e^{-س} & 0 & e^{2س} \\ -e^{-س} & 0 & 2\, e^{2س} \\ e^{-س} & 3\, e^{-س} & 4\, e^{2س} \end{vmatrix} = -9 ،$$

$$ر_3 = \begin{vmatrix} e^{-س} & س\, e^{-س} & 0 \\ -e^{-س} & (1 - س)\, e^{-س} & 0 \\ e^{-س} & (س - 2)\, e^{-س} & 3\, e^{-س} \end{vmatrix} = 3\, e^{-3س} .$$

فيكون

$$ح'_1(س) = \frac{ر_1}{ر} = س - \frac{1}{3} ، \quad ح'_2(س) = -1 ، \quad ح'_3(س) = \frac{e^{-3س}}{3} ،$$

فيكون

$$ح_1(س) = \frac{س^2}{2} - \frac{س}{3} \text{ ، } ح_2(س) = -س \text{ ، } ح_3(س) = -\frac{e^{-3س}}{9}$$

واخيراً ينتج

$$ص_ح(س) = ح_1(س)\, ص_1(س) + ح_2(س)\, ص_2(س)$$

$$+ ح_3(س)\, ص_3(س)$$

$$= \left(\frac{س^2}{2} - \frac{س}{3}\right) e^{-س} - س\,(س\, e^{-س}) - \left(\frac{e^{-3س}}{9}\right) e^{2س}$$

$$= -\frac{س^2}{2} e^{-س} - \left(\frac{س}{3} + \frac{1}{9}\right) e^{-س} .$$

والحد الأخير في هذه المعادلة جزء من الحل العام للمعادلة المتجانسة، فيكون

$$ص_ح(س) = -\frac{س^2}{2} e^{-س}$$

نرى من هذا المثال ان طريقة تغيير المعاملات أثقل من طريقة المعاملات غير المحددة. ولكنها، كشأنها في معادلات المرتبة الثانية تمتاز بأنها تصح مهما يكن ق (س)، (ما دام الأقتران $ح_ك$، كما تحدده المعادلة (٣ ـ ١٠٧)، قابلاً للتكامل).

التمارين ٣ ـ ١٢

١ . اثبت انه اذا كان $ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$ حلولاً للمعادلة (٣ ـ ٩٥)، فان

ر (ص$_1$ ، ص$_2$ ، . . . ، ص$_ن$) = ٠ اذا، وفقط اذا، كان ص$_1$ ، ص$_2$ ، . . . ص$_ن$ مستقلة خطياً.

٢ . اثبت قاعدة آبل في حالة ن = ٤ . يمكن تعميم هذا البرهان لاثبات الصيغة (٣ ـ ٩٦) لكل قيم ن.

٣ . اثبت انه اذا كان ص$_1$ ، ص$_2$ ، . . . ، ص$_ن$ حلولاً للمعادلة (٣ ـ ٩٦) مستقلة خطياً، عددها ن، وكان ص (س) حلاً آخر، فهنالك ثوابت حـ$_1$ ، حـ$_2$ ، . . . ، حـ$_ن$ حيث ان

ص (س) = حـ$_1$ ص$_1$ (س) + . . . + حـ$_ن$ ص$_ن$ (س).

[إرشاد : انظر النظرية ٣ ـ ٤]

٤ . على فرض ان ص$_ج$ ، ص$_ح$ حلان للمعادلة (٣ ـ ٩٤) غير المتجانسة، بين ان ص$_خ$ = ص$_ج$ − ص$_ح$ حل للمعادلة، المتجانسة (٣ ـ ٩٥).

٥ . بين انه اذا كان ص$_1$ حلاً للمعادلة

ص$^{(ن)}$ + أ$_1$ ص$^{(ن-1)}$ + . . . + أ$_ن$ ص = ق$_1$ ، وكان ص$_2$ حلاً للمعادلة:

ص$^{(ن)}$ + أ$_1$ ص$^{(ن-1)}$ + . . . + أ$_ن$ ص = ق$_2$ ،

كان ص$_3$ = ص$_1$ + ص$_2$ حلاً للمعادلة

ص$^{(ن)}$ + أ$_1$ ص$^{(ن-1)}$ + . . . + أ$_ن$ ص = ق$_1$ + ق$_2$

هذا تعميم لمبدأ التراكم حتى ينطبق على معادلة الرتبة ن (انظر التمرين (٣ ـ ٢ ـ ١٥)، والبند (٣ ـ ٦))

في التمارين ٦ الى ١٤ اوجد الحل العام لكل واحدة من المعادلات التفاضلية المعطاة :

٦. $ص''' - ٥ص'' - ٢ص' + ٢٤ص = ٠$

٧. $ص''' - ٣ص'' + ٣ص' - ص = ٠$

٨. $ص''' - ٢٧ص = ٠$

٩. $ص^{(٤)} + ٢ص''' - ١١ص'' - ١٢ص' + ٣٦ص = ٠$

١٠. $ص^{(٤)} = ٠$

١١. $ص^{(٥)} + ٢ص''' + ص' = ٠$

١٢. $ص^{(٤)} - ٥ص'' + ٤ص = ٠$

١٣. $ص^{(٤)} + ١٦ص = ٠$

١٤. $ص^{(٥)} + ١٠ص^{(٤)} + ٤٠ص''' + ٨٠ص'' + ٨٠ص' + ٣٢ص = ٠$

١٥. في التمرين ٦، اوجد الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية $ص(٠) = ١$، $ص'(٠) = ٠$، $ص''(٠) = -١$.

١٦. في التمرين ١١، أوجد الحل الخاص الذي يحقق $ص(\pi/٢) = ٠$، $ص'(\pi/٢) = ١$، $ص''(\pi/٢) = ٠$، $ص'''(\pi/٢) = -٣$، $ص^{(٤)}(\pi/٢) = ٠$

في التمارين ١٧ الى ٣٠ أوجد حلاً خاصاً لكل معادلة بطريقة المعاملات غير المعينة (اذا امكن)، وبطريقة تغيير المعاملات. وقارن الحلين.

١٧. $ص''' - ٥ص'' - ٢ص' + ٢٤ص = س$

١٨. $ص''' - ٥ص'' - ٢ص' + ٢٤ص = e^{س}$

١٩ . صًّ − ٥ صً − ٢ صَ + ٢٤ ص = $e^{-٢س}$

٢٠ . صًّ − ٥ صً − ٢ صَ + ٢٤ ص = $e^{س}$ جتا ٢س

٢١ . صًّ − ٥ صً − ٢ صَ + ٢٤ ص = ٣ + س

٢٢ . $ص^{(٤)} = ١$

٢٣ . $ص^{(٤)} = س + س^{٢} + س^{٤}$

٢٤ . صًّ − ٣ صً + ٣ صَ − ص = $e^{س}$

٢٥ . صًّ − ٣ صً + ٣ صَ − ص = جتا س

٢٦ . صًّ − ٣ صً + ٣ صَ − ص = لي س

٢٧ . $ص^{(٤)}$ + ٢ صًّ + صَ = ١ − $e^{س}$ [**ارشاد** : استعمل مبدأ التراكم]

٢٨ . $ص^{(٥)}$ + ١٠ $ص^{(٤)}$ + ٤٠ صًّ + ٨٠ صً + ٨٠ صَ + ٢٣ ص = س

+ جا س + $e^{س}$

٢٩ . صًّ + ٣ صً + ٢ صَ = $س^{٣}$ − $e^{س}$

٣٠ . صًّ + صَ = ظا س

الفصل الرابع

معادلات

الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية

٤ ـ ١ مقدمة

أعم صيغة لمعادلة الفرق ذات الرتبة الثانية هي :

$$\text{ق}\,(\text{ن}\ \text{،}\ \text{ص}_{\text{ن}}\ \text{،}\ \text{ص}_{\text{ن}+١}\ \text{،}\ \text{ص}_{\text{ن}+٢}) = ٠ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٤-١)$$

وعلى خلاف المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية، تقبل المعادلة (٤ ـ ١) الحل عادة بطريقة التتابع .

المثال ٤ ـ ١ ـ ١ خذ المعادلة :

$$e^{\text{ص}_{\text{ن}+٢}} - [٦\,(\text{ن} + ١)\ \text{جا}^{٢}\ \text{ص}_{\text{ن}+١}]\ \sqrt{\text{ص}_{\text{ن}}} = ٠ \qquad \ldots\ldots\ldots\ (٤-٢)$$

فاذا جعلنا $\text{ص}_{٠}$ ، $\text{ص}_{١}$ القيمتين الابتدائيتين للمجهول $\text{ص}_{\text{ن}}$ ، يكون :

$$\text{ص}_{٢} = \text{لي}\ ٦\sqrt{\text{ص}_{٠}}\ \text{جا}^{٢}\ \text{ص}_{١} \ \text{،}$$

$ص_٣ = لي (١٢ \sqrt{ص_١} جا^٢ ص_٢) =$

$لي [١٢ \sqrt{ص_١} جا^٢ (لي ٦ \sqrt{ص_.} جا^٢ ص_١)]$ ،

وهكذا.

ويبقى هذا التتابع معرفاً ما دام

$$٦ (ن + ١) جا^٢ ص_{ن+١} \sqrt{ص_ن} \geqslant ١ ،$$

فاذا صارت هذه العبارة أقل من ١ يصير $ص_{ن+٢}$ سالباً، وعندها تحتوي عبارة $ص_{ن+٤}$ على $\sqrt{ص_{ن+٢}}$ السالب، وليس لذلك حل حقيقي، ولا فائدة في هذه الحالة من البحث عن حل بطريقة تجميع بسيط لاقترانات ابتدائية.

واليك مثلاً آخر على الصعوبات التي تنشأ عن طريق التتابع :

المثال ٤ ـ ١ ـ ٢ خذ المعادلة

$$سا \{ جا [(ص_{ن+٢} ص_{ن+١})^{\frac{١}{٣}} ص^٥_ن]\} = جتا (ص_{ن+٢} ص_{ن+١})^{\frac{١}{٢}} ص_ن .$$

فحتى لو عرف $ص_.$ ، $ص_١$ لا نجد طريقة لاستنتاج تعبير صريح للمجهول $ص_٢$ بدلالة $ص_.$ ، $ص_١$.

وفي هذا الفصل سندرس صنفاً من معادلات الفروق لا تنشأ فيه المشاكل التي رأيناها في هذين المثالين.

وتعتبر معادلة الفروق ذات الرتبة الثانية خطية اذا خلت من اقترانات غير خطية ومن ضرب للمقادير المجهولة $ص_{ن+٢}$ ، $ص_{ن+١}$ ، $ص_ن$ ، بعضها في بعض. فمثلاً

$ص_{ن+٢} + (٣ ن^٣ جا ن)^٥ ص_{ن+١} + ص = جتا ن^٣$ خطية ،

في حين ان $ص_{ن+٢} + ص_{ن+١}\, ص_ن = ٠$ غير خطية. وأعم معادلة خطية من الرتبة الثانية يمكن ان تكتب بالصيغة :

$$ص_{ن+٢} + أ_ن\, ص_{ن+١} + ب_ن\, ص_ن = ق_ن .$$

فاذا كان $أ_ن$ ، $ب_ن$ ، $ق_ن$ معرفين لكل $ن \geqslant ٠$ وكان $ص_٠$ ، $ص_١$ معلومين، يكون :

$$ص_٢ = ق_٠ - أ_٠\, ص_١ - ب_٠\, ص_٠ ،$$

$$ص_٣ = ق_١ - أ_١\, ص_٢ - ب_١\, ص_١ ، \dots$$

فالتتابع المعرف على هذا النحو لا ينتهي. فلدينا اذن النظرية التالية عن المعادلات الخطية :

النظرية ٤ ـ ١ اذا كان $حـ_٠$ ، $حـ_١$ ثابتين معروفين، وكانت $أ_ن$ ، $ب_ن$ ، $ق_ن$ معرفة لكل قيم $ن \geqslant ٠$ ، كان هنالك حل وحيد للمعادلة :

$$ص_{ن+٢} + أ_ن\, ص_{ن+١} + ب_ن\, ص_ن = ق_ن \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤ ـ ٣)$$

يحقق $ص_٠ = حـ_٠$ ، $ص_١ = حـ_١$.

ومطابقة لمصطلحات الفصل ٣، نسمي المعادلة (٤ ـ ٣) **متجانسة** اذا كان $ق_ن = ٠$ لكل قيم ن، والا فهي **غير متجانسة** . واذا كان $أ_ن$ ، $ب_ن$ ثابتين لا يتغيران بتغير ن نقول ان المعادلة (٤ ـ ٣) **لها معاملات ثابتة** .

ورغم ان النظرية ٤ ـ ١ تضمن حلًا وحيداً لمسألة القيم الابتدائية الخطية، الا اننا في البنود القليلة التالية سنبحث عن وسائل لايجاد الحل العام للمعادلة (٤ ـ ٣) بطريقة لا تتضمن التتابع المستمر. وفي اثناء ذلك سنكتشف صلات هامة بين حلول معادلات الفروق ذات المرتبة الثانية ونظيراتها من المعادلات التفاضلية.

التمارين ٤ - ١

في التمارين من ١ الى ١٠ ميز معادلة الفروق الخطية من غير الخطية، واذا كانت خطية، بين أمتجانسة هي ام غير متجانسة، وهل معاملاتها ثابتة ام متغيرة :

١. $ص_{ن+٢} - ن + ص_{ن} = ٠$

٢. $ص_{ن+٢} - ن^{٢} + ص_{ن}^{٢} = ٠$

٣. $ص_{ن+٢} - ص_{ن+١} ص_{ن} = جا ن$

٤. $٦ ص_{ن+٢} - (ن+١)^{٢} ص_{ن+١} + e^{ن٢} ص_{ن} = \sqrt{٦ ن}$

٥. $ص_{ن+١} - ٣ ص_{ن+٤} + ص_{ن} = ٠$

٦. $ص_{ن+٢} - \sqrt{ص_{ن}} = \sqrt{ن}$

٧. $ص_{ن+٢} ص_{ن} = ٣$

٨. $٢ ص_{ن+٢} - ٥ ص_{ن+١} + ١٧ ص_{ن} = ن^{٢/٧}$

٩. $\sqrt{ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ص_{ن}} = ن$

١٠. $ص_{ن+٢} - \sqrt{ص_{ن+١} - ص_{ن}} = ٣$

١١. في المعادلة المتجانسة الخطية

$$ص_{ن+٢} + أ_{ن} ص_{ن+١} + ب_{ن} ص_{ن} = ٠$$

بين انه اذا كانت قيمتان متتاليتان للحل $ص_ن$ صفراً كان $ص_ن = 0$ لكل قيم ن.

١٢. على فرض ان $س_ن$ ، $ص_ن$ حلان للمعادله المتجانسة الخطية

$$ص_{ن+2} + أ_ن ص_{ن+1} + ب_ن ص_ن = 0 ،$$

وان $س_ك = ص_ك = 0$ حيث ك عدد صحيح ما، فبين ان هنالك ثابتاً ما، حـ، حيث $ص_ن = حـ س_ن$ لكل قيم ن.

٤ ـ ٢ خصائص حلول المعادلات الخطية

نبدأ بالمعادلة المتجانسة

$$ص_{ن+2} + أ_ن ص_{ن+1} + ب_ن ص_ن = 0 \quad .... \quad (٤ ـ ٤)$$

فمن المعادلة (٤ ـ ٤) يشتمل على متتالية من الاعداد الحقيقية : $ص_0$ ، $ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$ ، . . . تحقق (٤ ـ ٤) لكل قيم $ن \geqslant 0$ الصحيحة. ولتجنب كتابة المتتاليات، نعبر عن هذا الحل بالحد $ص_ن$.

والتوفيق الخطي للحلين $س_ن$ ، $ص_ن$ للمعادلة (٤ ـ ٤) هو ايضا متتالية $أ س_0 + ب ص_0$ ، $أ س_1 + ب ص_1$ ، . . . ، $أ س_ن + ب ص_ن$ ، . . . حيث أ ، ب عددان حقيقيان. ويكون الحلان $س_ن$ ، $ص_ن$ للمعادلة (٤ ـ ٤) **مستقلين خطياً** اذا كان $ل س_ن + م ص_ن = 0$ فقط مع $ل = م = 0$ وهذا يعادل قولنا ان ليس هنالك عدد ثابت حـ حيث $س_ن = حـ ص_ن$ لكل قيم ن. وهذا التعريفان يمكن توسيعهما حتى يشملا ك حلولاً للمعادلة (٤ ـ ٤).

النظرية ٤ ـ ٢ كل تجميع خطي لحلول المعادلة (٤ ـ ٤) هو ايضاً حل لهذه المعادلة.

البرهان. نحتاج فقط ان نبرهن انه اذا كان $س_ن$ ، $ص_ن$ حلين للمعادلة (٤ ـ ٤)

كان $ع_{ن} = ل\ س_{ن} + م\ ص_{ن}$ حلاً لها.

$$ع_{ن+٢} + أ_{ن}\ ع_{ن+١} + ب_{ن}\ ع_{ن}$$

$$= ل\ س_{ن+٢} + م\ ص_{ن+٢} + أ_{ن}\ (ل\ س_{ن+١} + م\ ص_{ن+١}) + ب_{ن}\ (ل\ س_{ن} + م\ ص_{ن})$$

$$= ل\ (س_{ن+٢} + أ_{ن}\ س_{ن+١} + ب_{ن}\ س_{ن}) + م\ (ص_{ن+٢} + أ_{ن}\ ص_{ن+٢} + ب_{ن}\ ص_{ن}) = ٠ .$$

نستطيـع الآن ان نعـين مقـابـلاً للرنسكيـة في معـادلات الفـروق وهي القيسارية (Casoration) فاذا كان $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ حلين للمعادلة (٤ ـ ٤)،فان قيسارية $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ هي

$$ق (س ، ص) = س_{ن}\ ص_{ن+١} - س_{ن+١}\ ص_{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٥)$$

وفي البند (٣ ـ ٢) برهنا ان المعادلة التفاضلية المتجانسة الخطية ذات الرتبة الثانية لها حلان مستقلان خطياً. وينطبق هذا على معادلة الفرق المتجانسة الخطية ذات الرتبة الثانية شرط الا يكون اي من المعاملات $ب_{ن}$ في المعادلة (٤ ـ ٤) صفراً. وتظهر الحاجة الى هذا الشـرط واضحـة عنـدمـا نتصـور تلاشي كل المعاملات $ب_{ن}$ اذ عندها تصبح المعـادلـة (٤ ـ ٤) معـادلـة من الـدرجـة الأولى ولا يكـون لها حلان مستقـلان خطياً. والنظرية التالية تبين لماذا كل $ب_{ن}$ يجب أن يكون غير الصفر وسنترك برهانها للطالب:

النظـريـة ٤ ـ ٣ اذا كان احـد المعاملات ب ن ، في المعادلة (٤ ـ ٤) صفراً، فعندها لا يكون للمعادلة (٤ ـ ٤) حلان مستقلان خطياً.

والحقيقة التالية تشابه النتيجة (٣ ـ ٣) :

النظرية ٤ ـ ٤ افرض ان س $_ن$ ، ص $_ن$ حلان للمعادلة (٤ ـ ٤) وان ب $_ن$ ≠ ٠ لكل ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . فعندها يكون س $_ن$ ، ص $_ن$ مستقلين خطياً اذا، وفقط اذا كان قه (س ، ص) ≠ ٠ مع قيمة صحيحة للعدد ن.

البرهان . نبدأ باثبات ان قه (س ، ص) لا تساوي صفراً ابداً او ان قه $_ن$ (س ، ص) = ٠ لكل قيم ن فمن المعادلة (٤ ـ ٥) نجد ان

قه $_{ن+١}$ = س $_{ن+١}$ ص $_{ن+٢}$ − س $_{ن+٢}$ ص $_{ن+١}$ . . . . (٤ ـ ٦)

ولأن س $_ن$ ، ص $_ن$ حلان للمعادلة (٤ ـ ٤) يمكن ان نعوض عن س $_{ن+٢}$ ، ص $_{ن+٢}$ في (٤ ـ ٦) بقيمتهما كما يلي :

س $_{ن+٢}$ = − أ $_ن$ س $_{ن+١}$ − ب $_ن$ س $_ن$ ، ص $_{ن+٢}$ = − أ $_ن$ ص $_{ن+١}$ − ب $_ن$ ص $_ن$ . . . . (٤ ـ ٧)

فينتج

ق $_{ن+١}$ = س $_{ن+١}$ (− أ $_ن$ ص $_{ن+١}$ − ب $_ن$ ص $_ن$) − ص $_{ن+١}$ (− أ $_ن$ س $_{ن+١}$ − ب $_ن$ س $_ن$)

= ب $_ن$ [س $_ن$ ص $_{ن+١}$ − س $_{ن+١}$ ص $_ن$] . . . . (٤ ـ ٨)

اي ان

ق $_{ن+١}$ = ب $_ن$ ق $_ن$ . . . . (٤ ـ ٩)

[لاحظ ان التشابه بين المعادلة (٤ ـ ٩) والمعادلة (٣ ـ ٥) للرنسكية .] وكما رأينا في البند (٢ ـ ٦) فان المعادلة (٤ ـ ٩) حلها

$$ق_{ن+١} = \left(\prod_{ي=٠}^{ن} ب_ي\right) ق_٠$$

فلأن $ب_ى \neq ٠$ حسب الفرض، فان $ق_ن$ اما ان يكون دائماً صفراً او الا يساوي صفراً أبداً، حسب كون $ق_٠$ صفراً او لا.

نستطيع الآن ان نبرهن على النظرية ببيان ان الحلين $س_ن$ ، $ص_ن$ للمعادلة (٤ ـ ٤) يكونان مستقلين خطياً اذا، وفقط اذا كان $ق_ن (س ، ص) = ٠$ (لكل قيم ن).

فاذا كان $س_ن$ ، $ص_ن$ غير مستقلين خطيـاً فهنـالـك عدد ثابت ﺣ حيث $ص_ن = ﺣ س_ن$ لكل قيم ن. فيكون

$$ق_ن (س ، ص) = س_ن ص_{ن+١} - ص_ن س_{ن+١}$$

$$= س_ن (ﺣ س_{ن+١}) - (ﺣ س_ن) س_{ن+١} = ٠$$

ومن ناحية أخرى، اذا كان $ق_ن (س ، ص) = ٠$، يكون $ق_٠ (س ، ص) = ٠$ فيكون

$$س_٠ ص_١ = س_١ ص_٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ ـ ١٠)$$

وهنالك حالتان للدراسة، حسب كون $س_٠ \neq ٠$ ، $س_٠ = ٠$.

الحالة ١ . اذا كان $س_٠ \neq ٠$ فان المعادلة (٤ ـ ١٠) تتضمن ان

$$ص_١ = \left(\frac{ص_٠}{س_٠}\right) س_١ .$$

فليكن $ﺣ = ص_٠ / س_٠$ ، فيكون

$$ص_٠ = \left(\frac{ص_٠}{س_٠}\right) س_٠ = ﺣ س_٠$$

ومن المعادلة (٤ ـ ٤) ينتج ان

$ص_٢ = -أ_. ص_١ - ب_. ص_. = -أ_. (حـ س_١) - ب (حـ س_.)$

$= حـ (-أ_. س_١ - ب س_.) = حـ س_٢$

وبالمثل ينتج ان $ص_٣ = حـ س_٣$ ، $ص_٤ = حـ س_٤$ ، وهكذا، لكل قيم ن. فيكون $ص_ن = حـ س_ن$، ويكون $س_ن$ ، $ص_ن$ متناسبين خطياً، غير مستقلين.

الحالة الثانية. اذا كان $س_. = ٠$ ، فإما أن يكون $س_١ = ٠$ أو ان يكون $س_١ \neq ٠$. فاذا كان $س_١ = ٠$ فمن المعادلة (٤ ـ ٤) ينتج ان $س_٢ = ٠$ ، $س_٣ = ٠$، وهكذا، لكل قيم ن. فيكون $س_ن = ٠ \times ص_ن$ ، وتكون الحلول متناسبة. واذا كان $س_١ \neq ٠$، فمن المعادلة (٤ ـ ١٠) يكون

$$ص_. = \left(\frac{ص_١}{س_١}\right) س_.$$

فليكن $حـ = \frac{ص_١}{س_١}$ ، فيكون

$$ص_١ = \left(\frac{ص_١}{س_١}\right) س_١ = حـ س_١ .$$

وباقي الحل كما في الحالة الأولى.

لأكمال البحث في المعادلات المتجانسة سنثبت النظرية التالية:

النظرية ٤ ـ ٥ اذا كان $س_ن$ ، $ص_ن$ حلين مستقلين خطياً للمعادلة (٤ ـ ٤)، وكان $ع_ن$ حلاً آخر لها. فان $ع_ن$ يمكن ان يكتب بصيغة تجميع خطي للحلين $س_ن$ ، $ص_ن$

البرهان. خذ المنظومة الخطية

$$س_{.}\ حـ_{١} + ص_{.}\ حـ_{٢} = ع_{.}$$

(٤ - ١١) ....

$$س_{١}\ حـ_{١} + ص_{١}\ حـ_{٢} = ع_{١}$$

حيث $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ غير معروفين. فمحددة هذه المنظومة هي ق (س ، ص)، وهذه ليست صفراً لأن $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ مستقلان خطياً. اذن فللمنظومة حل وحيد، $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$، والمتتالية $ع^{*}_{ن} = حـ_{١}\ س_{ن} + حـ_{٢}\ ص_{ن}$ تحقق الشرطين $ع^{*}_{.} = ع_{.}$ ، $ع^{*}_{١} = ع_{١}$. ولأن مسألة القيمة الابتدائية لها حل وحيد، ينتج ان $ع^{*}_{ن} = ع_{ن}$. وهذا ينهي البرهان.

بحصولنا على هذه النتيجة، يمكن ان نتكلم عن **الحل العام** للمعادلة (٤ - ٤)

فهو:

$$ع_{ن} = حـ_{١}\ س_{ن} + حـ_{٢}\ ص_{ن} \qquad (٤ - ١٢)$$

حيث $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة (٤ - ٤).

لننظر الآن باختصار في المعادلة غير المتجانسة :

$$ص_{ن+٢} + أ_{ن}\ ص_{ن+١} + ب_{ن}\ ص_{ن} = ق_{ن}\ . \qquad (٤ - ١٣)$$

النظرية ٤ - ٦ : اذا كان $ص_{ن}$ حلاً للمعادلة (٤ - ١٣)، وكان $س_{ن}$ أي حل آخر، كان $ع_{ن} = س_{ن} - ص_{ن}$ حلاً للمعادلة (٤ - ٤).

البرهان . لدينا

$$ع_{ن+٢} + أ_{ن}\ ع_{ن+١} + ب_{ن}\ ع_{ن}$$

$$= (س_{ن+٢} - ص_{ن+٢}) + أ_{ن} (س_{ن+١} - ص_{ن+١}) + ب_{ن} (س_{ن} - ص_{ن})$$

$$= (س_{ن+٢} + أ_{ن} س_{ن+١} + ب_{ن} س_{ن}) + (ص_{ن+٢} + أ_{ن} ص_{ن+١} + ب_{ن} ص_{ن})$$

$$= ق_{ن} - ق_{ن} = ٠$$

بعد ان عرفنا النظرية، يتضح لنا ان الحصول على جميع حلول المعادلة (٤ ـ ١٣) غير المتجانسة لا يقتضي الا الحصول على حل واحد للمعادلة (٤ ـ ١٣) بالاضافة الى الحل العام للمعادلة (٤ ـ ٤)، كما هو الحال في المعادلات التفاضلية.

التمارين ٤ ـ ٢

في التمارين ١ الى ٥ تحقق ان $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ حلان لكل معادلة فرق، ثم احسب قيساريتها

١. $ص_{ن+٢} - ٣ ص_{ن+١} + ٢ ص_{ن} = ٠$ ؛ $س_{ن} = ٢^{ن}$ ، $ص_{ن} = ١$

٢. $ص_{ن+٢} - ٤ ص_{ن+١} + ٤ ص_{ن} = ٠$ ؛ $س_{ن} = ٢^{ن}$ ، $ص_{ن} = ن\, ٢^{ن}$

٣. $ص_{ن+٢} + ص_{ن} = ٠$ ؛ $س_{ن} =$ جتا $(ن\pi / ٢)$ ، $ص_{ن} =$ جا $(ن\pi / ٢)$

٤. $ص_{ن+٢} - (ن + ٢) (ن + ١) ص_{ن} = ٠$ ؛ $س_{ن} = ن!$ ، $ص_{ن} = (-١)^{ن} ن!$

٥. $ص_{ن+٢} - ٧ ص_{ن+١} + ١٢ ص_{ن} = ٠$ ؛ $س_{ن} = ٣^{ن}$ ، $ص_{ن} = ٤^{ن}$

٦. اذا كان $س_{ن}$ حلاً للمعادلة $ص_{ن+٢} + أ_{ن} ص_{ن+١} + ب_{ن} ص_{ن} = ق_{ن}$ ،
وكان $ع_{ن}$ حلاً للمعادلة $ص_{ن+٢} + أ_{ن} ص_{ن+١} + ب_{ن} ص_{ن} = ف_{ن}$ ،
فبين ان $س_{ن} + ع_{ن}$ حل للمعادلة $ص_{ن+٢} + أ_{ن} ص_{ن+١} + ب_{ن} ص_{ن} = ق_{ن} + ف_{ن}$

هذا هو مبدأ التراكم في معادلات الفروق (انظر التمرين ٣ ـ ٢ ـ ١٥).

٧ . هذه معادلة متجانسة من الرتبة الثالثة :

$$ص_{ن+٣} + أ_{ن} ص_{ن+٢} + ب_{ن} ص_{ن+١} + حـ_{ن} ص_{ن} = ٠ .$$

بين انه اذا كان $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ ، $ع_{ن}$ حلولاً لها كانت اي ضمة خطية لهذه الحلول حلاً آخر.

٨ . في معادلة التمرين ٧ نعرف القيسارية كما يلي :

$$ق_{ن} (س، ص، ع) = محدد \begin{vmatrix} س_{ن} & ص_{ن} & ع_{ن} \\ س_{ن+١} & ص_{ن+١} & ع_{ن+١} \\ س_{ن+٢} & ص_{ن+٢} & ع_{ن+٢} \end{vmatrix}$$

اثبت ان $ق_{ن+١} (س ، ص ، ع) = حـ_{ن} ق_{ن} (س ، ص ، ع)$ واستنتج انه اذا كان $حـ_{ن} \neq ٠$ لكل ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . كان $ق_{ن} (س ، ص ، ع)$ صفراً دائماً، او انه لا يكون صفراً ابداً.

٩ . في التمرين ٨، بين انه اذا كان $حـ_{ن} \neq ٠$ لكل قيم ن، وكان كل من الحلول $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ ، $ع_{ن}$ لا يطابق الصفر، كان $ق_{ن} (س ، ص ، ع) \neq ٠$ اذا، وفقط اذا كانت الحلول الثلاثة مستقلة خطياً.

١٠ . في التمرين ٩، اذا علمنا ان الحلول الثلاثة مستقلة خطياً وان $غ_{ن}$ حل آخر، فبين ان هنالك ثوابت α ، β ، γ حيث

$غ_ن = \propto س_ن + \beta ص_ن + \gamma ع_ن$ لكل ن .

١١ . بين انه اذا كان $س_ن$ ، $ص_ن$ حلين للمعادلة غير المتجانسة ذات الرتبة الثالثة

$$ص_{ن+٣} + أ_ن ص_{ن+٢} + ب_ن ص_{ن+١} + حـ_ن ص_ن = ق_ن ،$$

كان $ع_ن = س_ن - ص_ن$ حلاً لرفيقتها المتجانسة .

١٢ . على فرض أن للمعادلة

$$ص_{ن+٢} + أ_ن ص_{ن+١} + ب_ن ص_ن = ٠ ، \quad ص_٠ = ٠$$

حلاً غير الصفر يحقق الشرط $ص_ك = ٠$ حيث ك عدد ما > ٠ ، اثبت ان $س_ك = ٠$ في اي حل آخر $س_ن$ لهذه المعادلة .

١٣* .اثبت النظرية ٤ ـ ٣ .

٤ ـ ٣ استعمال حل لأيجاد حل آخر

لنأخذ المعادلة المتجانسة الخطية

$$ص_{ن+٢} + أ_ن ص_{ن+١} + ب_ن ص_ن = ٠ ، \quad ب_ن \neq ٠ \quad ..... \quad (٤ ـ ١٤)$$

فاذا كانت المتتاليتان $أ_ن$ ، $ب_ن$ ليست ثوابت فليس هنالك طريقة عامة لايجاد حلول . ولكن، كشأننا في المعادلات التفاضلية المتجانسة ذات الرتبة الثانية، اذا عرفنا حلاً يمكن ان نجد حلاً آخر مستقلاً عنه خطياً (انظر البند ٣ ـ ٣) .

افرض ان $س_ن$ حل معروف، غير الصفر، للمعادلة (٤ ـ ١٤)، وسنبحث لها عن حل آخر بالشكل :

$$ص_ن = ف_ن س_ن \quad ، \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤ - ١٥)$$

حيث $ف_ن$ متتالية غير ثابتة يراد معرفتها . فلنأخذ متتالية أخرى

$$ك_ن = ف_{ن+١} - ف_ن \quad . \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤ - ١٦)$$

ولنتذكر ان القيسارية $قه_ن$ (س ، ص) هي بالشكل

$$قه_ن (س ، ص) = س_ن ص_{ن+١} - س_{ن+١} ص_ن$$

حيث $س_ن$ ، $ص_ن$ أي حلين للمعادلة (٤ - ١٤)، ولنفرض ان $ص_ن$ هو فعلاً حل . فنحصل بعد التبسيط الجبري على :

$$قه_ن (س ، ص) = س_{ن+١} س_ن \left(\frac{ص_{ن+١}}{س_{ن+١}} - \frac{ص_ن}{س_ن} \right)$$

$$= س_{ن+١} س_ن (ف_{ن+١} - ف_ن) = س_{ن+١} س_ن ك_ن \quad \dots\dots \quad (٤ - ١٧)$$

$$أي ان ك_ن = \frac{ق_ن (س ، ص)}{س_{ن+١} س_ن} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤ - ١٨)$$

فاذا استعملنا القيسارية الصيغة التي تلت المعادلة (٤ - ٨) ينتج .

$$ك_ن = \frac{\prod_{ر=٠}^{ن-١} ب_ر}{س_{ن+١} س_ن} \quad ، \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤ - ١٩)$$

حيث فرضنا ان $قه_٠ = ١$ ، وهذا مقبول لأن الحل المجهول $ص_ن$ مستقل عن $س_ن$ (وهذا يعني ان $قه_٠ \neq ٠$) ومعرف حتى ن = ثابتاً ما .

واخيراً، من (٤ - ١٩) نستنتج معادلة فرق من الرتبة الأولى هي :

$$ف_{ن+1} - ف_{ن} = \frac{\prod_{ر=0}^{ن} ب_{ر}}{س_{ن+1}\, س_{ن}} = د_{ن} \,، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٢٠)$$

وهذه، حسب المعادلة (٢ ـ ٦٦) حلها كما يلي :

$$ف_{ن} = ف_{0} + \sum_{ر=0}^{ن-1} د_{ر} \,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٢١)$$

ولأن $س_{ن}$ ، $ب_{ن}$ ليس اي منهما صفراً فان $د_{ن}$ ليست صفراً، مهما تكن ن. لذا فان $ف_{ن}$ ليست عدداً ثابتاً اذن فان $ص_{ن} = ف_{ن}\, س_{ن}$ هي حل آخر للمعادلة (٤ ـ ١٤) مستقل خطياً عن الحل $س_{ن}$.

المثال ٤ ـ ٣ ـ ١ $ص_{ن+2} - ٤\, ص_{ن+1} + ٤\, ص_{ن} = 0$. هنالك حل يسهل تبينه : $س_{ن} = ٢^{ن}$. (سندرس المزيد عن المعادلات ذات المعاملات الثابتة في البندين التاليين) لنجعل $ص_{ن} = ف_{ن}\, س_{ن}$ حلاً آخر، فمن (٤ ـ ٢٠) ينتج :

$$د_{ن} = \frac{\prod_{ر=0}^{ن+1} ب_{ر}}{س_{ن}\, س_{ن+1}} = \frac{٤^{ن}}{٢^{ن} \times ٢^{ن+1}} = \frac{1}{٢}$$

فيكون

$$ف_{ن} = ف_{0} + \frac{ن}{٢}$$

ونختار $ف_{0}$ لاعلى التعيين، فلتكن $ف_{0} = 0$ ، فيكون

$$ف_ن = \frac{ن}{٢}،\quad ص_ن = \frac{ن}{٢} \quad س_ن = \frac{ن\,٢^ن}{٢}$$

فالحل العام اذن

$$ص_ن = حـ_١\,٢^ن + حـ_٢\,ن\,٢^ن،$$

(الحق مقام الكسر بالثابت $حـ_٢$).

المثال ٤ ـ ٣ ـ ٢ ليكن $ص_{ن+٢} - (ن + ٢)(ن + ١)\,ص_ن = ٠$. يسهل ان نتحقق ان $س_ن = ن!$ هو حل. فلأن $ب_ن = -(ن + ٢)(ن + ١)$، يكون :

$$د_ن = \frac{\prod_{ر=٠}^{ن-١} ب_ر}{س_{ن+١}\,س_ن} = \frac{(-١)^ن (ن + ١)!\,ن!}{(ن + ١)!\,ن!} = (-١)^ن .$$

فيكون

$$ف_ن = ف_٠ + \sum_{ر=٠}^{ن-١} د_ر = ف_٠ + \frac{١ - (-١)^ن}{٢}،$$

لأن المتتالية الهندسية $١ + أ + أ^٢ + \dots + أ^{ن-١} = (١ - أ^ن)/(١ - أ)$.ولأن $ف_٠$ اعتباطي نعتبر $ف_٠ = -\frac{١}{٢}$ فيكون

$$ص_ن = ف_ن\,س_ن = \frac{-(-١)^ن}{٢}\,ن!$$

والحل العام هو

$$ص_ن = حـ_١\,ن! + حـ_٢\,(-١)^ن\,ن!$$

لاحظ ان ن! ، $(-١)^{\text{ن}}$ ن! مستقلان خطياً لأن $(-١)^{\text{ن}}$ ليس ثابتاً.

التمارين ٤ - ٣

في كل من التمارين التالية معادلة فرق وحل لها والمطلوب ايجاد حل آخر مستقل عنه خطياً :

١. $\text{ص}_{\text{ن}+٢} - ٢\,\text{ص}_{\text{ن}+١} + \text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ ؛ $\text{س}_{\text{ن}} = ٧$

٢. $\text{ص}_{\text{ن}+٢} + ٧\,\text{ص}_{\text{ن}+١} + ١٠\,\text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ ؛ $\text{س}_{\text{ن}} = (-٢)^{\text{ن}}$

٣. $(\text{ن} + ٢)\,\text{ص}_{\text{ن}+٢} - (\text{ن} + ١)\,\text{ص}_{\text{ن}+١} - \text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ ؛ $\text{س}_{\text{ن}} = ٣$

٤. $\text{ص}_{\text{ن}+٢} + ١٦\,\text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ ؛ $\text{س}_{\text{ن}} = ٤^{\text{ن}}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ن}\,\pi}{٢}$

٥. $\text{ص}_{\text{ن}+٢} - ٦\,\text{ص}_{\text{ن}+١} + ٨\,\text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ ؛ $\text{س}_{\text{ن}} = ٤^{\text{ن}}$

٦. $\text{ص}_{\text{ن}+٢} + ٦\,\text{ص}_{\text{ن}+١} + ٩\,\text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ ؛ $\text{س}_{\text{ن}} = (٥\,\text{ن})\,٣^{\text{ن}-١}$

٧. $\text{ص}_{\text{ن}+٢} - \text{ص}_{\text{ن}+١} - (\text{ن} + ١)^{٢}\,\text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ ؛ $\text{س}_{\text{ن}} = \text{ن}!$

٨. $\text{ص}_{\text{ن}+٢} - (\text{ن} + ١)\,\text{ص}_{\text{ن}+١} - (\text{ن} + ١)\,\text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ ؛ $\text{س}_{\text{ن}} = \text{ن}!$

٤ ـ ٤ المعادلات المتجانسة

ذات المعاملات الثابتة :

حالة الجذور الحقيقية

ندرس الآن المعادلة المتجانسة الخطية ذات المعاملات الثابتة :

$$ص_{ن+٢} + أ ص_{ن+١} + ب ص_{ن} = ٠ ، ب \neq ٠ ، \qquad .... \qquad (٤ ـ ٢٢)$$

ونعطي طريقة سهلة لأيجاد حل عام لها.

اما معادلة الرتبة الأولى $ص_{ن+١} = أ ص_{ن}$ ، فقد رأينا في البند ٢ ـ ٦ ان حلها العام هو $ص_{ن} = أ^{ن} ص_{٠}$. فليس مستنكراً اذن ان نحزر ان هناك حلولاً للمعادلة (٤ ـ ٢٢) بالشكل $ص_{ن} = \lambda^{ن}$ حيث λ ذات قيمة ما (حقيقية اومركبة). فنعوض $ص_{ن} = \lambda^{ن}$ في المعادلة (٤ ـ ٢٢) فينتج :

$$\lambda^{ن+٢} + أ \lambda^{ن+١} + ب \lambda^{ن} = ٠$$

ولأن هذه المعادلة تصح لكل ن > ٠ فهي تصح عند ن = ٠ ، فيكون

$$\lambda^{٢} + أ \lambda + ب = ٠ \qquad .... \qquad (٤ ـ ٢٣)$$

وهذه هي المعادلة المساعدة ، لمعادلة الفرق (٤ ـ ٢٢) وهي تطابق مساعدة المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية ، التي إستنتجناها في البند (٣ ـ ٤). فهنا أيضاً جذرا المعادلة :

$$\lambda_{١} = \frac{-أ + \sqrt{أ^{٢} - ٤ب}}{٢} ، \lambda_{٢} = \frac{-أ - \sqrt{أ^{٢} - ٤ب}}{٢} . \qquad .... \qquad (٤ ـ ٢٤)$$

وهنا ايضاً امامنا ثلاث حالات.

الحالة الأولى. $أ^{2} - ٤ب > ٠$. في هذه الحالة هنالك جذران حقيقيان مختلفان، λ_{1}، λ_{2} يعطيهما (٤ ـ ٢٤)، فيكون $س_{ن} = \lambda_{1}^{ن}$، $ص_{ن} = \lambda_{2}^{ن}$ حلين للمعادلة (٤ ـ ٢٢). ولأن

$ق_{ن}(س، ص) = س_{ن+1} ص_{ن} - س_{ن} ص_{ن+1} = \lambda_{1}^{ن} \lambda_{2}^{ن} (\lambda_{1} - \lambda_{2})$،

فان ق (س، ص) ليست صفراً الا في حالة عندما تكون λ_{1} او λ_{2} صفراً. وهذا لا يتم الا اذا كانت ب = ٠ وهذا ما استبعدناه. اذن فقد برهنا النظرية التالية:

النظرية ٤ ـ ٧ اذا كان $أ^{2} - ٤ ب > ٠$ كان الحل العام للمعادلة (٤ ـ ٢٢) هو:

$$ص_{ن} = حـ_{1} \lambda_{1}^{ن} + حـ_{2} \lambda_{2}^{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ ـ ٢٥)$$

حيث $حـ_{1}$، $حـ_{2}$ ثابتان λ_{1}، λ_{2} كما في (٤ ـ ٢٤).

المثال ٤ ـ ٤ ـ ١ خذ المعادلة

$$س_{ن+2} + ٥ س_{ن+1} - ٦ س_{ن} = ٠$$

المعادلة المساعدة هي $\lambda^{2} + ٥ \lambda - ٦ = ٠$ وجذراها $\lambda_{1} = ٦$، $\lambda_{2} = -١$،
فالحل العام: $ص_{ن} = حـ_{1} (٦)^{ن} + حـ_{2} (-١)^{ن}$. فاذا اعطينا الشرطين الابتدائيين $ص_{٠} = ٣$، $ص_{1} = ١١$، مثلاً، نحصل على المنظومة:

$حـ_{1} + حـ_{2} = ٣$،

$٦ حـ_{1} - حـ_{2} = ١١$،

وحلها الوحيد $ح_1 = 2$ ، $ح_2 = 1$. فالحل الخاص هو $ص_ن = 2 \times 6^ن + (-1)^ن$.

الحالة الثانية. $أ^2 - 4ب = 0$. هنا يتساوى جذرا المعادلة (٤ ـ ٢٣). فلدينا الحل $س_ن = \lambda^ن$ ، حيث $\lambda = -أ/2$. ويمكن الحصول على حل آخر مستقل خطياً عن هذا بطريقة البند السابق. نجعل $ص_ن = ف_ن س_ن$ يرمز الى الحل الآخر، فينتج من (٤ ـ ٢٠) :

$$د_ن = \frac{\prod_{ر=0}^{ن-1} ب_ر}{س_{ن+1} س_ن} = \frac{ب^ن}{\lambda^{ن+1} \lambda^ن} = \frac{ب^ن}{\lambda^{2ن+1}} .$$

ولكن $ب = (أ/2)^2$ ، $\lambda = (-أ/2)$ ، فيكون

$$د_ن = \frac{(أ/2)^{2ن}}{(-أ/2)^{2ن+1}} = \frac{1}{(-أ/2)} = \frac{1}{\lambda} .$$

فاذن $ف_ن = ف_0 + \sum_{ر=0}^{ن-1} د_ر = ن/\lambda$ (نجعل $ف_0 = 0$) فيكون $ص_ن = ن \lambda^{ن-1}$.

اذن فقد بينا النتيجة التالية.

النظرية ٤ ـ ٨ اذا كان $أ^2 - 4ب = 0$. يكون الحل العام للمعادلة (٤ ـ ٢٢) هو

$$ص_ن = ح_1 \lambda^ن + ح_2 ن \lambda^ن ، \qquad \text{(٤ ـ ٢٦)}$$

حيث $\lambda = -أ/2$ ، $ح_1$ ، $ح_2$ ثابتان اعتباطيان.

المثال ٤ ـ ٤ ـ ٢ خذ المعادلة

$$ص_{ن+2} - 6 ص_{ن+1} + 9 ص_ن = 0 ، \qquad \text{(٤ ـ ٢٧)}$$

والشرطين الابتدائيين $ص_. = ٥$ ، $ص_١ = ١٢$. فالمعادلة المساعدة هي $\lambda^٢ - ٦\lambda + ٩ = ٠$ ولها جذر مزدوج هو $\lambda = ٣$. فالحل العام

$$ص_ن = حـ_١ ٣^ن + حـ_٢ ن ٣^ن = ٣^ن (حـ_١ + ن حـ_٢)$$

فندخل الشرطين الابتدائيين فينتج

$$حـ_١ = ٥ \quad ،$$

$$٣ حـ_١ + ٣ حـ_٢ = ١٢$$

فالحل الوحيد هو $حـ_١ = ٥$ ، $حـ_٢ = -١$ ، فالحل الخاص للمعادلة (٤ ـ ٢٧) هو $ص_ن = ٥ \times ٣^ن - ن \times ٣^ن = ٣^ن (٥ - ن)$.

وسندرس الحالة الثالثة في البند القادم .

التمارين ٤ ـ ٤

في التمارين من ١ الى ١٠ اوجد الحل العام للمعادلة المعطاة . واذا اعطيت شروطاً ابتدائية فأوجد الحل الوحيد الذي يحققها :

١ . $ص_{ن+٢} - ٣ ص_{ن+١} - ٤ ص_ن = ٠$

٢ . $ص_{ن+٢} + ٧ ص_{ن+١} + ٦ ص_ن = ٠$ ، $ص_. = ٠$ ، $ص_١ = ١$

٣ . $٦ ص_{ن+٢} + ٥ ص_{ن+١} + ص_ن = ٠$ ، $ص_. = ١$ ، $ص_١ = ٠$

٤ . $ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ٦ ص_ن = ٠$ ، $ص_. = ١$ ، $ص_١ = ٢$

٥ . $ص_{ن+٢} + ٢ ص_{ن+١} + ص_ن = ٠$

٦ . $ص_{ن+٢} + ١٦ ص_{ن+١} + ٦٤ ص_ن = ٠$ ، $ص_. = ٢$ ، $ص_١ = ٠$

٧. $ص_{ن+٢} - \frac{٢}{٣} ص_{ن+١} + \frac{١}{٩} ص_{ن} = ٠$

٨. $٣ ص_{ن+٢} - ٢ ص_{ن+١} - ص_{ن} = ٠$ ، $ص_{٠} = ١$ ، $ص_{١} = ٣$

٩. $١٠ ص_{ن+٢} - ص_{ن+١} - ص_{ن} = ٠$

١٠. $٣٦ ص_{ن+٢} - ٦٠ ص_{ن+١} + ٢٥ ص_{ن} = ٠$

١١. في دراسة للأمراض المعدية احتفظت احدى المدارس بسجل عن حوادث انتشار الحصبة. وقد قدر ان احتمال حدوث حالة عدوى جديدة واحدة على الأقل بعد ن اسابيع من انتشار المرض هي

$ح_{ن} = ح_{ن-١} - \frac{١}{٥} ح_{ن-٢}$ فاذا كان $ح_{٠} = ٠$ ، $ح_{١} = ١$ ، فما $ح_{ن}$ ؟

بعد كم اسبوع يصبح احتمال حُدوث حالة جديدة من الحصبة اقل من ١٠ في المئة ؟

١٢. تعرف اعداد فيبوناتشي بأنها متتالية من اعداد بحيث ان كل واحد منها يساوي مجموع سابقيه والأعداد الأولى في المتتالية هي ١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، . . .

أ) ضع معادلة فرق ذات قيمة ابتدائية تتولد بها هذه الاعداد.

ب) أوجد حل هذه المعادلة .

جـ) بين ان النسبة بين كل عددين متتاليين منها تقترب من $(١ + \sqrt{٥})/٢$ عند $ن \leftarrow \infty$ تسمى هذه النسبة بالنسبة الذهبية ، وقد كانت تستعمل في فن المعمار الاغريقي القديم كلما انشئت ابنية مستطيلة فقد كان يعتقد انه عندما تكون هذه هي النسبة بين ضلعي المستطيل يكون منظره اكثر متعة للعين.

١٣. يتنافس فصيلتان من حشرات الفواكه وهما تعيشان في ظروف موائمة. وفي كل

جيل تتزايد الفصيلة أ بمقدار ٦٠ في المئة وتزداد الفصيلة ب بمقدار ٤٠ في المئة. فاذا بدأتا بألف حشرة من كل فصيلة فكم يكون مجموعهما الكلي بعد ن أجيال ؟

١٤ . خذ معادلة الفرق التالية، وهي ن من الرتبة الثالثة :

$$ص_{ن+٣} + أ ص_{ن+٢} + ب ص_{ن+١} + حـ ص_{ن} = ٠$$

أ) بين ان $س_{ن} = \lambda^{ن}$ يكون حلاً للمعادلة اذا كانت λ تحقق المعادلة البديلة

$$\lambda^{٣} + أ \lambda^{٢} + ب \lambda + حـ = ٠ .$$

ب) اذا علمت ان $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ ، $\lambda_{٣}$ هي جذور حقيقية مختلفة لهذه المعادلة بين ان الحل العام لها هو

$$ص_{ن} = حـ_{١} \lambda_{١}^{ن} + حـ_{٢} \lambda_{٢}^{ن} + حـ_{٣} \lambda_{٣}^{ن} .$$

(انظر التمارين ٤ ـ ٢ ـ ٨ ، ٤ ـ ٢ ـ ٩ ، ٤ ـ ٢ ـ ١٠ .)

جـ) أذا كان $\lambda_{١}$ جذراً مزدوجاً فبين ان الحل العام هو

$$ص_{ن} = حـ_{١} \lambda_{١}^{ن} + حـ_{٢} ن \lambda_{١}^{ن} + حـ_{٣} \lambda_{٢}^{ن} .$$

د) اذا كان λ جذراً مثلثاً فبين ان الحل العام هو

$$ص_{ن} = حـ_{١} \lambda_{١}^{ن} + حـ_{٢} ن \lambda_{١}^{ن} + حـ_{٣} ن^{٢} \lambda_{١}^{ن} .$$

في التمارين التالية استعمل نتائج التمرين ١٤ لايجاد الحل العام لكل من المعادلات التالية :

١٥ . $ص_{ن+٣} - ٦ ص_{ن+٢} + ١١ ص_{ن+١} - ٦ ص_{ن} = ٠$

١٦ . $ص_{ن+٣} + ٦ ص_{ن+٢} - ١٣ ص_{ن+١} - ٤٢ ص_{ن} = ٠$

١٧. $ص_{ن+٣} - ٣ ص_{ن+١} + ٢ ص_{ن} = ٠$

١٨. $ص_{ن+٣} - ٦ ص_{ن+٢} + ١٢ ص_{ن+١} - ٨ ص_{ن} = ٠$

١٩. $ص_{ن+٣} - ٣ ص_{ن+٢} + ٣ ص_{ن+١} - ص_{ن} = ٠$

٢٠. $ص_{ن+٣} + ٦ ص_{ن+٢} - ٣٢ ص_{ن} = ٠$

٤ ـ ٥ المعادلات المتجانسة

ذات المعاملات الثابتة

حالة الجذور المركبة

عندما يكون $أ^{٢} - ٤ ب < ٠$ ، يكون جذرا المعادلة (٤ ـ ٢٣) هما

$$\lambda_{١} = \propto + \beta i \text{ ،} \quad \lambda_{٢} = \propto - \beta i \qquad \text{(٤ ـ ٢٨)}$$

حيث $\propto = -أ/٢$ ،

$\beta = \sqrt{٤ب - أ^{٢}} \,/\, ٢$.

ولأن الحلول ستكون من النوع $\lambda^{ن}$ يجب ان نبين كيف تحسب قوى الاعداد المركبة.

ويصبح هذا سهلاً جداً اذا عبرنا عن هذه الاعداد بالشكل القطبي : فاذا كان

$ع = ر e^{i\theta}$ كان $ع^{ن} = (ر e^{i\theta})^{ن} = ر^{ن} e^{iن\theta}$

لكن $e^{iن\theta} = جتا ن\theta + i حا ن\theta$.

اذن فقد استنتجنا القاعدة التالية المسماة **بقانون دي مويفر**.

$$(جتا \theta + i جا \theta)^{ن} = جتا ن\theta + i جا ن\theta \qquad \text{(٤ ـ ٢٩)}$$

المثال ٤ ـ ٥ ـ ١ ليكن ع = ١ + i . فيكون ر = $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{2}$ ،

θ = ظا$^{-1}$ (β / α) = ظا$^{-1}$ ١ = $\pi / 4$. فيكون ع = $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. اذن

$$ع^3 = 2^{\frac{3}{2}} e^{3i\pi/4}$$

$$= 2\sqrt{2}\,(\text{جتا} \frac{3\pi}{4} + i \,\text{جا} \frac{3\pi}{4}) = -2 + 2i$$

وبالطبع اسهل ان نكتب (١ + i) مباشرة، ولكن القوى الأعلى للعدد ١ + i تحسب بهذه الطريقة.

نعــود الآن الى الحــالـة حيث أ^2 - ٤ ب < ٠ فنكتب الجـذرين λ_1 ، λ_2 للمعادلة (٤ ـ ٢٨) على النحو:

$$\lambda_1 = ر\, e^{i\theta} \quad ، \quad \lambda_2 = ر\, e^{-i\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٣٠)$$

حيث ر = $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ، θ = ظا$^{-1}$ (β / α)، ٠ < θ < π .

فيكون الحلان المستقلان خطياً:

$$س_ن = (ر\, e^{i\theta})^ن = ر^ن e^{in\theta} \quad ، \quad ص_ن = ر^ن e^{-in\theta} \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ٣١)$$

فيكون $\frac{1}{2}$ (س$_ن$ + ص$_ن$) حلاً، وكذلك يكون (١/ $2i$) (س$_ن$ − ص$_ن$). وقد رأينا في البند (٣ ـ ٥) ان هذين الحلين يمكن ان يكتبا س$^*_ن$ = ر^ن جتا ن θ ، ص$^*_ن$ = ر^ن جا ن θ : على التوالي. وواضح انهما مستقلان خطياً لأن احدهما ليس مضاعفاً للآخر بعدد ثابت.

طريقة ثانية: نبين ان القيسارية ق$_ن$(س* ، ص*) ليست صفراً :

$$قه_ن(س^*، ص^*) = س_١^* ص_١^* - س_٠^* ص_١^*$$

$$= ر جتا \theta \ جا(٠) - جتا(٠) \times ر جا \theta$$

$$= - ر جا \theta$$

ولأن $\beta = \sqrt{٤ب - أ^٢} / ٢ \neq ٠$، ينتج ان $ر = \sqrt{\alpha^٢ + \beta^٢} \neq ٠$، لأن $\alpha^٢ + \beta^٢$ يجب ان تكون موجبة وايضاً $\theta = ظا^{-١} (\beta / \alpha)$ لا يمكن ان تكون صفراً ولا π، لأن ظا (٠) = ظا π = ٠، ظا $\theta = \beta / \alpha \neq ٠$ فاذن قه. (س*، ص*) ≠ ٠ وهذا يتضمن ان $قه_ن (س^*، ص^*)$ ليس صفراً وان $س^*_ن$، $ص^*_ن$ مستقلا خطيا.

ونلخص هذه النتائج بالنظرية التالية

النظرية ٤ ـ ٩ اذا كان $أ^٢ - ٤ب < ٠$. فالحل العام للمعادلة المتجانسة

$$ص_{ن+٢} + أ ص_{ن+١} + ب ص_ن = ٠$$ هـو

$$ص_ن = جـ_١ ر^ن جتا ن \theta + جـ_٢ ر^ن جا ن \theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٣٢)$$

حيث $ر = \sqrt{\alpha^٢ + \beta^٢}$، $\theta = ظا^{-١} \beta / \alpha$، $٠ < \theta < \pi$، $\alpha = - أ/٢$، $\beta = \sqrt{٤ب - أ^٢} / ٢$، $حـ_١$، $حـ_٢$ ثابتان.

المثـال ٤ ـ ٥ ـ ٢ في $ص_{ن+٢} + ص_ن = ٠$، المعـادلـة المسـاعـدة هي $\lambda^٢ + ١ = ٠$، وجذراها $\pm i$ هنا $\alpha = ٠$، $\beta = ١$، ر = ١، $\theta = \pi / ٢$، والحل العام

$$ص_ن = حـ_١ جتا \frac{ن \pi}{٢} + حـ_٢ جا \frac{ن \pi}{٢} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٣٣)$$

هذه هي معـادلـة الحـركـة التـوافقيـة المتميـزة، المقابلة للحركة التوافقية البسيطة التي

درسناها في المثال ٣ ـ ٥ ـ ١ .

فاذا جعلنا ص. = ٠، $ص_١$ = ١٠٠٠ يصير

$$حـ_١ = ٠ ، حـ_١ جتا \frac{\pi}{٢} + حـ_٢ جا \frac{\pi}{٢} = ١٠٠٠ ،$$

فيكون $حـ_١ = ٠$ ، $حـ_٢ = ١٠٠٠$ ، ويكون الحل الخاص :

$$ص_ن = ١٠٠٠ جا \frac{ن \pi}{٢}$$

المثال ٤ ـ ٥ ـ ٣ في المثال ١ ـ ٣ ـ ٤ استخرجنا معادلة فرق تبين تأثير الاجيال السابقة في نمو السكان :

$$س_{ن+٢} - ر س_{ن+١} - ز س_ن = ٠ \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤ - ٣٤)$$

حيث ر ، ز يقيسان الأهمية النسبية للجيلين السابقين.

فالمعادلة المساعدة هي $\lambda^٢ - ر \lambda - ز = ٠$، وجذراها

$$\lambda_١ = \frac{ر + \sqrt{ر^٢ + ٤ ز}}{٢} ، \lambda_٢ = \frac{ر - \sqrt{ر^٢ + ٤ ز}}{٢} .$$

فاذا كان $ر^٢ > - ٤ ز$ كان الجذران حقيقيين مختلفين وكان الحل العام :

$$س_ن = حـ_١ \lambda_١^ن + حـ_٢ \lambda_٢^ن .$$

فاذا كان $|\lambda_١| < ١$ ، $|\lambda_٢| < ١$ كان $س_ن \leftarrow ٠$ حينما $ن \leftarrow \infty$. اما اذا كان $|\lambda_١|$ أو $|\lambda_٢|$ أكبر من ١ كان $|س_ن| \leftarrow \infty$. واذا كان $ر^٢ = - ٤ ز$ ، (ز < ٠)

فالحل العام

$$س_ن = حـ_١ (ر/٢)^ن + حـ_٢ ن (ر/٢)^{ن-١} .$$

وفي هذه الحالة $س_ن \leftarrow ٠$ اذا كان $|ر| < ٢$ ، اما اذا كان $|ر| \geqslant ٢$ فالحل يقارب ∞ . وفي الحالة الثالثة ، $ر^٢ < - ٤ ز$ يكون الحل العام :

$$س_ن = (- ز)^{ن/٢} (حـ_١ جتا ن \theta + حـ_٢ جا ن \theta) ،$$

حيث $\theta = ظا^{-١} \sqrt{- ر^٢ - ٤ ز} / ر$. فاذا كان $- ز < ١$ فالحل $س_ن$ يقارب الصفر على نحو متأرجح وهذا ما يسمى **بالحركة التوافقية المميزة** المكبوحة (damped discrete harmonic motion) (انظر الشكل ٤ ـ ١).

واذا كان $- ز = ١$ تنتج الحركة التوافقية التي رأيناها في المثال السابق.

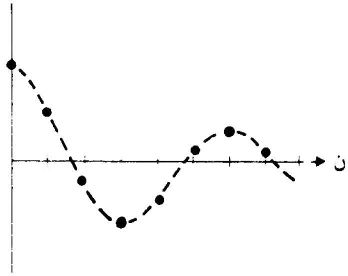
وأخيراً اذا كان $- ز > ١$ فالحل بتعاظم في حركة تأرجح تسمى **حركة توافقية مميزة مدفوعة** (انظر الشكل ٤ ـ ٢).

ومن الممتع ان نرى انه حتى في هذين النموذجين البسيطين تعتمد طبيعة الحل بشكل حاسم على الأهمية النسبية للسكان في الجيلين السابقين.

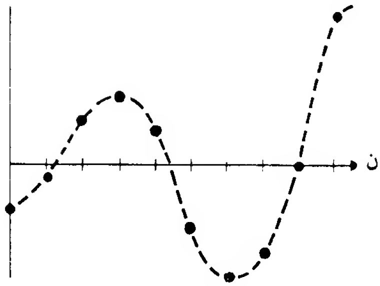
التمارين ٤ ـ ٥

في التمارين ١ الى ٤ أوجد الحل العام لكل معادلة فرق. واذا اعطيت شروطاً ابتدائية فأوجد الحل الوحيد الذي يحققها :

١ . $ص_{ن+٢} - \sqrt{٢}\, ص_{ن+١} + ص_ن = ٠$



الشكل ٤ ـ ١



الشكل ٤ ـ ٢

٢ . $ص_{ن+٢} - ٢ ص_{ن+١} + ٢ ص_{ن} = ٠$ ، $ص_{.} = ١$ ، $ص_{١} = ٢$

٣ . $ص_{ن+٢} + ٨ ص_{ن} = ٠$

٤ . $ص_{ن+٢} - ٢ ص_{ن+١} + ٤ ص_{ن} = ٠$، $ص_{.} = ٠$ ، $ص_{١} = ١$

٥ . ابحث في خصائص الحل في كل من المعادلتين التاليتين باعتبارها حالة خاصة من نموذج نمو السكان في المثال ٤ ـ ٥ ـ ٣ .

أ) $س_{ن+٢} = س_{ن+١} + \frac{١}{٢} س_{ن}$

ب) $س_{ن+٢} = س_{ن+١} - \frac{١}{٢} س_{ن}$

٦. اليك هذا التكامل

$$ك_{ن}(\theta) = \int_{\cdot}^{\pi} \frac{\text{جتا ن س} - \text{جتا ن } \theta}{\text{جتا س} - \text{جتا } \theta} \text{ د س ..}$$

أ) بين ان $ك_{ن+٢}(\theta) = ٢ \text{ جتا } \theta \; ك_{ن+١}(\theta) + ك_{ن}(\theta) = ٠$.

ب) حل هذه المعادلة واوجد تعبيراً صريحاً يعطي $ك_{ن}(٠)$

[**ارشاد** : من الضروري ان نجد اولاً القيمتين الابتدائيتين $ك_{٠}(٠)$ ، $ك_{١}(٠)$]

٧. درسنا في الفصل الثاني معادلة ركاتي اللاخطية، ذات الرتبة الأولى

$ص_{ن} ص_{ن-١} + أ_{ن} ص_{ن} + ب_{ن} ص_{ن-١} = حـ_{ن}$.

فبتعويض $ص_{ن} = س_{ن} / س_{ن+١} - ب_{ن}$ بين ان هذه المعادلة تصبح :

$$(أ_{ن} ب_{ن} + حـ_{ن}) س_{ن+١} - (أ_{ن} - ب_{ن-١}) س_{ن} - س_{ن-١} = ٠ .$$

استخدم نتائج التمرين ٧ في ايجاد الحل العام لمعادلات الفروق في التمارين ٨ الى ١٢

٨. $ص_{ن} ص_{ن-١} + ٢ ص_{ن} - ٣ ص_{ن-١} = ٢$

٩. $ص_{ن} ص_{ن-١} - ص_{ن} - ص_{ن-١} = ١$

١٠ $ص_{ن} ص_{ن-١} + ص_{ن} + ص_{ن-١} = ١$

١١. $٤ ص_{ن} ص_{ن-١} + ٦ ص_{ن} - ٣ ص_{ن-١} = ٠$

١٢. $٢ ص_{ن} ص_{ن-١} + ٢ ص_{ن} + ٤ ص_{ن-١} = -٥$.

استعمل طريقة التمرين (٤ ـ ٤ ـ ١٤) ونتائج هذا البند لايجاد الحل العام لكل معادلة

فروق في التمارين التالية :

١٣. $ص_{ن+٣} - ٤ ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ٢ ص_{ن} = ٠$

١٤. $ص_{ن+٣} - ص_{ن+١} + \sqrt{٢} ص_{ن} = ٠$

١٥. $ص_{ن+٣} - ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ص_{ن} = ٠$

١٦. $ص_{ن+٣} - ٨ ص_{ن+٢} + ٨ ص_{ن+١} - ٦٤ ص_{ن} = ٠$

١٧. $ص_{ن+٣} + ٤ ص_{ن+٢} - ٨ ص_{ن+١} + ٢٤ ص_{ن} = ٠$

٤ ـ ٦ المعادلات اللامتجانسة :

تغيير الثوابت

هنالك طريقتان لحل معادلات الفروق اللامتجانسة : المعاملات غير المعينة وتغيير الثوابت، وهما يناظران طرق حل المعادلات التفاضلية اللامتجانسة . وفي هذا البند ندرس طريقة تغيير الثوابت، وهي طريقة بالغة الأثر، واما طريقة المعاملات غير المعينة فنناقشها في التمارين :

فكما في المعادلات التفاضلية ، نعتبر ان للمعادلة :

$$ص_{ن+٢} + أ_{ن} ص_{ن+١} + ب_{ن} ص_{ن} = ق_{ن} ، ب_{ن} \neq ٠ \quad .... \quad (٤ ـ ٣٥)$$

حلاً بالصيغة

$$ع_{ن} = حـ_{ن} س_{ن} + د_{ن} ص_{ن} \quad .... \quad (٤ ـ ٣٦)$$

حيث $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ حلان مستقلان خطياً، للمعادلة المتجانسة . فمن المعادلة (٤ ـ ٣٦) ينتج ان :

$$ع_{ن+1} = حـ_{ن+1} س_{ن+1} + د_{ن+1} ص_{ن+1}$$

فبجمع وطرح $حـ_{ن} س_{ن+1}$ ، $د_{ن} ص_{ن+1}$ ينتج :

$$ع_{ن+1} = حـ_{ن} س_{ن+1} + د_{ن} ص_{ن+1} + (حـ_{ن+1} - حـ_{ن}) س_{ن+1} + (د_{ن+1} - د_{ن}) ص_{ن+1}$$

.... (٤ ـ ٣٧).

ومن المناسب ان نعتبر، كأحد شرطين يلزم تحديدهما لايجاد $حـ_{ن}$ ، $د_{ن}$ ، ان

$$(حـ_{ن+1} - حـ_{ن}) س_{ن+1} + (د_{ن+1} - د_{ن}) ص_{ن+1} = ٠$$ .... (٤ ـ ٣٨)

لكل ن. وهذا الشرط يطابق شرط المعادلة (٣ ـ ٤٢) في المعادلات التفاضلية.

فيكون $ع_{ن+1} = حـ_{ن} س_{ن+1} + د_{ن} ص_{ن+1}$ .... (٤ ـ ٣٩).

، $ع_{ن+2} = حـ_{ن+1} س_{ن+2} + د_{ن+1} ص_{ن+2}$ .... (٤ ـ ٤٠)

فاذا اعتبرنا $ع_{ن}$ حلا للمعادلة (٤ ـ ٣٥) ينتج ان

$$ق_{ن} = ع_{ن+2} + أ_{ن} ع_{ن+1} + ب_{ن} ع_{ن}$$

$$= (حـ_{ن+1} - حـ_{ن}) س_{ن+2} + (د_{ن+1} - د_{ن}) ص_{ن+2} + حـ_{ن} [س_{ن+2} +$$

$$أ_{ن} س_{ن+1} + ب_{ن} س_{ن}]$$

$$+ د_{ن} [ص_{ن+2} + أ_{ن} ص_{ن+1} + ب_{ن} ص_{ن}].$$ .... (٤ ـ ٤١)

وما في الحاصرتين، في المعادلة (٤ ـ ٤١)، قيمته صفر، لأن $س_{ن}$ ، $ص_{ن}$ حلان للمعادلة (٤ ـ ٣٥). فيبقى لدينا الشرط الثاني ، [وهو يطابق (٣ ـ ٤٣)] الذي يتحقق لكل ن، وهو

$$(ح_{ن+1} - ح_{ن})\, س_{ن+2} + (د_{ن+1} - د_{ن})\, ص_{ن+2} = ق_{ن} \quad \ldots\ldots (٤ - ٤٢)$$

فبضم (٤ ـ ٤٢) و (٤ ـ ٣٨) نحصل على المنظومة التالية بالمجهولين $(ح_{ن+1} - ح_{ن})$ و $(د_{ن+1} - د_{ن})$:

$$(ح_{ن+1} - ح_{ن})\, س_{ن+1} + (د_{ن+1} - د_{ن})\, ص_{ن+1} = ٠ \,،$$

$$(ح_{ن+1} - ح_{ن})\, س_{ن+2} + (د_{ن+1} - د_{ن})\, ص_{ن+2} = ق_{ن} \,. \quad \ldots\ldots (٤ - ٤٣)$$

ومحددة هذه المنظومة، اي $ﻗﻫ_{ن+1}(س ، ص)$ ليست صفراً، وذلك حسب النظرية ٤ - ٤ ، فيكون

$$ح_{ن+1} - ح_{ن} = \frac{ق_{ن}\, ص_{ن+1}}{ﻗﻫ_{ن+1}(س ، ص)} \,،$$

$$د_{ن+1} - د_{ن} = \frac{ق_{ن}\, س_{ن+1}}{ﻗﻫ_{ن+1}(س ، ص)} \quad \ldots\ldots (٤ - ٤٤)$$

والمعادلتان (٤ ـ ٤٤) هما معادلتا فرق بالمجهولين $ح_{ن}$ ، $د_{ن}$ ، ويمكن حلهما بالمعادلة (٢ ـ ٦٦)، فينتج :

$$ح_{ن} = ح_{٠} - \sum_{ك=٠}^{ن-1} \frac{ق_{ك}\, ص_{ك+1}}{ق_{ك+1}(س ، ص)} \,،$$

$$د_{ن} = د_{٠} + \sum_{ك=٠}^{ن-1} \frac{ق_{ك}\, س_{ك+1}}{ﻗﻫ_{ك+1}(س ، ص)}$$

والحل العام للمعادلة (٤ ـ ٣٥) هو :

$$ع_{ن} = حـ . س_{ن} + د . ص_{ن} - س_{ن} \sum_{ك=٠}^{ن-٢} \frac{ق_{ك} ص_{ك+١}}{ق_{ك+١} (س ، ص)}$$

$$+ ص_{ن} \sum_{ك=٠}^{ن-٢} \frac{ق_{ك} س_{ك+١}}{ق_{ك+١} (س ، ص)} ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٤٥)$$

حيث حـ ، د . ثابتان اعتباطيان .

المثال ٤ ـ ٦ ـ ١ حل

$$ص_{ن+٢} - ٣ ص_{ن+١} + ٢ ص_{ن} = ١ + ٥^{ن+١} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٤٦)$$

جذرا المعادلة المساعدة هما λ = ١ ، ٢ . فللمعادلة المتجانسة جذران مستقلان هما $س_{ن} = ١$ ، $ص_{ن} = ٢^{ن}$ فالقيسارية

$$ق_{ن+١} (س ، ص) = س_{ن+١} ص_{ن+٢} - س_{ن+٢} ص_{ن+١} = ٢^{ن+٢} - ٢^{ن+١} = ٢^{ن+١}$$

، $ق_{ن} = ١ + ٥^{ن+١}$.

نعوض هذه القيم في حدود المعادلة (٤ ـ ٤٥) فنجد ما يلي :

$$\sum_{ك=٠}^{ن-٢} \frac{ق_{ك} ص_{ك+١}}{ق_{ك+١} (س ، ص)} = \sum_{ك=٠}^{ن-٢} (١ + ٥^{ك+١}) = ن + \frac{٥^{ن}}{٤} - \frac{٩}{٤} ،$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٤٧)$$

$$\sum_{ك=٠}^{ن-٢} \frac{ق_ك \, س_{ك+١}}{ق_{ك+١}(س ، ص)} = \sum_{ك=٠}^{ن-٢} \left[\left(\frac{١}{٢}\right)^{ك+١} + \left(\frac{٥}{٢}\right)^{ك+١} \right]$$

$$= \frac{٢}{٣} \left(\frac{٥}{٢}\right)^{ن} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١} - \frac{٢}{٣} ،$$

حسب القاعدة $أ + أ^٢ + أ^٣ + \ldots + أ^{ن-١} = \frac{أ - أ^ن}{١ - أ}$.

فنعوض من هذه القيم في المعادلة (٤ ـ ٤٥)، ونجمع الحدود المتشابهة ونضم المعاملات الثابتة إلى حـ . ، د. فينتج الحل العام للمعادلة (٤ ـ ٤٦)، وهو :

$$ع_ن = حـ_. + د_. ٢^ن - ن + \frac{(٥)^{ن+١}}{١٢} .$$

المثال ٤ ـ ٦ ـ ٢ خذ المعادلة

$$ص_{ن+٢} + ص_ن = ن + ١ \, . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ ـ ٤٨)$$

جذرا المعادلة المساعدة $\pm$ i .فمن النظرية ٤ ـ ٩ يكون حلا المعادلة المتجانسة المستقلان. $س_ن$ = جتا ن π / ٢ ، $ص_ن$ = جا ن π / ٢ (انظر المثال ٤ ـ ٥ ـ ٢). والقيسارية :

$$ق_{ن+١}(س ، ص) = جتا \frac{(ن + ١)\pi}{٢} جا \frac{(ن + ٢)\pi}{٢}$$

$$- \text{جا} \frac{(\text{ن} + ١)\pi}{٢} \text{جتا} \frac{(\text{ن} + ٢)\pi}{٢}$$

$$= \text{جا} \frac{\pi}{٢} = ١$$

فيكون

$$\text{حـ}_{\text{ن}} = \text{حـ}_{.} - \sum_{\text{ك}=.}^{\text{ن}-١} (\text{ك} + ١) \text{جا} \frac{(\text{ك} + ١)\pi}{٢}$$

$$= \text{جـ} - ١ + ٣ - ٥ + \dots - \text{ن جا} \frac{\text{ن}\pi}{٢} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤ ـ ٤٩)$$

$$\text{د}_{\text{ن}} = \text{د}_{.} + \sum_{\text{ك}=.}^{\text{ن}-١} (\text{ك} + ١) \text{جتا} \frac{(\text{ك} + ١)\pi}{٢}$$

$$= \text{د}_{.} - ٢ + ٤ - ٦ + \dots + \text{ن جتا} \frac{\text{ن}\pi}{٢} . \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٤ ـ ٥٠)$$

لاحظ ان $\text{حـ}_{٢\text{م}} = \text{حـ}_{٢\text{م}-١} = \text{حـ}_{.} + (-١)^{\text{م}} \text{م}$ ، وان $\text{د}_{٢\text{م}} = \text{د}_{٢\text{م}+١}$
$= \text{د}_{.} + (-١)^{\text{م}} (\text{م} + ١) - ١$ ، فيكون الحل العام للمعادلة (٤ ـ ٤٨) هو

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{حـ}_{\text{ن}} \text{جتا} \frac{\text{ن}\pi}{٢} + \text{د}_{\text{ن}} \text{جا} \frac{\text{ن}\pi}{٢} ،$$

حيث $\text{حـ}_{\text{ن}}$ ، $\text{د}_{\text{ن}}$ كما ذكرنا. لاحظ ان هذه العبارة تنطوي على $\text{حـ}_{.}$ ، $\text{د}_{.}$ كثابتين.

المثال ٤ ـ ٦ ـ ٣ حل

$$ص_{ن+٢} - (ن + ٢)(ن + ١) ص_{ن} = (ن + ٣)! \quad .... \quad (٤ ـ ٥١)$$

رأينا في المثال ٤ ـ ٣ ـ ٢ ان المعادلة المتجانسة لها حلان مستقلان هما $س_{ن} = ن!$ ، $ص_{ن} = (-١)^{ن} ن!$ وبعملية حسابية بسيطة نجد ان القيسارية

$$ﻫ_{ن+١}(س ، ص) = ٢ (-١)^{ن} (ن + ١)! (ن + ٢)!$$

فحدود المعادلة (٤ ـ ٤٥) هي :

$$\sum_{ك=٠}^{ن-٢} \frac{ق_{ك} ص_{ك+١}}{ق_{ك+١}(س ، ص)} = - \frac{١}{٢} [٣ + ٤ + ... + (ن + ١)]$$

$$= \frac{٣}{٢} - \frac{(ن + ١)(ن + ٢)}{٤}$$

$$\sum_{ك=٠}^{ن-٢} \frac{ق_{ك} س_{ك+١}}{ﻫ_{ك+١}(س ، ص)} = \frac{١}{٢} [٣ - ٤ + ٥ - ٦ + ... + (-١)^{ن} (ن + ١)]$$

$$= \frac{(-١)^{ن}}{٢} ([\frac{ن}{٢}] + ١ + (-١)^{ن}) ،$$

حيث $[\frac{ن}{٢}]$ تعني العدد الصحيح من $\frac{ن}{٢}$.

وعلى الطالب أن يتحقق من هذه المعادلة الأخيرة. فبضم الثوابت الى جـ ، د, وجمع الحدود المتشابهة ينتج ان الحل العام للمعادلة (٤ ـ ٥١)، وهو

$$ع_{ن} = جـ\, ن! + د\,.\,(-١)^{ن}\, ن! + ن! \left(\frac{ن^{٢}}{٤} + \frac{٣ن}{٤} + \frac{١}{٢} \left[\frac{ن}{٢}\right] \right).$$

التمارين ٤ - ٦

إستعمل طريقة تغيير الثوابت في ايجاد حل خاص لمعادلات التمارين ١ الى ٥ .

١. $ص_{ن+٢} - ٥\, ص_{ن+١} + ٦\, ص_{ن} = ٥^{ن+١}$

٢. $ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ٦\, ص_{ن} = e^{ن+١} + ٣\, e^{ن}$

٣. $ص_{ن+٢} - ٤\, ص_{ن+١} + ٤\, ص_{ن} = ن\, ٢^{ن}$

٤. $ص_{ن+٢} - ٢\, ص_{ن+١} + ص_{ن} = ٢^{ن}$

٥. $ص_{ن+٢} + ٥\, ص_{ن} = جا\, ن\, \pi / ٢$

في التمارين التالية سنستنتج حل معادلات الفروق بطريقة المعاملات غير المعينة، وهي اسهل من طريقة تغيير الثوابت، ولكنها تصح فقط عندما يكون $أ_{ن} = أ$، $ب_{ن} = ب$، اي ثابتين (لكل ن) ويكون $ق_{ن}$ واحداً من الأشكال الثلاثة التالية او اي تجميع لها:

$ع_{ن} = ل.\, أ^{ن}$ ، $ل_{١}\, جا\, حـ\, ن + ل_{٢}\, جتا\, حـ\, ن$ ، $ل. + ل_{١}\, ن + \ldots + ل_{ك}\, ن^{ك}$

فبعد ايجاد الحلول المستقلة للمعادلة المتجانسة، نبدأ كما يلي : نكتب $ع_{ن}$ بمثل شكل $ق_{ن}$ وبمعاملات $ل_{ر}$ غير محددة.

أ) فاذا لم يكن حد من $ع_{ن}$ في حلول المعادلة المتجانسة، نعوض $ع_{ن}$ بدل $ص_{ن}$ في المعادلة

$ص_{ن+٢} + أ\, ص_{ن+١} + ب\, ص_{ن} = ق_{ن}$ . . . . (٤ - ٥٢)

ونحل لأيجاد المعاملات $ل_ر$.

ii) والا فنضرب $ع_ن$ بأصغر قوة صحيحة للعدد ن بحيث لا يكون اي حد من الناتج حداً في حل المعادلة المتجانسة ثم نكمل كما في (أ) . (مثلا : اذا كان حلا المعادلة المتجانسة $٣^ن$ ، ن $٣^ن$ وكان $ق_ن = ٣^ن$ ، نضرب $ع_ن$ في $ن^٢$ حتى يصير $ع_ن = ل ن^٢ ٣^ن$ وهذا ليس حلاً للمعادلة المتجانسة .)

٦ . خذ $ع_ن = ل_. ٥^ن$ وبين ان المعادلة في التمرين ١ حلها العام

$$ص_ن = حـ_. ٢^ن + حـ_١ ٣^ن + \frac{١}{٦} (٥)^{ن+١}$$

٧ . حل معادلة التمرين ٢ بطريقة المعاملات غير المعينة .

٨ . حل معادلة التمرين ٤ بطريقة المعاملات غير المعينة .

٩ . حل معادلة التمرين ٥ بطريقة المعاملات غير المعنية .

١٠ . حل $ص_{ن+٢} - ٤ ص_{ن+١} + ٤ ص_ن = ٢^ن$ بطريقة المعاملات غير المعنية .

في التمارين التالية اوجد الحل العام لكل معادلة بأي واحدة من الطريقتين . في بعض الحالات قد يفيد استعمال مبدأ التراكم (انظر التمرين ٤ ـ ٢ ـ ٦) .

١١ . $ص_{ن+٢} - ٣ ص_{ن+١} + ٢ ص_ن = ٢^ن + ٢^{-ن}$

١٢ . $ص_{ن+٢} - ص_{ن+١} - ٦ ص_ن = ن + ٣^ن$

١٣ . $ص_{ن+٢} + ص_ن =$ جا ن

١٤ . $ص_{ن+٣} - ٦ ص_{ن+٢} + ١١ ص_{ن+١} - ٦ ص_ن = ٢^ن$

١٥ . $ص_{ن+٣} - ٢ ص_{ن+٢} + ٣ ص_ن =$ جتا ن $\pi / ٢$

١٦ . $ص_{ن+٣} + ص_{ن+٢} - ٢ ص_ن = ن + ن^٢ + ن^٣$

١٧ . $ص_{ن+٢} - ص_{ن+١} - ص_ن = ن^٢ + ١$

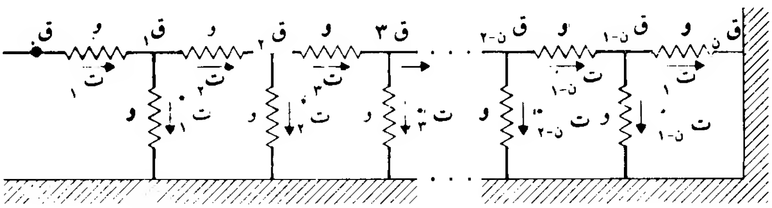
١٨ . $ص_{ن+٢} + ٢ ص_{ن+١} + ص_ن = ٢^ن + ٣^ن + ٤^ن$.

---

٤ ـ ٧ الشبكات الكهربائية

في الشبكة الكهربائية التي تشتمل على عدة دوائر كهربائية مغلقة متصلة نستعمل **قانون كرتشوف للتيارات** لتعيين العلاقة بين الدوائر المختلفة، وهوينص على ما يلي :

التيارات المتجهة نحو اي مفرق في الشبكة مجموعها الجبري صفر وباستعمال هذا القانون وقانون كرتشوف للفولتية، الذي درسناه في البند (٢ ـ ٨) نستطيع ان نحلل اعقد الشبكات الكهربائية. انظر مثلاً الشبكة المبينة بالشكل (٤ ـ ٣) حيث تشير $ق_ى$ الى الفولتية بالنسبة الى الأرض في النقطة ى، ويشير الجزء المظلل الى الأرض (حيث الفولتية صفر). ونفترض ان $ق_٠$ ثابت وان كل المقاومات = و وان $ق_ن = ٠$ والغرض من الدراسة التالية ان نحصل على معادلة فرق تعطي $ق_ى$.



الشكل ٤ ـ ٣

فحسب قانون كرتشوف للتيار نجد ان

$$ت_ك = ت^*_ك + ت_{ك+١} \qquad (٤ - ٥٣)$$

لكل قيم ك الصحيحة حيث ١ ≤ ك ≤ ن - ١ . وحسب قانون اوم (انظر البند ٢ - ٨)، نكتب المعادلة (٤ - ٥٣) على النحو التالي :

$$\frac{ق_{ك-١} - ق_ك}{و} = \frac{ق_ك}{و} + \frac{ق_ك - ق_{ك+١}}{و}$$

وبعد المعالجة الجبرية :

$$ق_{ك+١} - ٣ ق_ك + ق_{ك-١} = ٠ \qquad (٤ - ٥٤)$$

والمعادلة المساعدة لهذه جذراها $(٣ \pm \sqrt{٥})/٢$ ، فالحل العام للمعادلة (٤ - ٥٤) هو

$$ق_ك = حـ_. \left(\frac{٣ + \sqrt{٥}}{٢}\right)^ك + حـ_١ \left(\frac{٣ - \sqrt{٥}}{٢}\right)^ك \qquad (٤ - ٥٥)$$

ولأن $ق_.$ ثابت معلوم، $ق_ن = ٠$، تنتج المعادلتان الآتيتان :

$$حـ_. + حـ_١ = ق_. ،$$

$$حـ_. \left(\frac{٣ + \sqrt{٥}}{٢}\right)^ن + حـ_١ \left(\frac{٣ - \sqrt{٥}}{٢}\right)^ن = ٠ .$$

فينتج ان

$$حـ_١ = - حـ_. \left(\frac{٣ + \sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢ن} ، \quad حـ_. = \frac{ق_.}{١ - [(٣ + \sqrt{٥})/٢]^{٢ن}} .$$

لاحظ ان $\left(\frac{٣ + \sqrt{٥}}{٢}\right) \left(\frac{٣ - \sqrt{٥}}{٢}\right) = ١$ ،

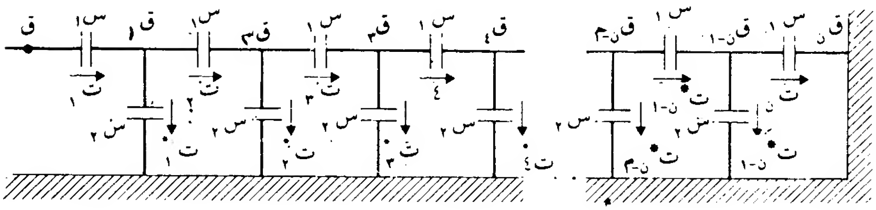
فيكون

$$ق_{ك} = ق_{.} \frac{[(٣ + \sqrt{٥})/٢]^{٢ن-ك} - [(٣ + \sqrt{٥})/٢]^{ك}}{[(٣ + \sqrt{٥})/٢]^{٢ن} - ١} \quad \text{. . . . .} \quad (٤ - ٥٦)$$

وتنشأ مسألة مماثلة اذا استبدلنا بكل مقاومة في الشكل (٤ ـ ٣) مواسعة، كما في الشكل (٤ ـ ٤) وجعلنا الخط يمر به تيار متبادل [أي ان $ق_{.}$ (ن) اقتران دوري]. وهذا النوع من الشبكات يسمى **بالعازل الوتري** فلتكن المواسعة بين اي موصلين متتاليين $س_{١}$ ، والمواسعة بالنسبة للأرض $س_{٢}$ ، فتصير المعادلة (٤ ـ ٥٣) :

$$س_{١} \frac{د}{د ن} (ق_{ك-١} - ق_{ك}) = س_{٢} \frac{د}{د ن} (ق_{ك})$$

$$+ \; س_{١} \frac{د}{د ن} (ق_{ك} - ق_{ك+١}) \text{ ،} \quad \text{. . . . .} \quad (٤ - ٥٧)$$



الشكل ٤ ـ ٤

لأن ت = د ش/د ن ، $ق_{س}$ = ش/س

فلتكن $\text{أ} = \text{س}_{٢}/٢\text{س}_{١}$ ولنمضي كما مضينا سابقاً فينتج :

$$\text{ق}_{\text{ك}} = \text{ق}_{.} \frac{(١ + \text{أ} + \sqrt{٢\text{أ} + \text{أ}^{٢}})^{٢\text{ن}-\text{ك}} - (١ + \text{أ} + \sqrt{٢\text{أ} + \text{أ}^{٢}})^{\text{ك}}}{(١ + \text{أ} + \sqrt{٢\text{أ} + \text{أ}^{٢}})^{٢\text{ن}} - ١}$$

$$= \text{ق}_{.} \frac{\text{جه أ(ن} - \text{ك)}}{\text{جه أ ن}} \text{،} \qquad \dots\dots\dots \qquad (٤ - ٥٨)$$

حيث $e^{\text{أ}} = ١ + \text{أ} + \sqrt{٢\text{أ} + \text{أ}^{٢}}$ ، $\text{جه ص} = (e^{\text{ص}} - e^{-\text{ص}})/٢$

فتكون الفولتية عند المفرق ك :

$$\text{ق}_{\text{ك}} = \text{ق}_{.} \frac{\text{جه أ(ن} - \text{ك)}}{\text{جه أ ن}} = \text{ل} \frac{\text{جه أ(ن} - \text{ك)}}{\text{جه أ ن}} \text{ جتا } W \text{ ن،} \qquad \dots\dots \qquad (٤ - ٥٩)$$

حيث $\text{ق}_{.} = \text{ل جتا } W \text{ ن}$. [وقد حصلنا على المعادلة (٤ ـ ٥٩) بمكاملة طرفي المعادلة (٤ ـ ٥٨) علماً بأن

$$\frac{\text{جه أ(ن} - \text{ك)}}{\text{جه أ ن}}$$

ثابت بالنسبة الى الزمن ن].

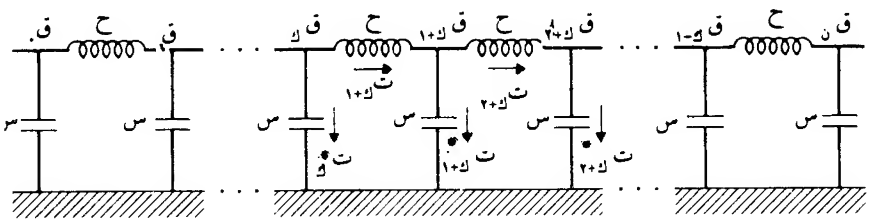
والشبكة المبينة بالشكل (٤ ـ ٥) تسمى بالمصفاة الخافضة (low - pass filter) لأنها تعزل كل موجة فوق حد معين من التردد. ولبيان ذلك نكتب المعادلة (٤ ـ ٥٣) بالشكل :

$$\frac{\text{ق}_{\text{ك}} - \text{ق}_{\text{ك}+١}}{\text{ح}} = \text{ح} \frac{\text{د}^{٢}}{\text{د ن}^{٢}} \text{ق}_{\text{ك}+١} + \frac{\text{ق}_{\text{ك}+١} - \text{ق}_{\text{ك}+٢}}{\text{ح}} \text{،}$$

حيث $0 \leqslant$ ك $\leqslant$ ن - ٢ ، اي ان

$$ق_{ك+٢} - ٢ ق_{ك+١} + ق_{ك} = س ح \ddot{ق}_{ك+١} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٦٠)$$

نفترض الآن ان التيار في الخط متبادل وان ق$_{ك}$ = ل$_{ك}$ جتا W ن ، حيث W تردد ما محدد.



الشكل ٤ ـ ٥

فنعوض ذلك في المعادلة (٤ ـ ٦٠)، ونحذف المضاعف المشترك جتا W ن ، فينتج :

$$ل_{ك+٢} - (٢ - \propto^{٢}) ل_{ك+١} + ل_{ك} = ٠ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٦١)$$

حيث $\propto^{٢} = W^{٢}$ س ح > ٠ . والمعادلة المساعدة جذراها

$$١ - \frac{\propto^{٢}}{٢} \pm \sqrt{(١ - \frac{\propto^{٢}}{٢})^{٢} - ١} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٦٢)$$

الحالة ١ اذا كان $| ١ - \propto^{٢}/٢ | < ١$ نضع

جتا $\mu = ١ - \propto^{٢}/٢$ (فيكون $٠ < \mu < \pi$)

فتصير المعادلة (٤ ـ ٦٢)

جتا $\mu \pm i$ جا $\mu = e^{\pm iu}$

فالحل العام للمعادلة (٤ ـ ٦١) هو

$ل_ك = حـ_. جتا ك \mu + حـ_١ جا ك \mu$ ، لكل $٠ \leqslant ك \leqslant ن$ . . . . . . (٤ ـ ٦٣)

والآن نريد ان نجد الثابتين $حـ_.$ ، $حـ_١$. فهناك شرطان اضافيان يتحققان في شبكة الشكل (٤ ـ ٥) :

$$\frac{ق_. - ق_١}{ح} + س ق_. = ٠ \quad ، \quad \frac{ق_{ن-١} - ق_ن}{ح} - حـ ق_ن = ٠$$

عند المفرقين الأول والاخير. وهاتان المعادلتان تفضيان الى :

$$(١ - \propto^٢) ل_. - ل_١ = ٠ \quad ، \quad ل_{ن-١} - (١ - \propto^٢) ل_ن = ٠ \quad \ldots\ldots \quad (٤ ـ ٦٤)$$

نطبق (٤ ـ ٦٣) على (٤ ـ ٦٤)، فينتج بعد خطوات منظومة متجانسة هي :

$$(١ ـ جتا \mu) حـ_. + (جا \mu) حـ_١ = ٠ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ ـ ٦٥)$$

$$[جتا ن \mu - جا (ن + ١) \mu] حـ_. + [جا ن \mu - جا (ن + ١) \mu] حـ_١ = ٠ ،$$

وهنا استعملنا المتطابقات :

$$\propto^٢ = ٢ (١ - جتا \mu) ،$$

$$٢ جتا ن \mu جتا \mu = جتا (ن + ١) \mu + جتا (ن - ١) \mu ،$$

$$٢ جا ن \mu جتا \mu = جا (ن + ١) \mu + جا (ن - ١) \mu .$$

ويكون للمعادلة (٤ ـ ٦٥) حل غير عاطل يعطي قيمتي $حـ_.$ ، $حـ_١$ اذا، وفقط اذا كان :

$$\begin{vmatrix} ١ - جتا \mu & جا \mu \\ جتا ن \mu - جتا (ن + ١) \mu & جا (ن + ١) \mu \end{vmatrix}$$

$$= \text{جا}\,(\text{ن} + ٢)\,\mu - ٢\,\text{جا}\,(\text{ن} + ١)\,\mu + \text{جا}\,\text{ن}\,\mu$$

$$= -\,٤\,\text{جا}^{٢}\,\frac{\mu}{٢}\,\text{جا}\,(\text{ن} + ١)\,\mu = ٠$$

والآن : $\text{جا}\,\frac{\mu}{٢} = ٠$ فقط اذا كان μ من مضاعفات ٢ π ، وهذا مستحيل لأن $٠ < \mu < \pi$. فيكون $\text{جا}\,(\text{ن} + ١)\,\mu = ٠$ وهذا يعني ان

$$\mu = \frac{\text{م}\,\pi}{\text{ن} + ١} \text{ ، م = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن فيكون}$$

$$\text{س ح}\,W^{٢} = \propto^{٢} = ٢\,(١ - \text{جتا}\,\frac{\text{م}\,\pi}{\text{ن} + ١}) = ٤\,\text{جا}^{٢}\,\frac{\text{م}\,\pi}{٢\,(\text{ن} + ١)}$$

وهذا يعني ان **الترددات الطبيعية** لهذه الشبكة هي :

$$W_{\text{م}} = \frac{٢}{\sqrt{\text{س ح}}}\,\text{جا}\,\frac{\text{م}\,\pi}{٢\,(\text{ن} + ١)} \text{ ، م = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن} \quad .. \quad (٤ - ٦٦)$$

فكل تردد أعلى من $W_{\text{ن}}$ ($> ٢ / \sqrt{\text{ح س}}$) يخفض بمرور الوقت

واخيراً، بعمليات حسابية قليلة نبين ان الفولتية :

$$\text{ق}_{\text{ك}} = \text{حـ}\,\frac{\text{جتا}\,[(٢\text{ك} + ١)\,\text{م}\,\pi / ٢\,(\text{ن} + ١)]}{\text{جتا}\,[\text{م}\,\pi / (٢\text{ن} + ١)]}\,\text{جتا}\,W_{\text{م}}\,\text{ن} \quad ..... \quad (٤ - ٦٧)$$

لكل ك = ٠ ، ١ ، . . . ، ن ، م = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن

الحالة ٢ اذا كان $|١ - \propto^{٢}/٢| \leqslant ١$، فعندها لأن $\propto^{٢} > ٠$ يكون $١ - \propto^{٢}/٢ \geqslant -١$ فاذا تساويا تكون $\propto^{٢} = ٤$ ويكون جذرا المعادلة المساعدة كلاهما -١ . وهذا يعني ان

$$ل_{ك} = (حـ_{.} + حـ_{١}\, ك)\,(-١)^{ك}$$ هو الحل العام للمعادلة (٤ ـ ٦١)

نطبق هذا الحل على الشروط الحاصرة (٤ ـ ٦٤) نحصل على المنظومة المتجانسة :

$$٢\,حـ_{.} - حـ_{١} = ٠$$

$$٢\,حـ_{.} + (٢ن + ١)\,حـ_{١} = ٠$$

وهذا ليس لها سوى الحل العاطل $حـ_{.} = حـ_{١} = ٠$

فتكون $ق_{ك} = ٠$ لكل ك. وهذا يخالف الفرض.

واذا كان $١ - \propto^{٢}/٢ < -١$، كان $\propto^{٢}/٢ - ١ > ١$ وكان هنالك $\mu > ٠$ حيث

$$\frac{\propto^{٢}}{٢} - ١ = \frac{e^{\mu} + e^{-\mu}}{٢}$$

فالمعادلة (٤ ـ ٦٢) تصبح $e^{\pm u}$ والمعادلة (٤ ـ ٦١) يكون حلها العام

$$ل_{ك} = حـ_{.}\, e^{ك\mu} + حـ_{١}\, e^{-ك\mu} .$$

نعوض هذا في شروط معادلتي (٤ ـ ٦٤) فنحصل على المنظومة المتجانسة :

$$حـ_{.}\,(٢e^{\mu} + ١ + e^{-\mu}) + حـ_{١}\,(e^{\mu} + ١ + ٢e^{-\mu}) = ٠ ،$$

$$حـ_{.}\, e^{ن\mu}\,(e^{\mu} + ١ + ٢e^{-\mu}) + حـ_{١}\, e^{-ن\mu}\,(٢e^{\mu} + ١ + e^{-\mu}) = ٠$$

فلكي نحصل على حل غير عاطل ينبغي ان تكون المحددة صفراً، اي ان :

$$e^{-n\mu}\left(2e^{\mu}+1+e^{-\mu}\right)^{2}-e^{n\mu}\left(e^{\mu}+1+2e^{-\mu}\right)^{2}=0 \qquad (٤-٦٨)$$

اي ان

$$e^{4\mu}\left(\frac{2+e^{\mu}+e^{-2\mu}}{2+e^{\mu}+e^{2\mu}}\right)^{2}=e^{2n\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤-٦٩)$$

وهذه ليس لها حل اذا كانت $\mu > 0$.

فليس هنالك سوى الحل العاطل للثابتين حـ. ، حـ$_1$ وهذا يخالف الفرض .

التمارين ٤ ـ ٧

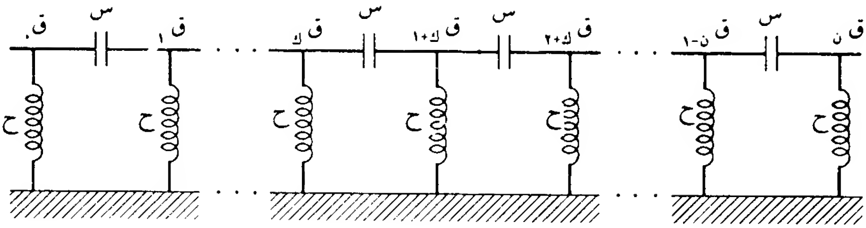
١ . استخرج (٤ ـ ٦٩) من المعادلة (٤ ـ ٦٨) .

٢ . ناقش الشبكة التي تنشأ من وضع حث ح بدل كل مقاومة في الشكل (٤ ـ ٣) .

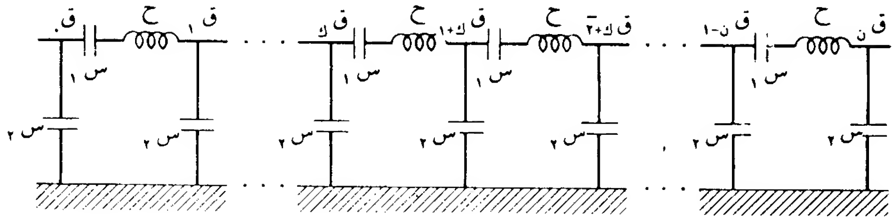
٣ . ادرس الشبكة المبينة بالشكل (٤ ـ ٦)، المسماة بالمصفاة المرافقة (high - pass filter).

بين انها تستبعد كل موجة دون حد تردد معين .

٤ . الشبكة المبينة بالشكل (٤ ـ ٧) تسمى مصفاة حاصرة (band - pass filter) لأنها تستبعد كل الامواج غير المحصورة ضمن حدي تردد معينين أوجد هذين الحدين .



الشكل ٤ ـ ٦



الشكل ٤ ـ ٧

٤ ـ ٨ تطبيقات على الألعاب

وضبط النوعية

شخصان أ ، ب يتباريان في لعبة، لا على التعيين، مرات متتالية بالتناوب. ولنفرض انـه في كل مرة يخرج واحـد منهـما رابحـاً (نستبعد حالات التعادل). فليكن احتمال ان يربح أ هو حـ ($\neq$ ٠) واحتمال ان يربح ب هو خـ. وبالطبع حـ + خـ = ١ . ولنفرض ان المربح والخسارة في كل مرة دينار واحد، وان أ بدأ ومعه ك ديناراً وان ب بدأ ومعـه ق دينـاراً. وليـرمـز $ح_{ن}$ الى احتمـال ان يربح أ كل ما مع ب عندما يكون مع أ مقدار ن ديناراً. فواضح ان ح. = ٠ (وهذا هو احتمال ان يربح أ كل ما مع ب عندما لا يكون مع أ شيء)، وان $ح_{ك+ق}$ = ١ (وذلك عندما يكون أ قد ربح كل ما مع ب). فلكي نحسب $ح_{ن}$ عندما تكون ن غير هاتين القيمتين، نضع معادلة الفرق التالية [انظر المعادلة (١ ـ ٣٣)]:

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{خـ}\,\text{ح}_{\text{ن}-1} + \text{حـ}\,\text{ح}_{\text{ن}+1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٤ - ٧٠)$$

ولفهم هذه المعادلة نذكر انه اذا كان أ معه ن ديناراً في مرة ما فاحتمال ان يصير معه ن - ١ ديناراً في المرة الثانية هوخـ، وبالمثل نفسر الحد الثاني في المعادلة (٤ - ٧٠)

ولنكتب المعادلة (٤ - ٧٠) بالصيغة التقليدية

$$\text{حـ}\,\text{ح}_{\text{ن}+1} - \text{ح}_{\text{ن}} + \text{خـ}\,\text{ح}_{\text{ن}-1} = ٠$$

أي

$$\text{ح}_{\text{ن}+2} - \frac{1}{\text{حـ}}\,\text{ح}_{\text{ن}+1} + \frac{\text{خـ}}{\text{حـ}}\,\text{ح}_{\text{ن}} = ٠$$

فالمعادلة المساعدة :

$$\lambda^{2} - \frac{1}{\text{حـ}}\,\lambda + \frac{\text{خـ}}{\text{حـ}} = ٠ \text{ ،}$$

وجذراها

$$\frac{1}{2\,\text{حـ}}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\,\text{حـ}\,\text{خـ}}\right). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٤ - ٧٢)$$

ولأن

$$\sqrt{1 - 4\,\text{حـ}\,\text{خـ}} = \sqrt{1 - 4\,\text{حـ}\,(1 - \text{حـ})} = \sqrt{4\,\text{حـ}^{2} - 4\,\text{حـ} + 1} = \left|1 - 2\,\text{حـ}\right|$$

نستنتج ان جذري المعادلة المساعدة هما :

$$\lambda_1 = \frac{1 - ح}{ح} = \frac{خ}{ح}\text{،}\quad \lambda_2 = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٧٣)$$

فالحل العام للمعادلة (٤ ـ ٧٠) هو اذن :

$$ح_ن = ح_1 \left(\frac{خ}{ح}\right)^ن + ح_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٧٤)$$

عندما ح ≠ خ.

وهـو

$$ح_ن = ح_1 + ح_2\, ن \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٧٥)$$

عندما ح = خ = $\frac{1}{2}$ (حسب قاعدة الجذر المكرر)

فاذا ذكرنا ان ٠ ≥ $ح_ن$ ≥ ١ لكل ن، وذكرنا الشرطين الحاصرين ح. = ٠، $ح_{ك+ق}$ = ١ نجد في النهاية ان

$$ح_ن = \frac{1 - (خ / ح)^ن}{1 - (خ / ح)^{ك+ق}} \text{، اذا كان ح ≠ خ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٧٦)$$

$$\text{و} \frac{ن}{ك + ق} \text{ اذا كان ح = خ = } \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤ - ٧٧)$$

لكل ن حيث ٠ ≥ ن ≥ ك + ق.

المثال ٤ ـ ٨ ـ ١ في لعبة دواليب الحظ أخذ لاعب يباري النادي، كل مرة بدينار، يربح مثله اذا وقف الحظ عند رقعة حمراء، وكان الدولاب يدور حول ١٨ رقعة حمراء و١٨

سوداء ورقعتين على احداهما صفر وعلى الاخرى صفران. فاذا جرى الدولاب حرا فان احتمال ان يكون النادي هو الرابح هو حـ = $\frac{٢٠}{٣٨}$ ≈ ٠,٥٢٦٣ ، فيكون خـ = ٠,٤٧٣٧ ، ويكون خـ / حـ = ٠,٩ فاذا بدأ كل من اللاعب والنادي بمبلغ ك ديناراً، فاحتمال افلاس اللاعب =

$$ح_ك = \frac{١ - (خـ/حـ)^{ك}}{١ - (خـ/حـ)^{٢ك}} = \frac{١}{١ + (خـ/حـ)^{ك}} = \frac{١}{١ + (٠,٩)^{ك}}$$

والعمود الثاني في الجدول (٤ ـ ١) يبين كيف يتغير احتمال افلاس اللاعب بتغير ك، اي المبلغ الذي يكون معه عند بدء اللعب. لاحظ انه كلما زاد المبلغ الذي يبدآن به يزداد احتمال افلاس اللاعب. وواضح انه كلما استمر اللاعب في اللعب كلما تأكد افلاسه. لذا فان أبسط اجراء في صالح النادي يضمن، في كل حال تقريباً، افلاس اللاعب اذا هو استمر في اللعب.

الجدول ٤ ـ ١

ك	ح ك	ح*ك
١	٠,٥٢٦٣	٠,٥٢٦٣
٥	٠,٦٢٨٧	٠,٨٧٤٠
١٠	٠,٧٤١٥	٠,٩٤٩٥
٢٥	٠,٩٣٣٠	٠,٩٩٢٣
٥٠	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٩٥
١٠٠	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩

والعمـود الثـالث في الجدول يبين احتمال خسارة اللاعب اذا لعب بدينار واحد ،

ومع النادي   ك   ديناراً ، فهنا

$$ح^{*}_{ك} = \frac{١ - (خـ/حـ)^{ك}}{١ - (خـ/حـ)^{ك+١}} .$$

فاذا كان مع الـلاعب اقـل بكثـير مما مع النادي زاد احتمل افلاسه . وعلى هذا فان اجـراء يسـيراً في صالـح النـادي ، بالاضافة الى قيود اللعب وزيادة رصيد النادي ، تجعل ادارته عملية وافرة الربح .

المثـال ٤ ـ ٨ ـ ٢ يمكن اتخـاذ المثـال السابق نموذجاً بسيطاً للصراع على مصادر الغذاء بين نوعين من الأحياء في بيئة معزولة .

إفرض ان نوعين أ ، ب انفردا في بيئة فيها   نه   وحدات من المصادر . كالمراعي او الأشجار اوسواها . فاذا كان النوع   أ   يحكم على   ك   وحدات فان النوع   ب   يحكم على نه- ك وحـدات . ولنفـرض ان الصـراع يقع على وحدة واحدة في وحدة الزمن . ولنفرض ان احتمال فوز أ هو حـ . ولنجعل $ح_{ن}$ ترمز الى احتمال خسارة   ب   كل مصادره عندما يكون   أ   عنده ن وحدات .

تتعين $ح_{ن}$ بالمعادلة (٤ ـ ٧٠) والشرطين الابتدائيين $ح_{.} = ٠$ ، $ح_{نه} = ١$. فمن المعادلتين (٤ ـ ٧٦) و (٤ ـ ٧٧) يكون حل هذه المعادلة :

$$ح_{ن} = \begin{cases} \dfrac{١ - [(١ - حـ)/حـ]^{ن}}{١ - [(١ - حـ)/حـ]^{ن}} ، & \text{اذا كان } حـ \neq \dfrac{١}{٢} . \\ \dfrac{ن}{نه} & \text{اذا كان } حـ = \dfrac{١}{٢} . \end{cases}$$

وكـما في المثـال السابق فان اي اجراء في صالح احد المتنافسين يضمن فناء النوع الأضعف في النهاية.

فمثـلا اذا كان حـ = ٠,٥٥ وكـان النـوع أ لديـه ن وحدات من مجموع ١٠٠ وحدة، يكون لدينا الجدول التالي :

الجدول ٤ ـ ٢

ن	ح ن
١	٠,١٨١٨
٢	٠,٣٣٠٦
٣	٠,٤٥٢٣
٤	٠,٥٥١٩
٥	٠,٦٣٣٣
١٠	٠,٨٦٥٦
٢٥	٠,٩٩٣٤

لاحظ انه حتى اذا بدأ النوع الذي في صالحه التنافس بما لا يزيد عن ٤ وحدات من مئة وحدة فان لديه الاحتمال الأقوى لأزالة منافسه في النهاية. اما اذا كان يملك ربع المصادر فان فوزه في النهاية مؤكد.

وقـد اتبـع اجـراء مماثـل لهذا، في احدى المؤسسات الصناعية، في الحكم على صلاحيـة مجمـوعـة من المصنـوعات. وسنصف هذا الاجراء هنا باختصار أما التفصيل فيجـده القـارىء في بحث كتبـه ج برنـارد باسم اختبارات في الاحصاء الصناعي ونشره في ملحق مجلة الجمعية الملكية للاحصاء (١٩٤٦/١):

لفحص صلاحيـة مجمـوعـة من المصنـوعـات بدىء بوضـع نظـام للعلامات:

فاعطيت في البدء العلامة ك ثم صارت المصنوعات تؤخذ واحدة واحدة، عفوياً، فاذا وجدت تالفة، يطرح ك، واذا وجدت صالحة، يضاف ١ . ويقف العمل اذا وصل المجموع الى ٢ن او إنحط الى الصفر. فاذا وصل الى ٢ن تقبل المجموعة، واذا انحط الى الصفر ترفض فلنفرض ان احتمال تناول واحدة صالحة هي حـ، وان خـ = ١ - حـ، وليكن $ح_{ن}$ هو احتمال رفض المجموعة عندما تكون العلامة ن. فبعد تناول سلعة اخرى فان العلامة ستزيد ١ واحتمال ذلك حـ او تنقص ك واحتمال ذلك خـ. فيكون :

$$ح_{ن} = حـ\, ح_{ن+١} + خـ\, ح_{ن-ك} \qquad \text{(٤ - ٧٨)}$$

وهذه يمكن ان تكتب بصيغة معادلة فرق من الرتبة ك + ١ :

$$ح_{ن+ك+١} = \frac{١}{حـ} ح_{ن+ك} + \frac{خـ}{حـ} ح_{ن} = ٠ \qquad \text{(٤ - ٧٩)}$$

ولهذه قيم ن حاصرة هي

$$ح_{١-ك} = \ldots = ح_{٠} = ١ ،\ ح_{٢ن} = ٠ \qquad \text{(٤ - ٨٠)}$$

فاذا كانت ك = ١ تتحول المسألة الى المثال ٤ ـ ٨ ـ ١، ويصبح مؤكداً قبول المجموعة او رفضها حسب كون حـ اكبر من $\frac{١}{٢}$ او أصغر.

التمارين ٤ ـ ٨

١ . في المثال ٤ ـ ٨ ـ ١ افرض ان اللاعب أ بدأ والأمور في صالحه بمقدار ١٠ في المئة اكثر من ب فاذا بدأ ومعه ٣ دنانير فكم يجب ان يكون مع ب حتى تكون لديه فرصة أكبر لكسب كل ما مع أ؟ حتى تكون فرصته ٨ في المئة؟

٢ . أجب عن سؤال التمرين (١) على فرض ان الأمور في صالح أ

(أ) بمقدار ٢ ٪

(ب) بمقدار ٢٠ ٪

أكثر من ب

٣ . يمكن تعديل الألعاب المبينة بالتمرينين (٤ ـ ٨ ـ ١) و(٤ ـ ٨ ـ ٢) حتى تتسع لأكثر من احتمالين. افرض انه في كل مرة يلعب أ يكون جـ إحتمال ربحه ديناراً واحداً، حـ احتمال ربحه دينارين ، خـ احتمال خسارته ديناراً حيث جـ + حـ + خـ = ١ ، وليكن ح ن كما في المثالين. اكتب معادلة فروق تعطي ح ه على اعتبار ان كل لاعب يبدأ ومعه ه ديناراً.

٤ . حل معادلة التمرين (٣) على فرض ان جـ = حـ = $\frac{١}{٤}$ وان خـ = $\frac{١}{٢}$.

٥ . حل معادلة التمرين ٣ على فرض ان جـ = حـ = خـ = $\frac{١}{٣}$.

٦ . افرض ان جـ احتمال ان يربح أ ديناراً واحداً، حـ ان يخسر ديناراً، خـ ان يخسر دينارين ولتكن ح ن هي احتمال ان أ سيربح كل ما مع ب وذلك عندما يكون معه هو ن ديناراً، علماً بان أ ، ب بدأ كل منهما ومعه ه ديناراً :

أ) ضع معادلة فروق ومعها القيم الحاصرة المناسبة لهذه المسألة.

ب) حل المعادلة على فرض ان جـ = $\frac{١}{٦}$، حـ = $\frac{١}{٣}$، خـ = $\frac{١}{٢}$.

٧ . حلل لعبة فيها يكون هنالك احتمالا $\frac{١}{٣}$ لأن يربح أ دينارين ، $\frac{٢}{٣}$ لأن يخسر ديناراً واحداً

أ) افرض ان أ ، ب بدأ كل منهما ومعه ن دينارا. فهل يبدأ أ وهناك اي شيء في صالحه؟ افرض ان ن= ١٠ فما قيمة $ح_{١٠}$؟

ب) اذا بدأ أ بعشرة دنانير وبدأ ب بعشرين فما الاحتمال في البدء في ان يربح أ كل ما مع ب؟

٨ . ناقش كل واحد من التمارين السابقة باعتبارها منافسة بين نوعين على مصادر الغذاء .

٩ . ضع نموذجاً يناظر ما في المثال (٤ ـ ٨ ـ ٢) ولكن لثلاثة انواع تتصارع على مصدر واحد للغذاء .

الفصل الخامس

حل المعادلات التفاضلية بمتسلسلات القوى

المقدمة

في الفصــل ٣ درسنــا عن طرق لحل المعــادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية وما فوقها . وقــد كانت طرقنــا كلها تنطبق على المعادلات الخطية ذات **المعاملات الثابتة** ، باستثناء معــادلــة اويلر ومعــادلات اخــرى قليلة كان بالامكــان ان نحــزر لها حلاً بسهــولة . اما المعادلة الخطية ذات **المعاملات المتغيرة** فأمرها أصعب بكثير . ومن المؤسف ان كثيراً من اهم المعــادلات التفــاضليــةالتي نجابهها في الرياضيات التطبيقية هي من هذا النوع ، مثل معادلة بيزيل (Bessel) ومعادلة لجاندر Legendre . وفي هذا الفصل سندرس طريقــة لايجــاد حلول لهذه المعــادلات . ولأن الحلول التي سنحصــل عليهــا هي بصيغة متسلسلة قوى فلذا تسمى الطريقة **بطريقة متسلسلات القوى** (power series)

٥ ـ ١ مراجعة متسلسلة القوى

في هذا البند سنراجع بعض الخصائص الأساسية لمتسلسلات القوى. ونفترض ان اكثر القراء لهم بعض الألمام بمتسلسلة القوى من دراستهم السابقة للحسبان . ان المتسلسلة بقوى (س − أ) هي متسلسلة لا نهائية بالصيغة :

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن (س - أ)^ن = حـ_٠ + حـ_١ (س - أ) + حـ_٢ (س - أ)^٢ + \ldots ،$$

(٥ ـ ١) ....

حيث حـ٠ ، حـ١ ، . . . ثوابت، تسمى **معاملات المتسلسلة** ، أ ثابت يسمى مركز المتسلسلة ، س متغير مستقل.ومن الحالات الخاصة المتسلسلة التي مركزها الصفر (أ = ٠) فهي تتخذ الصيغة :

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^ن = حـ_٠ + حـ_١ س + حـ_٢ س^٢ + حـ_٣ س^٣ + \ldots \quad (٥ ـ ٢)$$

لاحظ ان الحدوديات هي ايضاً متسلسلات قوى لأنها من هذه الصيغة .

والمتسلسلة التي بالصيغة (٥ ـ ١) يمكن دائماً تحويلها الى الصيغة (٥ ـ ٢) بوضع س بدل (س ـ أ) . وهذا التعويض ما هو الا نقل للمحورين الاحداثيين . ويسهل ان نتبين ان سلوك (٥ ـ ٢) قرب الصفر هو بالضبط مثل سلوك (٥ ـ ١) قرب أ .

لهذا يكفينا ان ندرس خصائص المتسلسلة التي من النوع (٥ ـ ٢).

تسمى العبارة

$$ج_{ن}(س) = حـ_{٠} + حـ_{١} س + حـ_{٢} س^{٢} + \ldots + حـ_{ن} س^{ن} \quad \ldots\ldots \quad (٥ - ٣)$$

بالمجموع الجزئي النوني للمتسلسلة (٥ ـ ٢)، ويسمى الفرق بين (٥ ـ ٢) و(٥ ـ ٣)، أي

$$ب_{ن}(س) = حـ_{ن+١} س^{ن+١} + حـ_{ن+٢} س^{ن+٢} + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٤)$$

بالباقي بعد الحد النوني للمتسلسلة (٥ ـ ٢). ففي المتسلسلة

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} (ق + ١) س^{ن} = ١ + ٢ س + ٣ س^{٢} + ٤ س^{٣} + \ldots ،$$

يكون

$$ج_{١}(س) = ١ + ٢ س ، ب_{١}(س) = ٣ س^{٢} + ٤ س^{٣} + \ldots ،$$

$$ج_{٢}(س) = ١ + ٢ س + ٣ س^{٢} ، ب_{٢}(س) = ٤ س^{٣} + ٥ س^{٤} + \ldots ،$$ وهكذا.

فلدينا اذن متتالية من المجاميع: $ج_{١}(س)$، $ج_{٢}(س)$، .... وكثيراً ما يحدث أنه إذا اتخذ س قيمة ما معينة، مثلاً $س = س_{٠}$، تؤول متتالية المجاميع عند س.

إلى نهاية (محدودة). فاذا حدث ذلك نقول ان المتسلسلة (٥ ـ ٢) متقاربة، اوتقاربية (Convergent)، عند $س_٠$، ونكتب

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} جـ_ن س_٠^ن = \underset{ن \leftarrow \infty}{نها} ج_ن (س_٠) = ج (س_٠) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٥)$$

ويسمى العدد ج ($س_٠$)، في (٥ ـ ٥)، مجموع المتسلسلة (٥ ـ ٢) عند $س_٠$ واذا كانت المتسلسلة لا تتقارب عند $س_٠$ نقول انها متباعدة اوتباعدية عند $س_٠$ وفي حالة التقارب يكون المجموع الجزئي $ج_ن (س_٠)$ هو مجموع ج ($س_٠$) بالتقريب. وخطأ التقريب، وهو

$$| ج (س_٠) - ج_ن (س_٠) | = | ب_ن (س_٠) | ،$$

يمكن تصغيره الى أي حد نشاء، وذلك بأن نجعل ن كبيرة بالقدر الكافي.

واذا كانت المتسلسلة (٥ ـ ٢) متقاربة عند $س_٠$، فإن الحد $جـ_ن س_٠^ن$ يقارب الصفر، لأن:

$$\underset{ن \leftarrow \infty}{نها} جـ_ن س_٠^ن = \underset{ن \leftarrow \infty}{نها} [ج_ن (س_٠) - ج_{ن-١} (س_٠)]$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نها} ج_ن (س_٠) - \underset{ن \leftarrow \infty}{نها} ج_{ن-١} (س_٠)$$

$$= ج (س_٠) - ج (س_٠) = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٦)$$

ولكن قد تتباعد المتسلسلة، حتى وان تكن حدودها تقارب الصفر. (انظر التمرين ٥ ـ ١ ـ ١٧).

وفي (٥ ـ ٢): اذا جعلنا س = ٠ تتقلص المتسلسلة الى الحد الوحيد $جـ_٠$، فهي اذن تتقارب.

وقد تكون هنالك قيم اخرى تتقارب معها المتسلسلة . والقيم التي معها تتقارب المتسلسلة (٥ ـ ٢) تقع ضمن فترة متمركزة حول الصفر، تسمى **فترة التقارب**. (وسنثبت هذا بالنظرية ٥ ـ ١ .) فلكل متسلسلة مثل (٥ ـ ٢) عدد $٠ \leqslant$ نق $\leqslant \infty$ يسمى نصف قطر التقارب ، ويحقق الخاصية ان المتسلسلة تتقارب اذا كان | س | $<$ نق ، وتتباعد اذا كان | س | $>$ نق .

وكثيراً ما يسهل حساب نصف قطر التقارب بطريقة الاختبار بالجذر:

$$\frac{١}{\text{نق}} = \lim_{ن \to \infty} \sqrt[ن]{|حـ_ن|}$$ ، شرط ان يكون للجذر نهاية . (٥ ـ ٧)

(اذا كان $\sqrt[ن]{|حـ_ن|} \leftarrow ٠$ نقول ان نق = ∞ .)

المثال ٥ ـ ١ ـ ١ انظر في المتسلسلة الهندسية :

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} س^{ن} = ١ + س + س^{٢} + \dots \qquad (٥ ـ ٨)$$

فلأيجاد مجموع هذه المتسلسلة نلاحظ ما يلي :

$$ج_ن(س) = ١ + س + \dots + س^{ن-١} + س^{ن} ،$$

فيكون $س\, ج_ن(س) = س + س^{٢} + \dots + س^{ن} + س^{ن+١}$.

فالفرق بين هاتين العبارتين هو $(١ - س)\, ج_ن(س) = ١ - س^{ن+١}$

$$\text{فيكون } ج_ن(س) = ١ + س + \dots + س^{ن} = \frac{١ - س^{ن+١}}{١ - س} \qquad (٥ ـ ٩)$$

فاذا كان | س | $<$ ١ فالبسط في هذه العبارة يقارب ١ عندما يقارب ن اللانهاية ،

فيكون :

$$ج(س) = \lim_{ن \to \infty} ج_ن(س) = \frac{١}{١ - س} \quad ، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٠)$$

لكل س حيث $|س| < ١$.

واذا كان $|س| \geqslant ١$ فالمتتالية $\{ج_ن(س)\}$ لا يكون لها نهاية محدودة ، اي ان المتسلسلة (٥ ـ ٨) تتباعد .

وباستعمال اختبار الجذر (٥ ـ ٧) نجد ان نق = ١ وهذا يؤيد النتيجة السابقة . الحالة $|س| =$ نق يجب دائماً فحصها على حدة .

النظرية ٥ ـ ١ اذا عينا نق باختبار الجذر (٥ ـ ٧) فان المتسلسلة (٥ ـ ٢) تتقارب لكل س في $|س| <$ نق وتتباعد لكل س حيث $|س| >$ نق .

البرهان ليكن $|س| < ر <$ نق ليكون ١/نق < ١/ر ، فلأن $\sqrt[ن]{|حـ_ن|} \to$ ١/نق يكون $\sqrt[ن]{|حـ_ن|} < ١/ر$ لكل $ن \geqslant ن_٠$ حيث $ن_٠$ كبير بما فيه الكفاية .

هنا نستعمل متباينة المثلث $|أ + ب| \leqslant |أ| + |ب|$ فنجد ان الباقي $ب_ن(س)$ يحقق المتباينة :

$$|ب_ن(س)| \leqslant |حـ_{ن+١}|\,|س|^{ن+١} + |حـ_{ن+٢}|\,|س|^{ن+٢} + \ldots <$$
$$\left|\frac{س}{ر}\right|^{ن+١} + \left|\frac{س}{ر}\right|^{ن+٢} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١١)$$

وباستعمال (٥ ـ ١٠) يمكن ان نكتب الحد الأخير في (٥ ـ ١١) بالشكل

$$|ب_ن(س)| < \left|\frac{س}{ر}\right|^{ن+١} \left(١ + \left|\frac{س}{ر}\right| + \left|\frac{س}{ر}\right|^{٢} + \ldots\right) =$$

$$\frac{|س/ر|^{ن+1}}{1 - |س/ر|}، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٢)$$

لأن $|س/ر| < 1$. ومن (٥ ـ ١٢) يتضح ان الحد الباقي $ب_ن(س)$ يتلاشى عندما $ن$ تقارب اللانهاية. اذن فالمتسلسلة تتقارب لكل $س$ حيث $|س| < نق$

واذا كان $|س| > ر > نق$ فهناك $\sqrt[ن]{|ح_ن|} > 1/ر$ فيكون

$$|ح_ن س^ن| > \left|\frac{س}{ر}\right|^ن > 1$$

فحدود المتالية لا تقارب الصفر. ومن (٥ ـ ٦) ينتج ان المتسلسلة تتباعد لكل $س$ حيث $|س| > نق$.

وهناك صيغة أخرى تفيد في ايجاد نصف قطر التقارب، وهي اختبار النسبة

$$\frac{1}{نق} = \lim_{ن \to \infty} \left|\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٣)$$

حيثما يكون لهذه النسبة نهاية. والبرهان على ان هذه النهاية تعطى قيمة نق نفسها متروك للطالب (انظر التمرين ٥ ـ ١ ـ ٢).

المثال ٥ ـ ١ ـ ٢ اوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{س^ن}{ن!} = 1 + س + \frac{س^2}{2!} + \frac{س^3}{3!} + \ldots$$

هنا $ح_ن = \frac{1}{ن!}$، فمن اختبار النسبة (٥ ـ ١٣) يكون

$$\frac{1}{\text{نق}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}+1)!} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{1}{\text{ن}+1} = 0 ،$$

فيكون نق = ∞ . اي ان المتسلسلة تتقارب مع جميع قيم س .

المثال ٥ ـ ١ ـ ٣ المتتالية

$$\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{ن}!\ \text{س}^{\text{ن}} = 1 + \text{س} + 2!\ \text{س}^2 + 3!\ \text{س}^3 + \ldots$$

تتباعد مع جميع س ≠ ٠ ، لأن

$$\frac{1}{\text{نق}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \left| \frac{\text{ح}_{\text{ن}+1}}{\text{ح}_{\text{ن}}} \right| = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{(\text{ن}+1)!}{\text{ن}!}$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} (\text{ن}+1) = \infty .$$

واشهر متسلسلات القوى هي تلك التي تنتج عن قاعدة تايلر (Taylor) .

$$\text{ق}(\text{س}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{هـ}} \frac{\text{ق}^{(\text{ن})}(\text{س}_0)}{\text{ن}!} (\text{س} - \text{س}_0)^{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{هـ}} (\text{س} - \text{س}_0) . \quad (٥ - ١٤)$$

فاذا كان للاقتران ق (س) مشتقات من جميع الرتب عند النقطة س_0 وكان الباقي $\text{ب}_{\text{هـ}}(\text{س} - \text{س}_0)$ يقترب من الصفر باقتراب هـ من اللانهاية نقول ان ق (س) تحليلي analytic عند س_0 ، ونكتب

$$\text{ق}(\text{س}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \frac{\text{ق}^{(\text{ن})}(\text{س}_0)}{\text{ن}!} (\text{س} - \text{س}_0)^{\text{ن}} . \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٥)$$

وتسمى المتسلسلة (٥ ـ ١٥) **متسلسلة تايلر** للاقتران ق (س) عند $\text{س} = \text{س}_٠$. وعند $\text{س}_٠ = ٠$ تسمى المتسلسلة (٥ ـ ١٥) **متسلسلة مكلورن** Maclaurin للاقتران ق (س). والمفكوكات التالية كلها شهيرة وتصح لكل قيم س ، ونستنتج بالطريقة السابقة:

$$e^{\text{س}} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} = ١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \ldots ، \quad .. \qquad (٥ - ١٦)$$

$$\text{جا س} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{(-١)^{\text{ن}}\, \text{س}^{٢\text{ن}+١}}{(٢\text{ن}+١)!} = \text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥!} - \frac{\text{س}^{٧}}{٧!} + \ldots ،$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٥ - ١٧)$$

$$\text{جتا س} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{(-١)^{\text{ن}}\, \text{س}^{٢\text{ن}}}{(٢\,\text{ن})!} = ١ - \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} - \frac{\text{س}^{٦}}{٦!} + \ldots ،$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٥ - ١٨)$$

$$\text{جز س} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{\text{س}^{٢\text{ن}+١}}{(٢\text{ن}+١)!} = \text{س} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥!} + \frac{\text{س}^{٧}}{٧!} + \ldots ،$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٥ - ١٩)$$

$$\text{جتز س} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{\text{س}^{٢\text{ن}}}{(٢\text{ن})!} = ١ + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} + \frac{\text{س}^{٦}}{٦!} + \ldots \qquad (٥ - ٢٠)$$

وهنالك اقترانات ق (س) لها مشتقات من كل الرتب عند نقطة معطاة $\text{س}_٠$ ولكنها مع ذلك ليست تحليلية. وفي هذه الحالات يكون الحد الباقي $\text{ب}_{\text{ن}} (\text{س} - \text{س}_٠)$ لا يقارب الصفر عندما يقارب ن اللانهاية. وهنالك مثال على ذلك في التمرين ٥ ـ ١ ـ ٢٤

سندرس الآن اربع عمليات على متسلسلات القوى، وكلها تستعمل في تطبيق طريقة متسلسلات القوى على المعادلات التفاضلية.

١ . **يمكن جمع متسلسلتي قوى حداً حداً**. وبعبارة ادق: اذا كان للمتسلسلتين

$$\sum_{ن=0}^{\infty} ب_ن (س - س_٠)^ن \text{ ، } \sum_{ن=0}^{\infty} حـ_ن (س - س_٠)^ن$$

نصف قطري تقارب نق $_ب$ ، نق $_{حـ}$ ، ومجموعات ب (س)، حـ (س) على التوالي:

فان المتسلسلة $\sum_{ن=0}^{\infty} (ب_ن + حـ_ن) (س - س_٠)^ن$

تقارب ب (س) + حـ (س) لكل س حيث (س - س٠) > نق، نق = أصغر القيمتين (نق $_ب$ ، نق $_{حـ}$).

٢ . يمكن ضرب متسلسلتي القوى حداً حداً ، ففي المتسلسلتين السابقتين:

$$ب (س) حـ (س) = (\sum_{ن=0}^{\infty} ب_ن (س - س_٠)^ن) (\sum_{ن=0}^{\infty} حـ_ن (س - س_٠)^ن)$$

$$= \sum_{ن=0}^{\infty} (ب_٠ حـ_ن + ب_١ حـ_{ن-١} + \ldots + ب_ن حـ_٠) (س - س_٠)^ن$$
..... (٥ - ٢١)

لكل س حيث $|س - س_٠| > نق$، وايضاً نق = أصغر (نق $_ب$ ، نق $_{حـ}$).

٣ . يمكن مفاضلة متسلسلة القوى حداً حداً . فيكون

$$بَ (س) = \frac{د}{د س} (\sum_{ن=0}^{\infty} ب_ن (س - س_٠)^ن) = \sum_{ن=1}^{\infty} ن ب_ن (س - سَ)^{ن-١}$$
..... (٥ - ٢٢)

لكل س حيث $|س - س_٠| > نق_ب$

٤ . يمكن مكاملة متسلسلة القوى حداً حداً، اي ان

$$\int ب (س) د س = \int \sum_{ن=0}^{\infty} ب_ن (س - س_٠)^ن د س$$

$$= \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ب_{ن} (س - س_{٠})^{ن+١}}{ن + ١} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٥ - ٢٣)$$

لكل س حيث $|س - س_{٠}| <$ نق $_{ب}$

نلاحظ ان نصف قطر الاقتراب لا يتأثر بالتفاضل ولا بالتكامل.

وسنترك برهان الخاصيتين الأوليين للطالب (أنظر التمرين ٥ ـ ١ ـ ١٨ ، ٥ ـ ١ ـ ١٩)

وسنرى الآن ان المعادلة (٥ ـ ٢٢) صحيحة:

لاحظ ان

$$\frac{ب(س + هـ) - ب(س)}{هـ} = \sum_{ن=٠}^{\infty} ب_{ن} \frac{(س + هـ - س_{٠})^{ن} - (س - س_{٠})^{ن}}{هـ} \quad \ldots\ldots\ldots (٥ - ٢٤)$$

فبفك الحد

$$(س - س_{٠} + هـ)^{ن} = (س - س_{٠})^{ن} + ن\, هـ (س - س_{٠})^{ن-١} + \ldots + هـ^{ن} ،$$

نجد ان المعادلة (٥ ـ ٢٤) تصبح:

$$\sum_{ن=١}^{\infty} ب_{ن} \frac{ن\, هـ (س - س_{١})^{ن-١} + \ldots + هـ^{ن}}{هـ} =$$

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} ب_{ن} [ن (س - س_{٠})^{ن-١} + \ldots + هـ^{ن-١}] ، \quad \ldots\ldots\ldots (٥ - ٢٥)$$

لأن الحد الأول يتلاشى. والان بتبادل النهاية والمجموع* وتقريب هـ من الصفر نلاحظ

---

* تحتاج مبادلة المجموع والنهاية الى تبرير. وهنا يسهل التبرير لأن متسلسلة القوى تتقارب بانتظام في اجزاء محدودة مطلقة من $|س| <$ نق $_{ب}$. اما البرهان فيجده الطالب في كتب متقدمة.

ان جميع الحدود في (٥ ـ ٢٥) تتلاشى ، عدا الحد الاول وبـذا نحصل على الطرف الأيســر من المتسلسلة (٥ ـ ٢٢) . ولكي نرى ان المتسلسلة (٥ ـ ٢٢) لها نصف قطــر التقارب نفسه نستعمل النهاية (٥ ـ ١٣) اذا وجدت :

$$\lim_{ن \to \infty} \left| \frac{(ن+1)\, ب_{ن+1}}{ن\, ب_ن} \right| = \lim_{ن \to \infty} \frac{ن+1}{ن} \lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ب_{ن+1}}{ب_ن} \right|$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ب_{ن+1}}{ب_ن} \right| = \frac{1}{نق_ب} .$$

وأخيراً، نثبت (٥ ـ ٢٣) اعتماداً على (٥ ـ ٢٢) .

نلاحظ ان

$$\frac{د}{د\,س} \sum_{ن=0}^{\infty} ب_ن \frac{(س - س_.)^{ن+1}}{ن+1} = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{د}{د\,س} ب_ن \frac{(س - س_.)^{ن+1}}{ن+1}$$

$$= \sum_{ن=0}^{\infty} ب_ن (س - س_.)^{ن} = ب(س) .$$

ولذا فان (٥ ـ ٢٣) هي فعلاً تكامل ب (س) .

التمارين ٥ ـ ١

استخرج متسلسلات تايلر التالية بتكرار التفاضل :

١ . (٥ ـ ١٦) ٢ . (٥ ـ ١٧) ٣ . (٥ ـ ١٨) ٤ . (٥ ـ ١٩)

٥ . (٥ ـ ٢٠)

٦. $\text{لو}\,(١ + \text{س}) = \text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \ldots \text{،} \quad |\text{س}| < ١$

٧. $\text{جا}^{-١}\,\text{س} = \text{س} + \frac{١}{٢}\cdot\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{١}{٢}\cdot\frac{٣}{٤}\cdot\frac{\text{س}^{٥}}{٥}$

$+ \frac{١}{٢}\cdot\frac{٣}{٤}\cdot\frac{٥}{٦}\cdot\frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \ldots \text{،} \quad |\text{س}| < ١$

٨. $\text{لو}\,\text{س} = (\text{س} - ١) - \frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{٢} + \frac{(\text{س} - ١)^{٣}}{٣} - \frac{(\text{س} - ١)^{٤}}{٤} + \ldots \text{،}$

$٠ < \text{س} < ٢$

٩. $\frac{١}{٢ - \text{س}} = ١ + (\text{س} - ١) + (\text{س} - ١)^{٢} + (\text{س} - ١)^{٣} + \ldots \text{،} \quad ٠ < \text{س} < ٢$

١٠. استعمل المعادلة (٥ ـ ١٠) لبيان ان

$\frac{١}{١ + \text{س}} = ١ - \text{س} + \text{س}^{٢} - \text{س}^{٣} + \ldots \text{،} \quad |\text{س}| < ١$

ثم اثبت ما يلي:

(أ) $\text{لو}\,(١ + \text{س}) = \text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \ldots \text{،} \quad |\text{س}| < ١$

(ب) $\text{ظا}^{-١}\,\text{س} = \text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥} - \frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \ldots \text{،} \quad |\text{س}| < ١$

(جـ) $\frac{1}{(1+س)^2} = 1 - 2س + 3س^2 - 4س^3 + \ldots$ ، $|س| < 1$

اوجد نصف قطر التقارب وفترته في كل متسلسلة في التمارين من ١١ الى ١٦

١١. $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{س^ن}{ن^2}$

١٢. $\sum_{ن=1}^{\infty} \left(\frac{س - 2}{ن}\right)^ن$

١٣. $\sum_{ن=1}^{\infty} ن^ن س^ن$

١٤. $\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{ن^2 (س - 1)^ن}{2^ن}$

١٥. $\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(2ن)! س^ن}{(ن!)^2}$

١٦. $\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(ك + ن)! (س + 1)^ن}{ك! ن!}$

١٧. بين ان المتسلسلة

$$\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{س^ن}{ن} = س + \frac{س^2}{2} + \frac{س^3}{3} + \frac{س^4}{4} + \ldots$$

تتباعد عند س = ١ ، وذلك باثبات ان المجموعات الجزئية تحقق المتباينة

ج $_{٢ك}$ (١) ⩽ ١ + ك/٢ .

(هذا التمرين يبين انه رغم ان حدود المتسلسلة قد تقارب الصفر فان المتسلسلة نفسها قد تتباعد، هنا عند س = ١ .)

١٨ . اثبت ان متسلسلتي القوى يمكن ان تجمع حداً حداً وعيّن فترة التقارب الناجمة .

١٩ . اثبت أن متسلسلتي القوى يمكن ان تضربا حداً حداً وعين فترة التقارب الناجمة .

٢٠ . اثبت ان الصيغتين (٥ ـ ١٣) و (٥ ـ ٧) تعطيان نتيجة واحدة عندوجود النهايتين .

٢١ . اثبت ان حد الباقي ب $_{ن}$ (س − س$_{.}$) في متسلسلة تايلر يحقق المعادلة

$$ب_{ن}(س - س_{.}) = \frac{ق^{(ن+1)}\,\bar{س}}{(ن+1)!}(س - س_{.})^{ن+1} ،$$

حيث $\bar{س}$ قيمة ما بين س$_{.}$ ، س

[**ارشاد**: استعمل نظرية القيمة المتوسطة في حساب التفاضل].

٢٢ . استعمل نتيجة التمرين ٢١ لبيان ان $e^{س}$ ، جا س ، جتا س تحليلية لكل س .

٢٣ . استعمل نتيجة التمرين ٢١ لأثبات ان (١ + س)، ظا$^{-1}$ س تحليلية لكل س حيث | س | < ١ .

٢٤ . خذ الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} e^{-1/س^2} ، & س \neq 0 ، \\ 0 ، & س = 0 . \end{cases}$$

أ) بين ان ق له مشتقات من جميع الرتب عند س = ٠ وان

$ق'(٠) = ق''(٠) = ... = ٠$.

ب) استخلص ان ق (س) ليس له مفكوك بصيغة متسلسلة تايلر عند س = ٠ رغم انه قابل للاشتقاق بلا نهاية ولذا فان ق ليس تحليلياً عند س = ٠ .

٢٥ . باستعمال صيغة تايلر اثبت قانون ذات الحدين :

$$(١ + س)^{ن} = ١ + ن س + \frac{ن (ن - ١)}{١ \times ٢} س^{٢} + \frac{ن (ن - ١) (ن - ٢)}{١ \times ٢ \times ٣} س^{٣} + \dots$$

---

٥ ـ ٢ طريقة متسلسلات القوى

أمثلة

ينطوي حل المعادلة التفاضلية بطريقة متسلسلات القوى على أفتراض أساسي هو ان حل هذه المعادلة يمكن التعبير عنه بصيغة قوى، مثل

$$ص = \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن} س^{ن} \quad \text{.......................... (٥ ـ ٢٦)}$$

فعندما يصح هذا الفرض يمكن الحصول على متسلسلات قوى للمشتقات $ق'$ ، $ق''$، ... وذلك بمفاضلة (٥ ـ ٢٦) حداً حداً :

$$ص' = \sum_{ن=١}^{\infty} ن\, حـ_{ن} س^{ن-١} \text{ ،} \quad \text{........................ (٥ ـ ٢٧)}$$

$$ص'' = \sum_{ن=٢}^{\infty} ن (ن - ١)\, حـ_{ن} س^{ن-٢} \text{ ، الخ} \quad \text{.............. (٥ ـ ٢٨)}$$

ثم نعوض هذه في المعادلة التفاضلية المعطاة. فبعد اجراء هذه الخطوات ثم تجميع

القوى المتشابهة نحصل على عبارة بالشكل:

$$ك_{.} + ك_{١} س + ك_{٢} س^{٢} + \ldots = \sum_{ن=.}^{\infty} ك_{ن} س^{ن} = ٠ \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٢٩)$$

حيث $ك_{.}$ ، $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ ، ... عبارات تشمل المعاملات المجهولة $حـ_{.}$ ، $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ ، ... ولأن (٥ - ٢٩) يجب ان تصح مع كل قيم س ضمن فترة ما، فكل المعاملات $ك_{.}$ ، $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ ، ... يجب ان تتلاشى. فمن المعادلات

$ك_{.} = ٠$ ، $ك_{١} = ٠$ ، $ك_{٢} = ٠$ ، ...

يمكن ان نجد بالتتابع $حـ_{.}$ ، $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ ، ... وفي هذا البند سنوضح الخطوات بعدة امثلة دون ان نعنى بمشاكل تقارب المتسلسلة المعينة. ثم في البند الثاني سنركز الاهتمام في بحث صحة هذه الطرق وحدودها.

المثال ٥ - ٢ - ١ هذه مسألة قيمة ابتدائية

$$صَ = ص + س^{٢} \text{ ، } ص(٠) = ١ . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٣٠)$$

عوض (٥ - ٢٦) و (٥ - ٢٧) في هذه المعادلة ينتج:

$$حـ_{١} + ٢حـ_{٢} س + ٣حـ_{٣} س^{٢} + ٤ حـ_{٤} س^{٣} + \ldots$$

$$= (حـ_{.} + حـ_{١} س + حـ_{٢} س^{٢} + حـ_{٣} س^{٣} + \ldots) + س^{٢} .$$

وبتجميع الحدود المتشابهة:

$$(حـ_{١} - حـ_{.}) + (٢حـ_{٢} - حـ_{١}) س + (٣حـ_{٣} - حـ_{٢} - ١) س^{٢} +$$
$$(٤حـ_{٤} - حـ_{٣}) س^{٣} + \ldots = ٠$$

وبمعادلة كل معامل بالصفر ينتج ان :

$$\text{حـ}_{١} = \text{حـ}_{٠} \ ، \ \text{حـ}_{٢} = \frac{\text{حـ}_{١}}{٢} = \frac{\text{حـ}_{٠}}{٢!} \ ،$$

$$\text{حـ}_{٣} = \frac{\text{حـ}_{٢} + ١}{٣} = \frac{\text{حـ}_{٠} + ٢}{٣!} \ ، \ \text{حـ}_{٤} = \frac{\text{حـ}_{٣}}{٤} = \frac{\text{حـ}_{٠} + ٢}{٤!} + \ldots \ ،$$

فتصير المعادلة (٥ ـ ٢٦) :

$$\text{ص} = \text{حـ}_{٠} + \text{حـ}_{٠} \text{س} + \frac{\text{حـ}_{٠}}{٢!} \text{س}^{٢} + \frac{\text{حـ}_{٠} + ٢}{٣!} \text{حـ}^{٣}$$

$$+ \frac{\text{حـ}_{٠} + ٢}{٤!} \text{س}^{٤} + \frac{\text{حـ}_{٠} + ٢}{٥!} \text{س}^{٥} + \ldots$$

$$= (\text{حـ}_{٠} + ٢) \ [١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} + \ldots] \bullet$$

$$- ٢ \ [١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!}] .$$

فباستعمال المفكوك (٥ ـ ١٦) نجد ان الحل العام

$$\text{ص} = (\text{جـ} + ٢) \ e^{\text{س}} - \text{س}^{٢} - ٢ \ \text{س} - ٢ .$$

فلحل مسألة القيمة الابتدائية، نضع س = ٠ فينتج ان

$$١ = \text{ص} \ (٠) = \text{حـ}_{٠} + ٢ - ٢ = \text{جـ}_{٠} .$$

فيكون حل مسألة القيم الابتدائية (٥ ـ ٣٠) هو

$$\text{ص} = ٣\,e^{\text{س}} - \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٢$$

المثال ٥ ـ ٢ ـ ٢ حل

$$\text{صً} + \text{ص} = ٠ \qquad \text{(٥ ـ ٣١)}$$

نستعمل (٥ ـ ٢٦) و (٥ ـ ٢٨) فينتج:

$$(٢\,\text{حـ}_{٢} + ٣ \times ٢\,\text{حـ}_{٣}\,\text{س} + ٤ \times ٣\,\text{حـ}_{٤}\,\text{س}^{٢} + \ldots) + (\text{حـ}_{٠} + \text{حـ}_{١}\,\text{س} + \text{حـ}_{٢}\,\text{س}^{٢} + \ldots) = ٠$$

وبتجميع قوى س المتساوية ينتج

$$(٢\,\text{حـ}_{٢} + \text{حـ}_{٠}) + (٣ \times ٢\,\text{حـ}_{٣} + \text{حـ}_{١})\,\text{س} + (٤ \times ٣\,\text{حـ}_{٤} + \text{حـ}_{٢})\,\text{س}^{٢} + \ldots = ٠$$

وبمعادلة المعاملات للصفر ينتج:

$$٢\,\text{حـ}_{٢} + \text{حـ}_{٠} = ٠ \text{ ، } ٣ \times ٢\,\text{حـ}_{٣} + \text{حـ}_{١} = ٠ \text{ ، } ٤ \times ٣\,\text{حـ}_{٤} + \text{حـ}_{٢} = ٠ \text{ ، } ٥ \times ٤\,\text{حـ}_{٥} + \text{حـ}_{٣} = ٠ \text{ ، } \ldots$$

فيكون

$$\text{حـ}_{٢} = -\frac{\text{حـ}_{٠}}{٢!} \text{ ، } \text{حـ}_{٣} = -\frac{\text{حـ}_{١}}{٣!} \text{ ، } \text{حـ}_{٤} = -\frac{\text{حـ}_{٢}}{٤ \times ٣} = \frac{\text{حـ}_{٠}}{٤!}$$

$$\text{حـ}_{٥} = -\frac{\text{حـ}_{٣}}{٥ \times ٤} = \frac{\text{حـ}_{١}}{٥!} \text{ ، } \ldots$$

فنعوض هذه القيم في متسلسلة القوى (٥ ـ ٢٦) فينتج:

$$ص = حـ_. + حـ_١ س - \frac{حـ_.}{٢!} س^٢ - \frac{حـ_١}{٣!} س^٣ + \frac{حـ_.}{٤!} س^٤$$

$$+ \frac{حـ_١}{٥!} س^٥ + \ldots$$

فنقسم المتسلسلة الى جزأين كما يلي:

$$ص = حـ_. (١ - \frac{س^٢}{٢!} + \frac{س^٤}{٤!} - \ldots)$$

$$+ حـ_١ (س - \frac{س^٣}{٣!} + \frac{س^٥}{٥!} - \ldots).$$

وبالمقارنة بالمعادلتين (٥ ـ ١٧) و (٥ ـ ١٨) نجد الحل العام المألوف

$$ص = حـ_. جتا س + حـ_١ جا س.$$

نلاحظ ان طريقة متسلسلة القوى اعطت في هذه الحالة ثابتين عشوائيين، $حـ_.$ ، $حـ_١$ واعطت الحل العام للمعادلة (٥ ـ ٣١).

ما عالجناه حتى الآن معادلات خطية ذات معاملات ثابتة، فلننظر في معاملات خطية ذات معاملات متغيرة:

المثال ٥ ـ ٢ ـ ٣ خذ مسألة القيمة الابتدائية

$(١ + س^٢) صَ = ٢ ل س ص$، ص (٠) = ١ ، .... (٥ ـ ٣٢)

حيث ل ثابت

نستعمل (٥ ـ ٢٦) و (٥ ـ ٢٧) فينتج

$$(١ + س^{٢}) \sum_{ن=١}^{\infty} ن\, حـ_{ن}\, س^{ن-١} = ٢\, ل\, س \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن}\, س^{ن} .$$

نستعمل في هذا المثال رمز التجميع ($\sum$) لكسب مهارة في معالجة متسلسلات القوى سنحتاج اليها فيما بعد. فالمعادلة (٥ ـ ٣٢) يمكن ان تكتب على النحو:

$$\sum_{ن=١}^{\infty} ن\, حـ_{ن}\, س^{ن-١} + \sum_{ن=١}^{\infty} ن\, حـ_{ن}\, س^{ن+١} = ٢\, ل \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن}\, س^{ن+١} .$$

(٥ ـ ٣٣) . . . .

والآن نريـــد ان نكتب كلاً من مجمـوعـات (٥ ـ ٣٣) بحيث ان كل مجمـوع عام يحوي نفس قوى س. ويمكن ذلك باعتبار ان كل مجموع عام فيه الحد $س^{ك}$. ففي المجموعة الأولى يقتضي الأمر تعويض ك بدل ن - ١. فلأن ن يتراوح من ١ الى ∞ ، فان ك = ن - ١ تتراوح من ٠ الى ∞ . وفي تعويض ك = ن + ١ حيث تتراوح ك من ٢ الى ∞ في المجموعة الثانية، وكذلك ك = ن + ١ حيث تتراوح ك من ١ الى ∞ في الثالثة. يمكن كتابة المجموعات بحيث يشمل الحد النوني القوة $س^{ك}$ كما يلي:

$$\sum_{ك=٠}^{\infty} (ك + ١)\, حـ_{ك+١}\, س^{ك} + \sum_{ك=٢}^{\infty} (ك + ١)\, حـ_{ك-١}\, س^{ك} = ٢\, ل \sum_{ك=١}^{\infty} حـ_{ك-١}\, س^{ك}$$

والآن نستطيع ان نجمع الحدود المتشابهة في س:

$$حـ_{١} + (٢\, حـ_{٢} - ٢\, ل\, حـ_{٠})\, س + \sum_{ك=٢}^{\infty} \{ (ك + ١)\, حـ_{ك+١}$$

$$+ [(ك - ١) - ٢ل]\, حـ_{ك-١} \}\, س^{ك} = ٠ \quad \text{. . . . .} \quad (٥ ـ ٣٤)$$

وبمعادلة المعاملات للصفر ينتج: $حـ_{١} = ٠$ ، $٢\, حـ_{٢} - ٢\, ل\, حـ_{٠} = ٠$ ، $٣\, حـ_{٣} +$

$(1 - 2ل)\, حـ_1 = 0$، وبوجه عام:

$$(ك + 1)\, حـ_{ك+1} + [(ك - 1) - 2ل]\, حـ_{ك-1} = 0،\ ك \geqslant 1 \quad .... \quad (5 - 35)$$

نلاحظ ان المعادلة (٥ ـ ٣٥) هي معادلة فرق ذات معاملات متغيرة. وتسمى هذه المعادلة **بالصيغة الدورية** ويمكن استعمالها لايجاد قيم $حـ_0$ ، $حـ_1$ ، $حـ_2$ ، ... بالتعاقب. فنجد ان

$حـ_1 = 0$ ، $حـ_2 = ل\, حـ_0$ ، $حـ_3 = 0$ ،

وعموماً، من (٥ ـ ٣٥):

$$حـ_{ك+1} = \frac{2ل - ك + 1}{ك + 1}\, حـ_{ك-1} \text{،} \quad .... \quad (5 - 36)$$

فيكون

$$حـ_4 = \frac{2ل - 2}{4}\, حـ_2 = \frac{ل\,(ل - 1)}{1 \times 2}\, حـ_0 \text{ ، } حـ_5 = 0 \text{ ،}$$

$$حـ_6 = \frac{2ل - 4}{6}\, حـ_4 = \frac{ل\,(ل - 1)\,(ل - 2)}{1 \times 2 \times 3}\, حـ_1 \text{ ، } حـ_7 = 0 \text{ ، ....}$$

لأن $حـ_3 = 0$. وهكذا فمعاملات الجيبات الفردية تتلاشى، وتبقى متسلسلة القوى كما يلي:

$$ص = حـ_0 + \frac{ل}{1}\, حـ_0\, س^2 + \frac{ل\,(ل - 1)}{1 \times 2}\, حـ_0\, س^4$$

$$+ \frac{ل (ل - ١) (ل - ٢)}{١ \times ٢ \times ٣} حـ_٠ س^٦ + \ldots$$

$$= حـ_٠ \left(١ + \frac{ل}{١} س^٢ + \frac{ل (ل - ١)}{١ \times ٢} س^٤ + \frac{ل (ل - ١) (ل - ٢)}{١ \times ٢ \times ٣} س^٦ + \ldots\right).$$

وبتعويض س بدل $س^٢$ في قانون ذات الحدين (انظر التمرين ٥ ـ ١ ـ ٢٥)

ينتج :

$$(١ + س)^ل = ١ + \frac{ل}{١} س + \frac{ل (ل - ١)}{١ \times ٢} س^٢ ،$$

$$+ \frac{ل (ل - ١) (ل - ٢)}{١ \times ٢ \times ٣} س^٣ + \ldots \qquad \text{(٥ ـ ٣٧)}$$

وهذا يعني ان الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$ص = حـ_٠ (١ + س^٢)^ل .$$

ولأن ص (٠) = ١ ينتج ان $حـ_٠ = ١$ وان $ص = (١ + س^٢)^ل$.

المثال ٥ ـ ٢ ـ ٤ خذ المعادلة التفاضلية

$$صً + س صَ + ص = ٠ . \qquad \text{(٥ ـ ٣٨)}$$

نستعمل (٥ ـ ٢٦) ، (٥ ـ ٢٧) ، (٥ ـ ٢٨) فتنتج المعادلة

$$\sum_{ن=٢}^{\infty} ن (ن - ١) حـ_ن س^{ن-٢} + س \sum_{ن=١}^{\infty} ن حـ_ن س^{ن-١} + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^ن = ٠ .$$

نعيد الترقيم بحيث تتساوى قوى س، فيكون

$$\sum_{\text{ك}=٠}^{\infty} (\text{ك} + ٢)(\text{ك} + ١)\,\text{حـ}_{\text{ك}+٢}\,\text{س}^{\text{ك}} + \sum_{\text{ك}=١}^{\infty} \text{ك}\,\text{حـ}_{\text{ك}}\,\text{س}^{\text{ك}} + \sum_{\text{ك}=٠}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ك}}\,\text{س}^{\text{ك}} = ٠$$

لاحظ ان المجموعة الثانية يمكن ايضاً ان نجعلها تتراوح من ٠ الى ∞ . نجمع حدود س المتشابهة فتنتج المعادلة:

$$\sum_{\text{ك}=٠}^{\infty} [(\text{ك} + ٢)(\text{ك} + ١)\,\text{حـ}_{\text{ك}+٢} + (\text{ك} + ١)\,\text{حـ}_{\text{ك}}]\,\text{س}^{\text{ك}} = ٠ \quad \ldots \quad (٥ - ٣٩)$$

وبمعادلة المعاملات للصفر نحصل على الصيغة الدورية العامة:

$$(\text{ك} + ٢)(\text{ك} + ١)\,\text{حـ}_{\text{ك}+٢} + (\text{ك} + ١)\,\text{حـ}_{\text{ك}} = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٤٠)$$

فاذن $(\text{ك} + ٢)\,\text{حـ}_{\text{ك}+٢} = -\,\text{حـ}_{\text{ك}}$ واذن:

$$\text{حـ}_٢ = -\,\text{حـ}_٠/٢ ،\quad \text{حـ}_٣ = -\,\text{حـ}_١/٣ ،\quad \text{حـ}_٤ = -\,\text{حـ}_٢/٤ = \frac{\text{حـ}_٠}{٢ \times ٤} ،$$

$$\text{حـ}_٥ = -\,\text{حـ}_٣/٥ = \frac{\text{حـ}_١}{٣ \times ٥} ،\quad \text{حـ}_٦ = -\,\text{حـ}_٤/٦ = -\frac{\text{حـ}_٠}{٢ \times ٤ \times ٦} ، \text{الخ}.$$

فمتسلسلة القوى هي:

$$\text{ص} = \text{حـ}_٠ + \text{حـ}_١\,\text{س} - \frac{\text{حـ}_٠}{٢}\,\text{س}^٢ - \frac{\text{حـ}_١}{٣}\,\text{س}^٣ + \frac{\text{حـ}_٠}{٢ \times ٤}\,\text{س}^٤$$

$$+ \frac{\text{حـ}_١}{٣ \times ٥}\,\text{س}^٥ - \ldots$$

او بفصل حدود $ح_.$ ، $ح_1$ ،

$$= ح_. \left(1 - \frac{س^2}{2} + \frac{س^4}{2 \times 4} - \frac{س^6}{2 \times 4 \times 6} + \ldots\right)$$

$$+ ح_1 \left(س - \frac{س^3}{3} + \frac{س^5}{3 \times 5} - \frac{س^7}{3 \times 5 \times 7} + \ldots\right) \quad \ldots\ldots \quad (5 - 41)$$

هنا ننظر لعلنا نتعرف على المتسلسلتين اللتين حصلنا عليهما بطريقة متسلسلة القوى. وكثيراً ما تكون هذه المهمة عديمة الجدوى. ولكننا هنا أحسن حظاً:

$$1 - \frac{س^2}{2} + \frac{س^2}{2 \times 4} - \frac{س^6}{2 \times 4 \times 6} + \ldots$$

$$= 1 + \left(-\frac{س^2}{2}\right) + \frac{1}{!2}\left(-\frac{س^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{!3}\left(-\frac{س^2}{2}\right)^3 + \ldots$$

$$= e^{-س^2/2}$$

ولا نستطيع ان نتعرف على المتسلسلة الثانية. فنستعمل طريقة البند (3 - 3) في ايجاد حل اذا عرف حل آخر فمن الصيغة (3 - 16) يكون

$$ص_2 = ص_1 \int \frac{e^{-\int س\, د س}}{ص^2}\, د س = e^{-س^2/2} \int \frac{e^{-س^2/2}}{(e^{-س^2/2})^2}\, د س$$

$$= e^{-س^2/2} \int e^{س^2/2}\, د س. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5 - 42)$$

والتكامل في (5 - 42) ليس له حل محسوم. ويمكن ان نتحقق ان هذا هو المتسلسلة

الثانية في (٥ ـ ٤١) بمكاملة متسلسلة $e^{س^٢/٢}$ حداً حداً وضرب الناتج في متسلسلة $e^{-س^٢/٢}$

فالحل العام للمعادلة (٥ ـ ٣٨) هو

$$ص = حـ_٠ \, e^{-س^٢/٢} + حـ_١ \, e^{-س^٢/٢} \int e^{س^٢/٢} \, د س .$$

المثال ٥ ـ ٢ ـ ٥ حل المعادلة

$$س صً + صَ + س ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٤٣)$$

باستعمال متسلسلات القوى (٥ ـ ٢٦) و(٥ ـ ٢٧) و(٥ ـ ٢٨) تؤول المعادلة (٥ ـ ٤٣) الى

$$\sum_{ن=٢}^{\infty} ن(ن - ١) حـ_ن س^{ن-١} + \sum_{ن=١}^{\infty} ن حـ_ن س^{ن-١} + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^{ن+١} = ٠ .$$

وباعادة التسمية بحيث تتساوى قوى س ينتج :

$$\sum_{ك=١}^{\infty} (ك + ١) ك حـ_{ك+١} س^ك + \sum_{ك=٠}^{\infty} (ك + ١) حـ_{ك+١} س^ك + \sum_{ك=١}^{\infty} حـ_{ك+١} س^ك = ٠ .$$

وبتجميع الثلاث في واحدة ينتج

$$حـ_١ + \sum_{ك=١}^{\infty} [(ك + ١)^٢ حـ_{ك+١} + حـ_{ك-١}] س^ك = ٠ . \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٤٤)$$

فنساوي المعاملات بالصفر، فيكون حـ$_١$ = ٠،

$$(ك + ١)^٢ حـ_{ك+١} = - حـ_{ك-١} ، \quad ك = ١ ، ٢ ، ٣ ، \ldots \quad \ldots\ldots \quad (٥ ـ ٤٥)$$

من الصيغة الدورية (٥ ـ ٤٥) بالاضافة الى $\text{حـ}_1 = 0$ نستنتج ان كل المعاملات الفردية تتلاشى وان

$$\text{حـ}_٢ = -\frac{\text{حـ}_٠}{٢} \text{ ، } \text{حـ}_٤ = -\frac{\text{حـ}_٢}{٤} = \frac{\text{حـ}_٠}{٢^٢ \times ٤^٢} \text{ ،}$$

$$\text{حـ}_٦ = -\frac{\text{حـ}_٤}{٦} = -\frac{\text{حـ}_٠}{٢^٢ \times ٤^٢ \times ٦^٢} \text{ ، } \ldots$$

فيكون

$$\text{ص} = \text{حـ}_٠ - \frac{\text{حـ}_٠}{٢^٢}\text{س}^٢ + \frac{\text{حـ}_٠}{٢^٢ \times ٤^٢}\text{س}^٤ - \frac{\text{حـ}_٠}{٢^٢ \times ٤^٢ \times ٦^٢}\text{س}^٦ + \ldots$$

$$= \text{حـ}_٠ \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{١}{(\text{ن}!)^٢}\left(-\frac{\text{س}^٢}{٤}\right)^{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٤٦)$$

ونستبعد ان يكون للقارئ، المام بالمتسلسلة (٥ ـ ٤٦). انها كثيراً ما تستعمل في الرياضيات التطبيقية وتسمى دالة بيزيل الصفرية الدليل ورمزها $J_٠(\text{س})$ (وسندرس خصائص دوال بيزيل في البند ٥ ـ ٤) لاحظ ان طريقة متسلسلة القوى قد افضت الى واحد من حلول المعادلة (٥ ـ ٤٣). فلايجاد الحل الثاني يمكن ان نمضي كما في المثال (٥ ـ ٢ ـ ٤) (وانظر ايضاً التمرين ٣ ـ ٣ ـ ٧). فيكون

$$\text{ص}_٢(\text{س}) = J_٠(\text{س}) \int \frac{\text{د س}}{\text{س}\, J_٠^{٢}(\text{س})}$$

وفي النهاية يكون الحل العام للمعادلة (٥ ـ ٤٣) هو

$$ص(س) = أ J(س) + ب J(س) \int \frac{د س}{س J^2(س)}$$

وفي المثال التالي نجابه بحالة تفشل فيها طريقة متسلسلة القوى في اعطاء أي حل.

المثال ٥ ـ ٢ ـ ٦ انظر في المعادلة التفاضلية

$$س^2 صً + س صَ + ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٤٧)$$

باستعمال المتسلسلات (٥ ـ ٢٦) و(٥ ـ ٢٧) و(٥ ـ ٢٨) مع الضرب بقوى س المناسبة، ينتج :

$$\sum_{ن=٢}^{\infty} ن(ن-١) حـ_ن س^ن + \sum_{ن=١}^{\infty} ن حـ_ن س^ن + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^ن = ٠$$

أي

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} (ن^2+١) حـ_ن س^ن = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٤٨)$$

وواضح انه اذا ساوينا كل معامل في (٥ ـ ٤٨) بالصفر فان كل $حـ_ن$ يتلاشى وينتج $ص \equiv ٠$. وفي هذه الحالة قد فشلت طريقة متسلسلات القوى في ايجاد الحل العام للمعادلة (٥ ـ ٤٧)، وهو:

$$ص = أ جتا(لي |س|) + ب جا(لي |س|) . \quad \ldots\ldots \quad (٥ ـ ٤٩)$$

(نتحقق من صحة هذا الحل).

ولكن الطريقة تعطي حلاً خاصاً للمعادلة غير المتجانسة :

$$س^2 صً + س صَ + ص = \frac{١}{١ - س}، \quad |س| < ١ \quad \ldots\ldots \quad (٥ ـ ٥٠)$$

لأن (٥ ـ ٤٨) والمتوالية الهندسية (٥ ـ ١٠) تفضيان الى :

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} (ن^٢ + ١)\, حـ_ن\, س^ن = \sum_{ن=٠}^{\infty} س^ن$$

أي

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} [(ن^٢ + ١)\, حـ_ن - ١]\, س^ن = ٠$$

فيكون

$$حـ_ن = \frac{١}{ن^٢ + ١}، \text{ لكل } ن$$

وهذا يعطي حلا خاصاً للمعادلة (٥ ـ ٥٠) هو

$$ص_ح = ١ + \frac{س}{٢} + \frac{س^٢}{٥} + \frac{س^٣}{١٠} + \dots + \frac{س^ن}{ن^٢ + ١} + \dots \quad \dots\dots \quad (٥ ـ ٥١)$$

وباستعمال اختبار النسبة (٥ ـ ١٣) نجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة (٥ ـ ٥١) :

$$\frac{١}{نق} = \lim_{ن \to \infty} \frac{ن^٢ + ١}{(ن + ١)^٢ + ١}$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \frac{١ + ١/ن^٢}{(١ + ١/ن)^٢ + ١/ن^٢} = ١.$$

فالحل العام للمعادلة (٥ ـ ٥٠) هو

$$ص = أ\ جتا\ (لي\ |س|) + ب\ جا\ (لي\ |س|)$$

$$+ (1 + \frac{س}{2} + \frac{س^2}{5} + \ldots).$$

ويصح لكل $|س| < 1$

التمارين ٥ ـ ٢

في التمارين ١ الى ٢٠ أوجد الحل العام لكل معادلة، وحيث تعطى شروطاً ابتدائية اوجد الحل الذي يحققها

١. $صَ = ص$ ، $ص(0) = 4$

٢. $صَ = 5\ ص$ ، $ص(0) = 1$

٣. $صَ = ص - س$ ، $ص(0) = 2$

٤. $صَ = -2ص + س$

٥. $صَ = س\ ص$

٦. $صَ = س^3 - 2\ س\ ص$ ، $ص(0) = 1$

٧. $صَ = ص + e^{س}$

٨. $س\ صَ = ص$

٩. $س\ صَ = ن\ ص$، ن عدد صحيح.

١٠. $صَ = 1 + ص^2$ ، $ص(0) = 0$

١١ . صً + ٤ ص = ٠

١٢ . صً − ٤ ص = ٠ ، ص (٠) = ٢ ، صَ (٠) = ٠

١٣ . صً − ص = ٠

١٤ . صً + ص = ٠ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٠

١٥ . (١ + س^{٢}) صً + ٢ س صَ − ٢ ص = ٠

١٦ . صً + ٢ صَ + ص = جا س

١٧ . صً + ص = e^{٢س}

١٨ . صً − $\frac{٣}{س}$ صَ = ٠

١٩ . س^{٢} صً + س صَ − ٤ ص = ٠

٢٠ . صً − ٢ س صَ + ٢ ص = ٠

٢١ . هل تعطي طريقة متسلسلات القوى حلاً للمعادلة :

أ) س^{٢} صَ = ص؟

ب) س^{٣} صَ = ص؟

٢٢ . حل صَ = ص $\sqrt{ص^{٢} - ١}$

٢٣ . بين ان طريقة متسلسلات القوى تفشل في حل

س^{٢} صً + س^{٢} صَ + ص = ٠

٥ ـ ٣ النقط العادية والنقط المنفردة

لاحظ القاريء من البند السابق ان طريقة متسلسلة القوى تفشل في ايجاد حل لمعادلة ما، في حين انها تحل معادلة أخرى هي ظاهرياً شبيهة بها. وفي هذا البند سنحلل هذه العلة ونكتشف سببها.

ونلمح مفتاح الحل لهذا اللغز بجعل معامل اعلى مشتقة واحداً. فاذا كتبنا كل معادلة متجانسة من الرتبة الثانية في امثلة البند (٥ ـ ٢) بالشكل:

$$ص'' + أ(س)\, ص' + ب(س)\, ص = ٠ \text{ ، } \quad (٥ ـ ٥١)$$

فعندها تصير المعادلتان في المثالين (٥ ـ ٢ ـ ٥) و (٥ ـ ٢ ـ ٦) بالشكل:

$$ص'' + \frac{١}{س} ص' + ص = ٠ \quad (٥ ـ ٥٢)$$

$$\text{، } ص'' + \frac{١}{س} ص' + \frac{١}{س^{٢}} ص = ٠ \quad (٥ ـ ٥٣)$$

يلاحظ في كل واحدة من هاتين المعادلتين ان احد الحدين أ (س) ، ب (س) او كليهما غير معرف عند س = ٠ والمهم في المعادلة (٥ ـ ٥١) ان سلوك الحل قرب $س = س_{٠}$ يعتمد على سلوك أ (س) ، ب (س) عند $س_{٠}$ فاذا كان الاقترانان أ (س) وب (س) كلاهما تحليليين عند $س = س_{٠}$ (اي ان كلاً منهما يمكن التعبير عنه بمتسلسلة قوى في $(س - س_{٠})$ قطر اقترابها موجب) نسمي $س_{٠}$ **نقطة عادية** في المعادلة (٥ ـ ٥١). وكل نقطة ليست نقطة عادية نسميها **نقطة منفردة** في المعادلة (٥ ـ ٥١).

النقطة العادية: افرض ان $س_0$ نقطة عادية في المعادلة (٥ ـ ٥١). فهنا كل من أ (س)، ب (س) يمكن التعبير عنه بمتسلسلة لقوى (س − $س_0$) على فترة ما $|س - س_0| <$ نق. والنظرية التالية تؤكد انه تحت هذه الشروط تعطي طريقة متسلسلات القوى حداً يعطي ص (س) مفكوكاً الى متسلسلة قوى.

النظرية ٥ ـ ٢ لتكن $س_0$ نقطة عادية في المعادلة التفاضلية:

$$صً + أ (س) صَ + ب (س) ص = ٠ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (٥ ـ ٥٤)$$

وليكن $\propto$ ، β أي ثابتين. فهنالك اقتران وحيد ص (س)، تحليلي عند $س_0$ ويحقق المعادلة (٥ ـ ٥٤) والشرطين الابتدائيين ص ($س_0$) = $\propto$ ، صَ ($س_0$) = β . واذا كان فك أ (س)، ب (س) الى متسلسلتي قوى يصح لكل س حيث $|س - س_0| <$ نق، فكذلك يصح فك الحل ص(س) الى متسلسلة قوى.

وبرهان هذه النظرية معقد، ولكن تفاصيله الرئيسية مبينة بالتمرين ٢٧ في نهاية هذا البند.

فالنظرية ٥ ـ ٢ تعطي التبرير لاستعمال طريقة متسلسلات القوى في حل المعادلات التفاضلية عند نقطة عادية. والأمثلة (٥ ـ ٢ ـ ١) الى (٥ ـ ٢ ـ ٤) تحقق شروط هذه النظرية، وفيها س = ٠ نقطة عادية.

النقاط المنفردة النظامية:اليك المعادلة التفاضلية

$$صً + \frac{٢}{س} صَ - ص = ٠ ،$$

ان لها نقطة منفردة عند س = ٠ ويسهل ان نبين ان ص = $e^{س}$/س حل لهذه المعادلة

ويستحيل ان نفك $e^{س}/س$ الى متسلسلة في قوى س ، ولكن يمكن ان نكتبها بشكل متسلسلة بقوى س مضروبة في احدى قوى س :

$$\frac{e^{س}}{س} = \frac{1}{س}\left(1 + س + \frac{س^2}{!2} + \frac{س^3}{!3} + \ldots\right).$$

وهذا يوحي بان علينا ان نبحث عن حلول بالشكل

$$ص = س^{د}\left(حـ_0 + حـ_1 س + حـ_2 س^2 + حـ_3 س^3 + \ldots\right) ،$$

حيث د عدد ما حقيقي اومركب، وذلك عندما تكون س = ٠ نقطة منفردة في المعادلة التفاضلية .

ففي احد اصناف النقط المنفردة يؤدي هذا التعديل في طريقة متسلسلات القوى الى حلول :

النقطة المنفردة النظامية $س_0$ هي نقطة يكون عندها $(س - س_0)$ أ (س) ، $(س - س_0)^2$ ب (س) تحليليين . فمثلاً س = ٠ نقطة منفردة نظامية لكل من المعادلتين (٥ ـ ٥٢) و(٥ ـ ٥٣) لأن المعادلة (٥ ـ ٥٢) فيها :

س أ (س) = ١ ، $س^2$ ب (س) = $س^2$ . . . . (٥ ـ ٥٥)

وفي المعادلة (٥ ـ ٥٣)

س أ (س) = ١ ، $س^2$ ب (س) = ١ . . . . (٥ ـ ٥٦)

وكل الاقترانات في (٥ ـ ٥٥) و(٥ ـ ٥٦) متسلسلات بقوى س فيها كل المعاملات اصفار عدا واحداً منها، فهي اذن تحليلية عند س = ٠

والنقطة المنفردة التي ليست نظامية تسمى **شاذة**.

المثال ٥ ـ ٣ ـ ١ النقطة س = ٠ نقطة منفردة شاذة في المعادلتين :

$$ص'' + \frac{١}{س^{٢}} ص' + ص = ٠ ،$$

$$ص'' + \frac{١}{س} ص' + \frac{١}{س^{٣}} ص = ٠ \qquad \text{.......................} \quad (٥ ـ ٥٧)$$

وللتبسيـط في شرح طريقـة متسلسـلات القـوى المعـدلـة ، وتسمى طريقة فروبينيوس (Frobenius) نفرض ان س = ٠ نقطة منفردة نظامية في المعادلة

$$ص'' + أ (س) ص' + ب (س) ص = ٠ . \qquad \text{..................} \quad (٥ ـ ٥٨)$$

[اذا كان $س_{٠} \neq ٠$ نقطة منفردة نظامية نعوض $س = س - س_{٠}$ فتتحول المتسلسلة من قوى $(س - س_{٠})$ الى قوى س . وتكـون النقطـة س = ٠ عنـدهـا نقطة منفردة نظامية في المعادلة التفاضلية].

لنفرض الآن ان المعادلة (٥ ـ ٥٨) لها حل بالشكل :

$$ص = س^{د} (حـ_{٠} + حـ_{١} س + حـ_{٢} س^{٢} + \ldots) = \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن} س^{ر+ن} ، حـ_{٠} = ١$$
$$، س > ٠ ، \ldots \qquad \text{..................} \quad (٥ ـ ٥٩)$$

حيث د عدد حقيقي اومركب . ويمكن ان نفرض ان $حـ_{٠} = ١$ ، لأن اصغر قوى س يمكن ان تخرج بالتحليل من عبارة كالتي في (٥ ـ ٥٩)، وضرب اي حل في عدد ثابت هو أيضاً حل للمعادلة التفاضلية . هذا بالاضافة الى ان جعل $حـ_{٠} = ١$ يبسط الشرح التالي كثيراً . ومن الضروري ان نشترط ان يكون س > ٠ . لتجنب المشاكل التي تنجم عن بعض قيم د، مثل د = $\frac{١}{٢}$ أو $-\frac{١}{٤}$ لأننا لا نريد ان نخوض في الحلول التخيلية

[اذا اردنا أن نجد حلاً يصح لقيم س > ٠ يمكن ان نغير المتغيرات بوضع س بدل -س في المعادلة (٥ ـ ٥٨) ثم حل المعادلة الناتجة لكل س > ٠]. فلأن

$$ص' = \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن (د + ن) س^{د+ن-١} \quad .... \quad (٥ ـ ٦٠)$$

$$، ص'' = \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن (د + ن) (د + ن - ١) س^{د+ن-٢} \quad .... \quad (٥ ـ ٦١)$$

يمكن ان نكتب المعادلة (٥ ـ ٥٤) بالشكل

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن (د + ن) (د + ن - ١) س^{د+ن-٢} + أ (س) \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن (د + ن) س^{د+ن-١}$$
$$+ ب (س) \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^{د+ن} = ٠$$

أو

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن [(د + ن) (د + ن - ١) + (د + ن) س أ (س) + س^٢ ب (س)] س^{د+ن-٢}$$

$$= ٠ \quad .... \quad (٥ ـ ٦٢)$$

ولأن س = ٠ نقطة منفردة نظامية فان س أ (س) ، س ب (س) يمكن التعبير عنهما بمتسلسلتي قوى فيهما قطرا الاقتراب موجبان:

$$س أ (س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... ، \quad .... \quad (٥ ـ ٦٣)$$

$$س^٢ ب (س) = ب_٠ + ب_١ س + ب_٢ س^٢ + ... \quad .... \quad (٥ ـ ٦٤)$$

ولكن ن ⩾ ٠ ، فيكون $س^{د-٢}$ اصغر قوى س في (٥ ـ ٦٢). ولأن معاملات متسلسلة القوى التي مجموعها صفر يجب ان تتلاشى ، ينتج انه ، عند ن = ٠ يكون

$$ح_{ر} [د (د - ١) + أ_{.} د + ب_{.}] = ٠ \quad (٥ - ٦٥)$$

ولكن $ح_{.} = ١$ فرضاً. فيبقى معنا معادلة المؤشرات indicial equation

$$د (د - ١) + أ_{.} د + ب = ٠ ، \quad (٥ - ٦٦)$$

وجذراها $د_{١}$ ، $د_{٢}$ يسميان **أسي** المعادلة التفاضلية (٥ - ٥٤). وفيما يلي سيتبين لنا ان احد حلي المعادلة (٥ - ٥٤) سيكون دائماً من نوع (٥ - ٥٩)، واما الحل الثاني المستقل خطيا فهنالك بشأنه ثلاثة احتمالات حسب الحالات الثلاث التالية

الحالة ١ : اذا كان الفرق بين $د_{١}$ ، $د_{٢}$ ليس عدداً صحيحاً.

الحالة ٢ : اذا كان $د_{١} = د_{٢}$.

الحالة ٣: اذا كان الفرق بين $د_{١}$ ، $د_{٢}$ عدداً صحيحاً غير الصفر .

وسنعالج كل واحدة من هذه الحالات الثلاث على حدة :

الحالة ١ : الفرق بين $د_{١}$ ، $د_{٢}$ ليس عدداً صحيحاً. هذه اسهل حالة. فهنا يكون للمعادلة (٥ - ٥٤) حلان، لكل س > ٠، بالشكل :

$$ص_{١} (س) = س^{د_{١}} (ح_{.} + ح_{١} س + ح_{٢} س^{٢} + \ldots)، ح_{.} = ١ ،$$

$$ص_{٢} (س) = س^{د_{٢}} (ح_{.}^{*} + ح_{١}^{*} س + ح_{٢}^{*} س^{٢} + \ldots)، ح_{.}^{*} = ١ .$$

ويسهل ان نتبين ان $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ مستقلان خطياً لأن $ص_{١} / ص_{٢}$ لا يمكن ان يكون ثابتاً، اذ لو كان لتطابق الجذران $د_{١}$ ، $د_{٢}$. ونحصل على المعاملات $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، . . . كما في البند (٥ - ٥) بتعويض $د_{١}$ بدل د ومعادلة معاملات قوى س في المعادلة (٥ - ٦٢) للصفر وكذلك لايجاد $ح_{١}^{*}$ ، $ح_{٢}^{*}$ ، . . . نعيد ما سبق بتعويض $د_{٢}$ بدل د.

وتتضح هذه الخطوات بالمثال التالي :

المثال ٥ ـ ٣ ـ ٢ ادرس المعادلة (٥ ـ ٥٣)

$$ص'' + \frac{١}{س} ص' + \frac{١}{س^٢} ص = ٠ .$$

حسب (٥ ـ ٥٦) تكون متسلسلة مكلورن لكل من س أ (س) ، $س^٢$ ب (س) هي فقط ١ . فيكون $أ_٠ = ب_٠ = ١$ وتكون معادلة المؤشرات للمعادلة (٥ ـ ٥٣) هي :

$$د (د - ١) + د + ١ = د^٢ + ١ = ٠ ،$$

ويكون $د_١ = i$ ، $د_٢ = - i$ وليس الفرق بينهما عدداً صحيحاً . في (٥ ـ ٦٢) نضع د = i فينتج :

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن (i + ن) (i + ن - ١) + (i + ن) + ١] س^{i+ن-٢} = ٠ .$$

فمعادلة كل معاملات هذه المتسلسلة للصفر وتجميع الحدود المتشابهة ينتج :

$$٠ = حـ_ن [(i + ن)^٢ + ١] = حـ_ن (ن^٢ + ٢ i ن)، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٦٧)$$

وهذه تصح فقط اذا كان $حـ_ن = ٠$ لكل ن > ٠ ، فيكون

$$ص_١ (س) = حـ_٠ س^i = e^{i (لي س)} = [جتا (لي س) + i جا (لي س)] .$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٦٨)$$

وبالمثل نعوض د = - i في المعادلة (٥ ـ ٦٢) فينتج

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^*_ن [(-i + ن) (-i + ن - ١) + (- i + ن) + ١] س^{-i+ن-٢} = ٠ ،$$

ومعاملاتها تحقق الشرط

$حـ^*_ن [ن^2 - 2\text{i} ن] = 0$.

فتكون $حـ^*_ن = 0$ لكل $ن > 0$ وإذن

$ص_2 (س) = حـ^*_. \, س^{-\text{i}} = [جتا (لي س) - \text{i} جا (لي س)]$.

وأخيراً، بما ان التوفيق الخطي للحلول هو ايضاً حل، فان الجزأين الحقيقي والتخيلي من $ص_1$ ، $ص_2$ هما:

$$ص_1^* (س) = \frac{1}{2} (ص_1 + ص_2) = جتا (لي س) ،$$

$$ص_2^* (س) = \frac{1}{2\text{i}} (ص_1 - ص_2) = جا (لي س) ،$$

وهما حلان للمعادلة (٥ ـ ٥٣). وواضح ان $ص_1^*$ ، $ص_2^*$ مستقلان خطياً، لأن $ص_2^* / ص_1^* = ظا (لي س)$، وهذا ليس ثابتاً.

فالحل العام للمعادلة (٥ ـ ٥٣) هو:

$ص = أ جتا (لي س) + ب جا (لي س) ، س > 0$.

(قارن هذا البرهان بما في التمرين ٣ ـ ٨ ـ ١٠).

الحالة ٢ ، $د_1 = د_2$. هنا نضع $د = د_1$ ونعين المعاملات $حـ_1$ ، $حـ_2$ ، . . . كما في الحالة ١ . ثم يمكن ان نستعمل الصيغة (٣ ـ ١٦) لايجاد حل مستقل خطياً عن الحل الذي استخرجناه. واليك هذا المثال:

المثال ٥ ـ ٣ ـ ٣ لنسترجع المعادلة (٥ ـ ٥٢):

$$ص'' + \frac{1}{س} ص' + ص = 0 .$$

فحسب (٥ ـ ٥٥) تكون متسلسلتا مكلورن س أ (س) = ١ ، $س^٢$ ب (س) = $س^٢$ ،
فيكون أ = ١ ، $ب_٠$ = ٠ ، وكمعادلة المؤشرات :

$$د (د - ١) + د = د^٢ = ٠$$

ولها جذر مزدوج هو د = ٠ . فالمعادلة (٥ ـ ٥٢) لها حل بدلالة متسلسلة قوى ، وهو الذي وجدناه في المثال (٥ ـ ٢ ـ ٥) ، اي

$$ص_١ (س) = ل (س) = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{(ن!)^٢} (\frac{-س^٢}{٤})^ن$$

واخيراً ، كما في المثال (٥ ـ ٢ ـ ٥)

$$ص_٢ (س) = ل (س) \int \frac{د س}{س ل_٠^٢ (س)} \qquad \text{.................} \qquad (٥ - ٦٩)$$

المثال ٥ ـ ٣ ـ ٤ انظر المعادلة

$$ص'' + ص' + \frac{١}{٤ س^٢} ص = ٠ \qquad \text{.......................} \qquad (٥ - ٧٠)$$

هنا س أ (س) = س ، $س^٢$ ب (س) = $\frac{١}{٤}$ ، فيكون $أ_٠$ = ٠ ، $ب_٠$ = $\frac{١}{٤}$ ،
وكمعادلة المؤشرات :

$$د (د - ١) + \frac{١}{٤} = (د - \frac{١}{٢})^٢ = ٠$$

فيكون د = $\frac{١}{٢}$ جذراً مزدوجاً . نضع د = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة (٥ ـ ٦٢) فينتج :

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن \left[(ن + \frac{١}{٢})(ن - \frac{١}{٢}) + (ن + \frac{١}{٢}) س + \frac{١}{٤} س\right] س^{ن-٣/٢} = ٠$$

أي أن

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن ن^٢ س^{ن-٣/٢} + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن (ن + \frac{١}{٢}) س^{ن-١/٢} = ٠$$

(٥ ـ ٧١) . . . .

ولأن الحد الأول في المتسلسلة الأولى صفر، يمكن ان نعيد تسميتها بوضع ن = ك + ١ ثم جمع قوى س المتشابهة:

$$\sum_{ك=٠}^{\infty} \left[حـ_{ك+١} (ك + ١)^٢ + حـ_ك (ك + \frac{١}{٢})\right] س^{ك-١/٢} = ٠$$

(٥ ـ ٧٢) . . . .

وبمعادلة معاملات (٥ ـ ٧٢) للصفر نحصل على الصيغة الدورية:

$$حـ_{ك+١} (ك + ١)^٢ + حـ_ك (ك + \frac{١}{٢}) = ٠$$

فيكون $حـ_١ = -حـ_٠/٢$ ، $حـ_٢ = -حـ_١ (\frac{٣}{٢})/٢^٢ = ٣ حـ_٠/٢^٢ \times ٢^٢$ ، $حـ_٣ = -٥ حـ_٢/٢ \times ٣^٢ = -٣ \times ٥ حـ_٠/٢^٣ \times ٢^٢ \times ٣^٢$ ، $حـ_٤ = -٧ حـ_٣/٢ \times ٤^٢ = ٣ \times ٥ \times ٧ حـ_٠/٢^٤ \times ٢^٢ \times ٣^٢ \times ٤^٢$ ، . . .

فيكون

$$ص_١ (س) = س^{١/٢} (حـ_٠ - \frac{حـ_٠}{٢} س + \frac{٣ حـ_٠}{٢^٢ \times ٢^٢} س^٢$$

$$- \frac{3\times 5\ \text{ح}_{0}}{2^{3}\times 2^{2}\times 3^{2}}\,\text{س}^{3} + \frac{3\times 5\times 7\ \text{ح}_{0}}{2^{4}\times 2^{2}\times 3^{2}\times 4^{2}}\,\text{س}^{4} - \dots)$$

$$= \text{ح}_{0}\ \text{س}^{1/2}\left[1 - \left(\frac{\text{س}}{2}\right) + \frac{3}{2^{2}}\left(\frac{\text{س}}{2}\right)^{2} - \frac{3\times 5}{2^{2}\times 3^{2}}\left(\frac{\text{س}}{2}\right)^{3}\right.$$

$$\left. + \frac{3\times 5\times 7}{2^{2}\times 3^{2}\times 4^{2}}\left(\frac{\text{س}}{2}\right)^{4} - \dots\right]$$

$$= \text{س}^{\frac{1}{2}} \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \frac{(2\text{ن})!}{(\text{ن}!)^{3}}\left(-\frac{\text{س}}{4}\right)^{\text{ن}} \text{ ، } \text{س} > 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٥ - ٧٣)$$

ولايجاد نصف قطر الاقتراب في المعادلة (٥ ـ ٧٣) نستعمل اختبار النسبة :

$$\frac{1}{\text{نق}} = \lim_{\text{ن}\to\infty}\left|\frac{(\text{ن}!)^{3}\,4^{\text{ن}}\,(2\text{ن}+2)!}{(2\text{ن})!\,(\text{ن}+1)!^{3}\,4^{\text{ن}+1}}\right|$$

$$= \lim_{\text{ن}\to\infty}\left|\frac{(2\text{ن}+2)(2\text{ن}+1)}{4(\text{ن}+1)^{3}}\right| = \lim_{\text{ن}\to\infty}\left|\frac{2\text{ن}+1}{2(\text{ن}+1)^{2}}\right| = 0 .$$

فيكون نصف قطر الاقتراب نق = ∞ . نستطيع الآن ان نستعمل القاعدة (٣ ـ ١٦) للحصول على الحل الثاني المستقل خطياً او ان نستعمل الحل البديل المبين فيما يلي:

تذكر اننا عند استخراج القاعدة (٣ ـ ١٦)، جعلنا $\text{ص}_{2} = \text{ع}\ \text{ص}_{1}$ حيث ع تحقق المعادلة (٣ ـ ١٤). ففي هذه الحالة :

$$\frac{ع''}{ع'} = -2\,\frac{ص'_1}{ص_1} - 1 = \frac{-2\left(\frac{1}{2\sqrt{س}}\right)\left[1 - 3\left(\frac{س}{2}\right) + \frac{3\times5}{2^2}\left(\frac{س}{2}\right)^2 - \dots\right.}{\sqrt{س}\left[1 - \left(\frac{س}{2}\right) + \frac{3}{2^2}\left(\frac{س}{2}\right)^2 - \dots\right.} - 1 .$$

فبعـد ايجـاد الحـدود الأولى من خارج القسمـة بطـريقـة القسمة الطويلة (كما في قسمة حدودية على أخرى) نجد أن :

$$\frac{ع''}{ع'} = \frac{-1}{س}\left(1 - س + \frac{س^2}{4} - \dots\right) - 1 = \frac{-1}{س} - \frac{س}{4} + \dots$$

(٥ ـ ٧٤) . . . .

فنكامل الطرفين في (٥ ـ ٧٤) فينتج لي $ع' = -$ لي $س - \frac{س^2}{4} + \dots$

أي ان $ع' = \frac{1}{س}$ سا $\left(-\frac{س^2}{4} + \dots\right)$

$$= \frac{1}{س}\left[1 + \left(\frac{-س^2}{4} + \dots\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{-س^2}{4} + \dots\right)^2 + \dots\right].$$

(٥ ٧٥) . . . .

وبعد فك الأقواس ، كأي متسلسلة قوى في س ، نكامل مرة ثانية فنجد ان ع تتخذ الشكل :

$$ع = \text{لي}\ س - \frac{س^2}{8} + \dots .$$

فيكـون

$$ص_٢ = ع\, ص_١ = (لي\, س - \frac{س^٢}{٨} + \dots) . \sqrt{س}\, [١ - (\frac{س}{٢}) + \frac{٣}{٢^٢} (\frac{س}{٢})^٣ - \dots] .$$

$$= (لي\, س)\, ص_١ + \sqrt{س}\, (- \frac{س^٢}{٨} + \dots) ،$$

فالحل العام للمعادلة (٥ ـ ٧٠) يتخذ الشكل

$$ص\,(س) = \sqrt{س}\, \{ (أ + ب\, لي\, س)\, [١ - (\frac{س}{٢}) + \dots]$$

$$+ ب\, (- \frac{س^٢}{٨} + \dots) \} ،\quad س > ٠$$

والواقع انه صحيح دائماً في مثل هذه الحالة ان الحل العام يتخذ الشكل:

$$ص\,(س) = س^د\, (\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن\, س^ن + لي\, س \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^*_ن\, س^ن) ،\ س > ٠ .$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (٥ ـ ٧٦)$$

وللتأكد من ذلك نذكر انه بالقسمة الطويلة، يكون:

$$\frac{صَ_١}{ص_١} = \frac{(حـ_٠\, س^{د-١} + (د + ١)\, حـ_١\, سَ + \dots)}{حـ_٠\, سَ + حـ_١\, س^{د+١} + \dots} = \frac{د}{س} + \frac{حـ_١}{حـ_٠} + \dots)$$

$$\because\ حـ_٠ = ١ ، \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٥ ـ ٧٧)$$

ومن (٥ ـ ٦٣)،

$$\text{أ}(\text{س}) = \frac{\text{أ}_{\circ}}{\text{س}} + \text{أ}_{١} + \text{أ}_{٢}\,\text{س} + \ldots \qquad (٥ - ٧٨)$$

فنعوض (٥ ـ ٧٧) و (٥ ـ ٧٨) في المعادلة (٣ ـ ١٤) فينتج :

$$-\frac{\text{عً}}{\text{عَ}} = \frac{\text{أ}_{\circ} + ٢\text{د}}{\text{س}} + (\text{أ}_{١} + ٢\,\text{حـ}_{١}) + \ldots$$

ونكامل طرفي هذه المعادلة فينتج :

$$-\text{لي}\ \text{عَ} = (\text{أ}_{\circ} + ٢\text{د})\ \text{لي}\ \text{س} + (\text{أ}_{١} + ٢\,\text{حـ}_{١})\ \text{س} + \ldots \qquad (٥ - ٧٩)$$

ولأن المعادلة المؤشرة (٥ ـ ٦٦) لها الجذر المزدوج

$$\text{د} = \frac{١ - \text{أ}_{\circ}}{٢} ،$$

فينتج ان $\text{أ}_{\circ} + ٢\text{د} = ١$ ، واذن يمكن ان تكتب المعادلة (٥ ـ ٧٩) بالشكل :

$$\frac{١}{\text{عَ}} + \text{س}\ \text{سا}\ [(\text{أ}_{١} + ٢\,\text{حـ}_{١})\ \text{س} + \ldots]$$

اي ان

$$\text{عَ} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{سا}\ [-(\text{أ}_{١} + ٢\,\text{حـ}_{١})\ \text{س} + \ldots] \qquad (٥ - ٨٠)$$

فنفك العبارة الآتية الى متسلسلة بقوى س، ونكامل مرة أخرى فنحصل في النهاية على :

$ع(س) = لي\ س - (أ_١ + ٢ حـ_١)\ س + \ldots$

ولأن $ص_٢ = ع\ ص_١$ ، $ص_١$ قد اتخذت الشكل (٥ ـ ٥٩)، يتبين شكل الحل العام (٥ ـ ٧٦) بوضوح.

الحالة ٣. الفرق بين $د_١$ ، $د_٢$ عدد صحيح عير الصفر. افرض ان $د_١ > د_٢$. فيكون احد الحلينَّ للمعادلة (٥ ـ ٥٤) كما في الحالة ١ :

$ص_١ = س^{د١} (حـ_٠ + حـ_١ س + حـ_٢ س^٢ + \ldots)$ ، $حـ_٠ = ١$ ، $س > ٠$ ،

وفي بعض الاحيان لا يكون ممكناً تعيين $ص_٢$ بمثل ما صنعنا في الحالة ١ . لأن ذلك يعيد لنا صيغة $ص_١$ ذاتها (وفي هذه الحالة تتلاشى المعاملات الأولى $حـ^*_ى$ اي $د_١ - د_٢$). فعندما يحدث ذلك نمضي كما صنعنا في الحالة ٢ . والمثالان التاليان يوضحان هذين الاحتمالين.

المثال ٥ ـ ٣ ـ ٥ اليك معادلة بيزيل ذات الرتبة $\frac{١}{٢}$:

$$س^٢ صً + س صَ + [س^٢ - (\frac{١}{٢})^٢]\ ص = ٠$$

وهي بعد القسمة على $س^٢$:

$$صً + \frac{١}{س} صَ + (١ - \frac{١}{٤ س^٢})\ ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٨١)$$

وواضح ان $س = ٠$ نقطة منفردة نظامية، لأن $س\ أ(س) = ١$، $س^٢\ ب(س) = س^٢ - \frac{١}{٤}$ كلاهما تحليلي عند $س = ٠$. فالمعادلة المؤشرة للمعادلة (٥ ـ ٨١) هي

$$د\,(د - ١) + د - \frac{١}{٤} = د^{٢} - \frac{١}{٤} = ٠ ،$$

وجذراها $د_{١} = \frac{١}{٢}$ ، $د_{٢} = - \frac{١}{٢}$ والفرق بينهما ١ وعو عدد صحيح غير الصفر.

نعوض $د = د_{١}$ في (٥ ـ ٦٢) فينتج:

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن} \left[(ن + \frac{١}{٢})(ن - \frac{١}{٢}) + (ن + \frac{١}{٢})\right.$$

$$\left. + (س^{٢} - \frac{١}{٤})\right] س^{ن - \frac{٣}{٢}} = ٠$$

أي ان

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن} (ن^{٢} + ن)\, س^{ن-٣/٢} + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن}\, س^{ن+١/٢} = ٠ \quad \ldots \quad (٥ ـ ٨٢)$$

ولأن الحد الأول في المتسلسلة الأولى صفر، يمكن ان نعيد صياغة المتسلسلة (٥ ـ ٨٢) كما يلي:

$$\sum_{ك=-١}^{\infty} حـ_{ك+٢} (ك + ٢)(ك + ٣)\, س^{د+١/٢} + \sum_{ك=٠}^{\infty} حـ_{ك}\, س^{ك+١/٢}$$

$$= ٢\, حـ_{١}\, س^{-\frac{١}{٢}} + \sum_{ك=٠}^{\infty} [(ك + ٢)(ك + ٣)\, حـ_{ك+٢} + حـ_{ك}]\, س^{ك+١/٢} = ٠$$

فنساوي معاملات هذه المتسلسلة بالصفر فينتج $ح_1 = 0$، والعلاقة الدورية:

$$ح_{ك+2} = -\frac{ح_ك}{(ك+2)(ك+3)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5 - 83)$$

وواضح ان كل المعاملات ذات الرقوم السفلية الفردية اصفار، وان:

$$ح_2 = -\frac{ح_0}{!3} \text{ ، } ح_4 = -\frac{ح_2}{4 \times 5} = \frac{ح_0}{!5} \text{ ،}$$

$$ح_6 = -\frac{ح_4}{6 \times 7} = -\frac{ح_0}{!7} \text{ ، } \ldots \text{ ،}$$

فينتج الحل:

$$ص_1(س) = \sqrt{س}\,(ح_0 - \frac{ح_0}{!3}س^2 + \frac{ح_0}{!5}س^4 - \frac{ح_0}{!7}س^6 + \ldots)$$

$$= ح_0\sqrt{س}\,(1 - \frac{س^2}{!3} + \frac{س^4}{!5} - \frac{س^6}{!7} + \ldots)$$

ولأن $ح_0 = 1$ يكون

$$ص_1(س) = \frac{1}{\sqrt{س}}(س - \frac{س^3}{!3} + \frac{س^5}{!5} - \frac{س^7}{!7} + \ldots)$$

وبالمقارنة بالمعادلة (5 ـ 17) نجد ان $ص = (\text{جا } س) / \sqrt{س}$ ، $س > 0$.

والآن نعوض $د = د_2$ في المعادلة (5 ـ 62) فينتج:

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن [(ن - \frac{١}{٢}) (ن - \frac{٣}{٢}) + (ن - \frac{١}{٢}) + (س^٢ - \frac{١}{٤})] س^{ن-٥/٢}$$

$= ٠$

اي ان

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن ن (ن - ١) س^{ن-٥/٢} + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^{ن-١/٢} = ٠ .$$

ولأن الحدين الأوليين في المتسلسلة الأولى صفر نعيد الترقيم ونجمع قوى س المتشابهة فينتج :

$$\sum_{ك=٠}^{\infty} [(ك + ٢) (ك + ١) حـ_{ك+٢} + حـ_ك] س^{ك-١/٢}$$

فتنتج العلاقة الدورية .

$$حـ_{ك+٢} = \frac{- حـ_ك}{(ك + ١) (ك + ٢)} \quad \text{.....................} \quad (٥ ـ ٨٤)$$

ومن (٥ ـ ٨٤) ينتج :

$$حـ_٢ = - \frac{حـ_٠}{٢!} ، حـ_٤ = \frac{- حـ_٢}{٣ \times ٤} = \frac{حـ_٠}{٤!} ،$$

$$حـ_٦ = \frac{- حـ_٤}{٥ \times ٦} = - \frac{حـ_٠}{٦!} ، \dots\dots حـ_٣ = - \frac{حـ_١}{٣!} ، حـ_٥ = - \frac{حـ_٣}{٢ \times ٥}$$

$$= \frac{حـ_١}{٥!} ، حـ_٧ = - \frac{حـ_٥}{٦ \times ٧} = - \frac{حـ_١}{٧!} ، \dots$$

اي ان

$$ص_٢ (س) = س^{-\frac{١}{٢}} [حـ_٠ + حـ_١ س - حـ_٠ \frac{س^٢}{٢!} - حـ_١ \frac{س^٣}{٣!}$$

$$+ حـ_٠ \frac{س^٤}{٤!} + حـ_١ \frac{س^٥}{٥!} - \ldots]$$

$$= \frac{١}{\sqrt{س}} (حـ_٠ جتا س + حـ_١ حا س) ، \quad حـ_٠ = ١ . \quad \ldots\ldots \quad (٥ - ٨٥)$$

ولأن الحد الأخير في $ص_٢$ هو مضاعف $ص_١$ وما نريده هو حلان مستقلان خطياً، نجعل $حـ_١ = ٠$ فينتج

$$ص_٢ = (جتا س) / \sqrt{س} ، \quad س > ٠$$

ولأن $ص_١ / ص_٢$ = ظا س وهذا غير ثابت ينتج ان $ص_١$ ، $ص_٢$ مستقلان خطياً فالحل العام للمعادلة (٥ ـ ٨١) هو

$$ص = \frac{أ}{\sqrt{س}} جتا س + \frac{ب}{\sqrt{س}} جا س، \quad س > ٠ .$$

المثال ٥ ـ ٣ ـ ٦ خذ معادلة بيزيل ذات الرتبة ١ :

$$س^٢ صً + س صَ + (س^٢ - ١) ص = ٠$$

اي

$$صً + \frac{١}{س} صَ + (١ - \frac{١}{س^٢}) ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٨٦)$$

وهنا ايضاً س = ٠ نقطة منفردة نظامية في المعادلة (٥ ـ ٨٦) والمعادلة المؤشرة لهذه المعادلة:

د (د − ١) + د − ١ = د^٢ − ١ = ٠، وجذراها د١ = ١ ، د٢ = − ١

نضع د = ١ في (٥ ـ ٦٢) فينتج:

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن} [ن (ن + ١) + (ن + ١) + (س^{٢} - ١)] س^{ن-١} = ٠$$

اي ان

$$٣ حـ_{١} + \sum_{ك=٠}^{\infty} [حـ_{ك+٢} (ك + ٢) (ك + ٤) + حـ_{ك}] س^{ك+١} = ٠ \quad . \quad (٥ - ٨٧)$$

فنعادل معاملات (٥ ـ ٨٧) بالصفر فينتج $حـ_{١}$ = ٠ والعلاقة الدورية:

$$حـ_{ك+٢} = - \frac{حـ_{ك}}{(ك + ٢) (ك + ٤)}$$

فكل المعاملات ذات الرقوم السفلية الفردية اصفار، وايضاً:

$$حـ_{٢} = - \frac{حـ_{٠}}{٢ \times ٤} ، \quad حـ_{٤} = \frac{- حـ_{٢}}{٤ \times ٦} = \frac{حـ_{٠}}{٢ \times ٤^{٢} \times ٦} ،$$

$$حـ_{٦} = - \frac{حـ_{٤}}{٦ \times ٨} = - \frac{حـ_{٠}}{٢ \times ٤^{٢} \times ٦^{٢} \times ٨} ، \quad . \ . \ . \ .$$

فاذن

$$ص_1(س) = س \left(حـ_{\cdot} - \frac{حـ_{\cdot}}{2 \times 4} س^2 + \frac{حـ_{\cdot}}{2 \times 4^2 \times 6} س^4 \right.$$

$$\left. - \frac{حـ_{\cdot}}{2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8} س^6 + \ldots \right)$$

$$= س \left(1 - \frac{1}{!1\ !2} \left(\frac{س}{2}\right)^2 + \frac{1}{!2\ !3} \left(\frac{س}{2}\right)^4 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{!3\ !4} \left(\frac{س}{2}\right)^6 + \ldots \right) \qquad \text{(٥ ـ ٨٨)}$$

فالمتسلسلة

$$1 - \frac{ت}{!1\ !2} + \frac{ت^2}{!2\ !3} - \frac{ت^3}{!3\ !4} + \ldots + \frac{ت^ن}{!ن\ !(ن+1)} + \ldots$$

نصف قطر تقاربها نق = ∞ لأن اختبار النسبة يعطي

$$\frac{1}{نق} = \lim_{ن \leftarrow \infty} \left| \frac{1/(ن+1)!\ (ن+2)!}{1/ن!\ (ن+1)!} \right|$$

$$= \lim_{ن \leftarrow \infty} \frac{ن!\ (ن+1)!}{(ن+1)!\ (ن+2)!} = \lim_{ن \leftarrow \infty} \frac{1}{(ن+1)\ (ن+2)} = 0$$

فالمعادلة (٥ ـ ٨٨) تصح لكل قيم ت = $\left(\frac{س}{2}\right)^2$ ولذا فهي تصح لكل قيم س .

والآن سنبين ان هذه الطريقة لا تفيد في $د_2 = -1$ اي الجذر الثاني للمعادلة المؤشرة

ضع د = −١ في (٥ ـ ٦٢) ينتج :

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن \,[(ن-١)(ن-٢) + (ن-١) + س^٢ - ١]\, س^{ن-٣} = ٠$$

اي ان

$$-حـ_١ س^{-٢} + حـ_٠ س^{-١} + \sum_{ك=٠}^{\infty} [حـ_{ك+٢} (ك+١)(ك+٣) + حـ_{ك+١}]\, س^ك = ٠.$$

فاذا ساوينا كل المعاملات في هذه المتسلسلة بالصفر، نجد ان $حـ_٠ = ٠$ وهذا يناقض افتراضنا ان $حـ_٠ = ١$ الذي فرضناه في المعادلة (٥ ـ ٥٩). فطريقة الحالة ١ تفشل هنا. ولكن اذا استعملنا طريقة الحالة ٢ نحصل من المعادلة (٥ ـ ٧٩) على:

$$-لي\,ع = ٣\, لي\, س + \frac{٢\, حـ_١}{حـ_٠} + \ldots ، \quad حـ_٠ = ١ ،$$

وذلك لأن $س\, أ(س) = ١ = أ_٠$ ، $د = د_١ = ١$ ، فيكون:

$$ع = س^{-٣}\, سا\,(-٢\, حـ_١ س + \ldots) ،$$

فنفك العبارة الأسية حسب قوى س، فينتج:

$$ع' = -\frac{١}{س^٣} - ٢\, حـ_١ \frac{١}{س^٢} + \frac{ك_{-١}}{س} + ك_٠ + ك_١ س + \ldots .$$

ونكامل هذه المتسلسلة حداً حداً فينتج:

$$ع = -\frac{١}{٢س^٢} + ٢\, حـ_١ \frac{١}{س} + ك_{-١}\, لي\, س + ك_٠ س + \ldots$$

فيكون

$$\text{ص}_{٢} = \text{ع ص}_{١} = \left(\frac{-١}{٢\text{س}^{٢}} + ٢\text{ح}_{١} \frac{١}{\text{س}} + \text{ك}_{-١} \text{ لي س} + \text{ك}_{.} \text{ س} + \ldots \right) \times$$

$$\left\{ \text{س} \left[١ - \frac{(\text{س}/٢)^{٢}}{١!\,٢!} + \frac{(\text{س}/٢)^{٤}}{٢!\,٣!} - \ldots \right] \right\}$$

$$= \text{ك}_{-١} (\text{لي س}) \text{ ص}_{١} + \left(\frac{-١}{٢\text{س}^{٢}} + ٢\text{ح}_{١} \frac{١}{\text{س}} + \text{ك}_{.} \text{ س} + \ldots \right)$$

$$\times \left\{ \text{س} \left[١ - \frac{(\text{س}/٢)^{٢}}{١!\,٢!} + \frac{(\text{س}/٢)^{٤}}{٢!\,٣!} - \ldots \right] \right\}$$

$$= \text{ك}_{-١} (\text{لي س}) \text{ ص}_{١} + \text{س}^{-١} \left(-\frac{١}{٢} + ٢\text{ح}_{١} \text{ س} + \ldots \right)، \text{ س} > ٠$$

. . . . (٥ ـ ٨٩)

وعموماً اذا فشلت الحالة ١ في الاستفادة من $\text{د}_{٢}$ فان الطريقة السابقة تعطي الحل:

$$\text{ص}_{٥} = \text{ك}_{-١} (\text{لي س}) \text{ ص}_{١} + \text{س}^{\text{د}_{٢}} (\text{ك}_{.} + \text{ك}_{١} \text{ س} + \ldots)، \quad \text{س} > ٠،$$

حيث $\text{ك}_{-١} \neq ٠$

والنظرية التالية تجمع كل الحقائق التي درسناها في هذا البند:

النظرية ٥ ـ ٣ اذا كان س = ٠ نقطة منفردة نظامية في المعادلة التفاضلية

$$\text{ص}'' + \text{أ}(\text{س}) \text{ ص}' + \text{ب}(\text{س}) \text{ ص} = ٠، \quad \text{س} \neq ٠ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ٩٠)$$

وكان $\text{د}_{١}$ ، $\text{د}_{٢}$ جذري معادلة المؤشرات

$$د(د - ١) + أ_٠ د + ب_٠ = ٠$$

حيث $أ_٠$ ، $ب_٠$ كما في متسلسلتي القوى:

$$س أ(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + \ldots$$

$$س^٢ ب(س) = ب_٠ + ب_١ س + ب_٢ س^٢ + \ldots$$

فالمعادلة (٥ ـ ٩٠) لها حلان $ص_١$ ، $ص_٢$ مستقلان خطياً تعتمد صيغتهما على $د_١$ ، $د_٢$ كما يلي:

الحالة ١ اذا كان الفرق بين $د_١$ ، $د_٢$ ليس عدداً صحيحاً يكون:

$$ص_١(س) = |س|^{د_١} (\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^ن)، حـ_٠ = ١ ،$$

$$ص_٢(س) = |س|^{د_٢} (\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^*_ن س^ن)، حـ^*_٠ = ١ .$$

(نأخذ قيمة س المطلقة لتجنب الاشارة الى ان س > ٠.)

الحالة ٢ اذا كان $د_١ = د_٢ = د$ يكون

$$ص_١(س) = |س|^{د} (\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^ن)، حـ_٠ = ١ ،$$

$$ص_٢(س) = |س|^{د} (\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^*_ن س^ن) + ص_١(س) لي |س| .$$

الحالة ٣ اذا كان $د_١$ ، $د_٢$ عدداً صحيحاً موجباً يكون

$$ص_١(س) = |س|^{د_١} (\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن س^ن)، حـ_٠ = ١ ،$$

ص$_٢$ (س) = | س |^{٢د} ($\sum_{ن=٠}^{\infty}$ حـ$^*_ن$ س^ن) + حـ$^*_{-١}$ ص$_١$ (س) لي | س | ، حـ$^*_.$ = ١ ،

حـ$^*_{-١}$ قد يساوي الصفر.

واذا كان فك س أ (س)، س^٢ ب (س) الى متسلسلات بقوى س يصح لكل |س | > نق، فالحلان ص$_١$ ، ص$_٢$ يصحان لكل ٠ > س > نق. وبرهان ذلك متروك للتمرين (انظر التمرين ٢٨).

التمارين ٥ ـ ٣

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية في التمارين ١ الى ٢٢ بطريقة فروبينيوس

١ . $ص'' + \frac{١}{٢س} ص' + \frac{١}{٤س} ص = ٠$

٢ . $ص'' + \frac{٢ (١ - ٢س)}{س (١ - س)} ص' - \frac{٢}{س (١ - س)} ص = ٠$

٣ . $ص'' + \frac{٦}{س} ص' + (\frac{٦}{س^٢} - ١) ص = ٠$

٤ . $ص'' + \frac{٤}{س} ص' + (١ + \frac{٢}{س^٢}) ص = ٠$

٥ . $ص'' + \frac{٣}{س} ص' + ٤ س^٢ ص = ٠$

٦. (س − ١) صً − $\left(\frac{\text{٤ س}^{٢} - \text{٣س} + ١}{\text{٢س}}\right)$ صَ + $\left(\frac{\text{٢س}^{٢} - \text{س} + ٢}{\text{٢س}}\right)$ ص = ٠

٧. صً + $\frac{٢}{\text{س}}$ صَ − $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$ ص = ٠

٨. ٤ س صً + ٢ صَ + ص = ٠

٩. س صً + ٢ صَ + س ص = ٠

١٠. س صً − صَ + ٤ س^{٣} ص = ٠

١١. س صً + (١ − ٢س) صَ − (١ − س) ص = ٠

١٢. س (س + ١)^{٢} صً + (١ − س^{٢}) صَ − (١ − س) ص = ٠

١٣. صً − ٢ صَ + $\left(١ + \frac{١}{\text{٤ س}^{٢}}\right)$ ص = ٠

١٤. **معادلة اويلر** س^{٢} صً + أ س صَ + ب ص = ٠ ، أ ، ب ثابتان

١٥. أ س (س − ١) صً − (١ − ٣س) صَ + ص = ٠

١٦. س^{٢} (س^{٢} − ١) صً − س (س^{٢} + ١) صَ + (س^{٢} + ١) ص = ٠

١٧. صً + $\frac{\text{صَ}}{\text{س}}$ − ص = ٠

١٨. ٢ س صً − (س − ٣) صَ − ص = ٠

١٩ . $ص'' + \frac{س + ١}{٢ س} ص' + \frac{٣}{٢ س} ص = ٠$

٢٠ . $ص'' + \frac{١}{٢ س} ص' - \frac{س + ١}{٢ س^{٢}} ص = ٠$

٢١ . $س^{٢} ص'' + س (س - ١) ص' - (س - ١) ص = ٠$

٢٢ . $س ص'' - (٣ + س) ص' + ٢ ص = ٠$

٢٣ . برهن باستعمال المعادلة (٣ ـ ١٤) ان المعادلة (٥ ـ ٦٩) تتخذ الصيغة :

$ص_{٢} (س) = J_{٠} (س) لي س$

$+ \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن+١}}{٢^{٢ن} (ن!)^{٢}} (١ + \frac{١}{٢} + \ldots + \frac{١}{ن}) س^{٢ن} ، \quad س > ٠ .$

٢٤ . هل يمكن ان يحل التمرين ٥ ـ ٢ ـ ٢١ بطريقة فروبينيوس ؟

٢٥ . انظر في المعادله التفاضلية

$ص'' - \frac{١}{س^{٢}} ص' + \frac{١}{س^{٣}} ص = ٠$

أ) بين ان س = ٠ نقطة منفردة شاذة في هذه المعادلة .

ب) استعمل الحقيقة ان $ص_{١}$ = س حل لها أوجد لها حلاً آخر مستقلاً لها .

جـ) بين ان $ص_{٢}$ لا يمكن ان يعبر عنه بمتسلسلة من النوع (٥ ـ ٥٩) . اذن فهذا

الحل لا يمكن ايجاده بطريقة فروبينيوس.

٢٦ . في المعادلـة

$$س^{٢} صً + (٤س - ١) صَ + ٢ ص = ٠$$

النقطة س = ٠ نقطة منفردة شاذة:

أ) على فرض ان (٥ ـ ٥٩) قد طبقت على هذه المعـــادلـة بين ان ر = ٠ وان الحــل المناظر لذلك حسب طريقة فروبينيوس هو

$$ص = \sum_{ن=٠}^{\infty} (ن + ١)!\, س^{ن}.$$

ب) أثبت ان هذه المتسلسلة نصف قطـــر اقـــترابهـا نق = ٠ لذا فمـع ان متسلسلة فروبينيوس قد تحقق المعادلة التفاضلية شكليا الا انها تكون حلاً صحيحاً عند اي نقطة منفردة شاذة.

٢٧ . * على فرض ان $س_{٠}$ = ٠ وان متسلسلتي مكلورن

$$أ(س) = \sum_{ن=٠}^{\infty} أ_{ن} س^{ن}،\quad ب(س) = \sum_{ن=٠}^{\infty} ب_{ن} س^{ن}$$

تصحان لكل | س | < نق.

أ) بين انه اذا كانت (٥ ـ ٥٤) لها حل بشكل متسلسلة القوى

$$ص(س) = \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن} س^{ن}،\quad حـ_{٠} = ١،$$

فإن $حـ_{ن}$ يحقق الصيغة الدورية

$$(\text{ن} + ١)(\text{ن} + ٢)\,\text{حـ}_{\text{ن}+٢} = -\sum_{\text{ك}=٠}^{\text{ن}} \left[(\text{ك} + ١)\,\text{أ}_{\text{ن}-\text{ك}}\,\text{حـ}_{\text{ك}+١} + \text{ب}_{\text{ن}-\text{ك}}\,\text{حـ}_{\text{ك}}\right].$$

ب) استعمل الصيغة (٥ ـ ٧) لاختبار النسبة في ايجاد نصف قطر التقارب من اجل ايضاح انه لكل ر حيث ٠ < ر < نق هنالك ثابت مـ > ٠ حيث

$$(\text{ن} + ١)(\text{ن} + ٢)\,|\text{حـ}_{\text{ن}+٢}| \leqslant \frac{\text{مـ}}{\text{ر}^{\text{ن}}} \sum_{\text{ك}=٠}^{\infty} \left[(\text{ك} + ١)\,|\text{حـ}_{\text{ك}+١}| + |\text{حـ}_{\text{ك}}|\right] \text{ر}^{\text{ك}} + \text{مـ}\,|\text{حـ}_{\text{ن}+\text{ر}}|\,\text{ر}.$$

حـ) استعمل اختبار النسبة لاثبات ان المتسلسلة

$$\sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} |\text{حـ}_{\text{ن}}|\,\text{س}^{\text{ن}}$$

تتقارب لكل | س | < ر. اذن باستعمال اختبار المقارنة للمتسلسلات ينتج ان ص (س) تتقارب لكل | س | < ر. ولأن ر عدد عشوائي ينتج ان المتسلسلة التي تمثل الحل تصح لكل | س | < نق .

٢٨ . ** عدِّل منطق التمرين ٢٧ لتبرير الحقيقة الأخيرة في النظرية (٥ ـ ٣).

٥ ـ ٤ اقترانات بيزيل

المعادلة

$$\text{س}^٢\,\text{صً} + \text{س}\,\text{صَ} + (\text{س}^٢ - \text{ل}^٢)\,\text{ص} = ٠ \quad \text{،} \qquad (٥ ـ ٩١)$$

وهي المعروفة باسم **معادلة بيزيل ذات الرتبة ل** ($\geqslant$ ٠) هي واحدة من اهم المعادلات التفاضلية في الرياضيات التطبيقية. وقد كان اول من درسها يعقوب برنولي (١٦٥٤ ـ

١٧٠٥) وذلك بصدد دراسته لتأرجح سلسلة معلقة، ثم درسها فيما بعد بيزيل (١٧٨٤ - ١٨٤٦) بصدد دراسته لحركة الكواكب السيارة. ومنذ ذلك الوقت صارت اقترانات بيزيل تستعمل في بحوث المرونة وحركة السوائل والغازات ونظرية الكمون وانتشار الموجات.

ويذكر القارىء اننا في البند (٥ - ٣) وجدنا حلول معادلة بيزيل حينما ل = ٠، $\frac{1}{2}$ ، ١ (انظر الأمثلة ٥ - ٣ - ٣ ، ٥ - ٣ - ٥ ، ٥ - ٣ - ٦). وفي كل واحدة من هذه كانت طريقة فروبينيوس وسيلة هامة في الحل. ولذا نتوقع نجاحها هنا ايضاً. فلنفرض ان لمعادلة بيزيل ذات الرتبة ل حلاً بالصيغة

$$\text{ص}(\text{س}) = |\text{س}|^{\text{د}} \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ن}}\, \text{س}^{\text{ن}} ،\quad \text{س} \neq 0 ،\quad \text{حـ}_0 \neq 0 ، \quad \ldots \quad (٥ - ٩٢)$$

فنعوض (٥ - ٩٢) في (٥ - ٩١) وينتج:

$$|\text{س}|^{\text{د}} \Big[\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ن}} (\text{د}+\text{ن})(\text{د}+\text{ن}-1)\, \text{س}^{\text{ن}} + \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ن}} (\text{د}+\text{ن})\, \text{س}^{\text{ن}} + (\text{س}^2 - \text{ل}^2) \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ن}}\, \text{س}^{\text{ن}} \Big] = 0$$

أي ان

$$|\text{س}|^{\text{د}} \Big[\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ن}} [(\text{د}+\text{ن})^2 - \text{ل}^2]\, \text{س}^{\text{ن}} + \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ن}}\, \text{س}^{\text{ن}+2} \Big] = 0 .$$

(٥ - ٩٣) ....

فمعادلة المؤشرات هنا هي $\text{د}^2 - \text{ل}^2 = 0$ ، وجذراها $\text{د}_1 = \text{ل}\ (\geqslant 0)$ ، $\text{د}_2 = -\text{ل}$. ولكل ل $\geqslant$ ٠ نجد حلاً $\text{ص}_1(\text{س})$ للمعادلة (٥ - ٩١) بطريقة فروبينيوس. فاذا

وضعنا د = ل ينتج

$$\text{س}^{\text{ل}}\Big[(١ + ٢\text{ل})\,\text{حـ}_١\,\text{س} + \sum_{\text{ن}=٢}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ن}}\,\text{ن}\,(\text{ن} + ٢\text{ل})\,\text{س}^{\text{ن}} + \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \text{حـ}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}+٢}\Big] = ٠$$

اي ان

$$\text{س}^{\text{ل}}\Big[(١ + ٢\text{ل})\,\text{حـ}_١\,\text{س} + \sum_{\text{ك}=٠}^{\infty}\big[\text{حـ}_{\text{ك}+٢}\,(\text{ك} + ٢)\,(\text{ك} + ٢ + ٢\text{ل}) + \text{حـ}_{\text{ك}}\big]\,\text{س}^{\text{ك}+٢}\Big] = ٠ \qquad (٥ - ٩٤)$$

ولأن مجموع المتسلسلة في (٥ ـ ٩٤) صفر فان معاملاتها كلها اصفار. من ذلك ينتج $\text{حـ}_١ = ٠$ ، والعلاقة الدورية

$$\text{حـ}_{\text{ك}+٢} = \frac{-\,\text{حـ}_{\text{ك}}}{(\text{ك} + ٢)\,(\text{ك} + ٢ + ٢\text{ل})} \qquad (٥ - ٩٥)$$

اذن فكل المعاملات ذات الأرقام السفلية الفردية $\text{حـ}_{٢\text{ى}+١} = ٠$ لانها كلها، حسب (٥ ـ ٩٥) مضاعفات $\text{حـ}_١$ نجعل ك = ٢ى فنجد ان المعاملات ذات الارقام السفلية الزوجية تحقق المعادلة

$$\text{حـ}_{٢(\text{ى}+١)} = \frac{-\,\text{حـ}_{٢\text{ى}}}{٢^٢\,(\text{ى} + ١)\,(\text{ل} + \text{ي} + ١)}$$

وهذه تفضي الى ما يلي:

$$ح_2 = \frac{-ح_0}{2^2(ل+1)} \quad ، ح_4 = \frac{-ح_2}{2^2 \times 2 (ل+2)} = \frac{ح_0}{2^4 \times 2! (ل+1)(ل+2)}$$

$$ح_6 = \frac{-ح_4}{2^2 \times 3 (ل+3)} = \frac{-ح_0}{2^6 + 3! (ل+1)(ل+2)(ل+3)} \quad ، \ldots$$

فتصير المعادلة (٥ ـ ٩٢) كما يلي:

$$ص_1(س) = |س|^ل [ح_0 - \frac{ح_0}{2^2(ل+1)} س^2$$

$$+ \frac{ح_0}{2^4 \times 2 (ل+1)(ل+2)} س^4 - \ldots]$$

$$= ح_0 |س|^ل \sum_{ن=0}^{\infty} (-1)^ن \frac{س^{2ن}}{2^{2ن} ن! (ل+1)(ل+2) \ldots (ل+ن)}$$

(٥ ـ ٩٦) ....

ولكي نكتب المعادلة (٥ ـ ٩٦) بشكل أوجز نتذكر اقتران جاما (انظر التمرين ١ ـ ٣ ـ ١٤) ونوسعه حتى يشمل كل ل > -١:،

$$\Gamma(ل+1) = \int_0^{\infty} e^{-ن} \cdot ن^ل \, د ن$$ (٥ ـ ٩٧) ....

ونكامل Γ (ل + ١) بالأجزاء، فينتج:

$$\Gamma(ل+1) = \int_0^{\infty} e^{-ن} \cdot ن^ل \, د ن = -e^{-ن} ن^ل \Big|_0^{\infty} + ل \int_0^{\infty} e^{-ن} ن^{ل-1} \, د ن$$

والحد الأول في الطرف الأيسر صفر، والحد الثاني تكامله Γ (ل). فيكون

$$\Gamma(ل + ١) = ل\ \Gamma(ل) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٩٨)$$

ولأن

$$\Gamma(١) = \int_{٠}^{\infty} e^{-ن}\, د ن = - e^{ن} \Big|_{٠}^{\infty} = ١ ،$$

ينتج ان $\Gamma(٢) = \Gamma(١) = ١!$ ، $\Gamma(٣) = ٢\ \Gamma(٢) = ٢!$ ، . . . وعموماً $\Gamma(ن + ١) = ن!$. فاقتران جاما اذن هو اقتران العاملي موسعاً حتى يشمل كل $ل > -١$ وفي (٥ ـ ٩٦) نضع عادة $حـ_٠ = [٢^{ل}\ \Gamma(ل + ١)]^{-١}$ فتصير (٥ ـ ٩٦) كما يلي:

$$J_{ل}(س) = \left|\frac{س}{٢}\right|^{ل} \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{(س/٢)^{٢ن}}{ن!\ \Gamma(ل + ن + ١)} ، \quad س \neq ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ٩٩)$$

ويسمى هذا دالة (اقتران) بيزيل من النوع الأول والرتبة ل اذن فان $J_{ل}(س)$ هو اول حل للمعادلة (٥ ـ ٩١) تضمنه النظرية ٥ ـ ٣.

ولأيجاد الحل الثاني الذي تتحدث عنه النظرية (٥ ـ ٣)، ننظر في الفرق $د_١ - د_٢ = ٢ل$:

فحسب النظرية (٥ ـ ٣) ـ الحالة ١ ـ اذا كانت ل ليست من مضاعفات $\frac{١}{٢}$ يمكن ان نطبق طريقة فروبينيوس ثانية مع د = -ل لايجاد الحل الثاني. ومن نتائج المثالين ٥ ـ ٣ ـ ٥ و ٥ ـ ٣ ـ ٦ يظهر ان احتمال الحصول على حدود فيها لي | س | هو عندما يكون ل عدداً صحيحاً. فلنضع د = -ل في المعادلة (٥ ـ ٩٣) مع اعتبار ان ل ليست عدداً صحيحاً. فينتج :

$$| س |^{-ل} [(١ - ٢ل) حـ_١ س + \sum_{ك=٠}^{\infty} [حـ_{ك+٢} (ك + ٢) (ك + ٢ - ٢ل) + حـ_ك] س^{ك+٢}] = ٠ \quad \ldots\ldots (٥ - ١٠٠)$$

فبمساواة عوامل هذه المتسلسلة للصفر ينتج ان $(١ - ٢ل) حـ_١ = ٠$ وهذا يعني ان $حـ_١ = ٠$. الا اذا كان $ل = \frac{١}{٢}$ (وهــذه حالـة ناقشنـاهـا في المثـال ٥ ـ ٣ ـ ٥) . وتنتج العلاقة الدورية :

$$حـ_{ك+٢} = \frac{- حـ_ك}{(ك + ٢) (ك + ٢ - ٢ل)} \quad \ldots\ldots (٥ - ١٠١)$$

نلاحظ انه اذا كان ل من مضاعفات $\frac{١}{٢}$ فان الحد $(ك + ٢ - ٢ل)$ يصبح صفراً عنـدمـا يتخـذ ك قيمة ما صحيحة ولأن $حـ_١ = ٠$ فان (٥ ـ ١٠١) يتضمن ان كل المعـامـلات $حـ_ك$ ذات الأرقـام السفلية الفردية اصفار. فنستعمل (٥ ـ ١٠١) لحساب المعاملات ذات الأرقام السفلية الزوجية . فنجد :

$$حـ_٢ = \frac{- حـ_٠}{٢^٢ (١ - ل)} ، حـ_٤ = \frac{- حـ_٢}{٢^٢ \times ٢(٢ - ل)} = \frac{حـ_٠}{٢^٤ \times ٢! (١ - ل)(٢ - ل)} ،$$

. . . .

فالحل الثاني

$$J_{-ل}(س) = \left| \frac{س}{٢} \right|^{-ل} \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^ن \frac{(س/٢)^{٢ن}}{ن! \Gamma (ن - ل + ١)} . \quad (٥ - ١٠٢)$$

فلكي نبين ان (٥ ـ ٩٩) و (٥ ـ ١٠٢) مستقلان خطياً، نحصل بالقسمة الطويلة على :

$$\frac{J_{\text{ل}}(\text{س})}{J_{-\text{ل}}(\text{س})} = \frac{|\text{س}/٢|^{\text{ل}}/\Gamma(\text{ل}+١) - |\text{س}/٢|^{\text{ل}+٢}/٢!\,\Gamma(\text{ل}+٣) + \dots}{|\text{س}/٢|^{-\text{ل}}/\Gamma(١-\text{ل}) - |\text{س}/٢|^{٢-\text{ل}}/٢!\,\Gamma(٣-\text{ل}) + \dots}$$

$$= \frac{|\text{س}/٢|^{٢\text{ل}}}{\Gamma(١+\text{ل})/\Gamma(١-\text{ل})} + \frac{٣\text{ل}\,|\text{س}/٢|^{٢\text{ل}+٢}}{\Gamma(٣+\text{ل})/\Gamma(١-\text{ل})}$$

وواضح ان هذا ليس اقتراناً ثابتاً .

ونصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} (-١)^{\text{ن}} \frac{\text{د}^{\text{ن}}}{\text{ن}!\,\Gamma(\text{ن}\pm\text{ل}+١)}$$

يسهل ايجاده باختبار النسبة . فان

$$\frac{١}{\text{نق}} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ن}!\,\Gamma(\text{ن}\pm\text{ل}+١)}{(\text{ن}+١)!\,\Gamma(\text{ن}\pm\text{ل}-٢)} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{١}{(\text{ن}+١)(\text{ن}\pm\text{ل}+١)} = ٠$$

وهذا يعني ان نق = ∞ . فاذن (٥ ـ ٩٩) ، (٥ ـ ١٠٢) متقاربتان لجميع القيم . فقد برهنا على النظرية التالية :

النظرية ٥ ـ ٤ : اذا كان ل ليس عدداً صحيحاً يكون

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{أ}\,J_{\text{ل}}(\text{س}) + \text{ب}\,J_{-\text{س}}(\text{س})$$

هو الحل العام لمعادلة بيزيل لكل قيم س ≠ ٠

واذا كان ل عددا صحيحاً فان الحد (ك + ٢ - ٢ل) في العلاقة الدورية (٥ ـ ١٠١) يصبح صفراً اذا كان ك عدداً ما صحيحاً = ٢م. ولأن

$$(ك + ٢) (ك + ٢ - ل) حـ_{ك+٢} = - حـ_{ك} \quad .... \quad (٥ ـ ١٠٣)$$

فإن $حـ_{٢م}$ يكون صفراً، وبتطبيق المعادلة (٥ ـ ١٠٣) بالتعاقب ينتج ان $حـ_{٢م-٢}$ = $حـ_{٢م-٤}$ = . . . = $حـ_{٢}$ = $حـ_{٠}$ = ٠. وهذا يخالف الشكل (٥ ـ ٩٢) الذي فرضناه لهذا الحل.

اذن فطريقة فربينيوس لا يمكن استعمالها اذا كان ل عدداً صحيحاً موجباً. وحسب النظرية ٥ ـ ٣ فان الحل الثاني المستقل خطياً للمعادلة (٥ ـ ٩١) يجب ان يكون بالشكل:

$$ص_{٢} (س) = J_{ل} (س) لي |س| + |س|^{-ل} \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^{*}_{ن} س^{ن}،\ حـ^{*}_{٠} \neq ٠$$
$$.......................... \quad (٥ ـ ١٠٤)$$

وعلينا الآن ان نحسب المعاملات $حـ^{*}_{ن}$. ونجري ذلك بتعويض (٥ ـ ١٠٤) مع س > ٠ بدل ص في المعادلة (٥ ـ ٩١). فلأن

$$صَ_{٢} = \bar{J}_{ل} لي س + \frac{١}{س} J_{ل} + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^{*}_{ن} (ن - ل) س^{ن-ل-١}،$$

$$صً = \bar{\bar{J}}_{ل} لي س + \frac{٢}{س} \bar{J}_{ل} - \frac{١}{س^{٢}} J_{ل} +$$
$$\sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^{*}_{ن} (ن - ل) (ن - ل - ١) س^{ن-ل-٢}$$

نحصل على المعادلة

$$٢س \bar{J}_{ل} + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^{*}_{ن} \; ن (ن - ٢ل) س^{ن-ل} + \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ^{*}_{ن} \; س^{ن-ل+٢} = ٠$$
. . . . (٥ ـ ١٠٥)

[يـزول الحـد اللوغـرثمي لأن $J_{ل}$ حل للمعادلة (٥ ـ ٩١) فالحدان اللذان يحويان $J_{ل}$ يمحو أحدهما الآخر]. نفاضل (٥ ـ ٩٩) فينتج

$$\bar{J}_{ل}(س) = \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{(ن + ل/٢) (س/٢)^{٢ن+ل-١}}{ن! \; (ل + ن)!}$$

لأن Γ (ل + ن + ١) = (ن + ل)!. نعـوض هذا المفكـوك بدل $\bar{J}_{ل}$ في (٥ ـ ١٠٥) ونخرج العامل المشترك $س^{-ل}$ ، فينتج بعد التعديل الجبري :

$$س^{-ل} \Big[\sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{(٢ن + ل) \; س^{٢ن+٢ل}}{٢^{٢ن+ل-١} \; ن! \; (ل + ن)!} + حـ^{*}_{١} (١ - ٢ل) س$$
$$+ \sum_{ن=٢}^{\infty} [حـ^{*}_{ن} \; ن (ن - ٢ل) + حـ^{*}_{ن-٢}] \; س^{ن}] = ٠ \quad . . . . . \quad (٥ ـ ١٠٦)$$

لنبين اولاً ان كل المعاملات $د^{*}_{ن}$ ذات الرقوم السفلية الفردية اصفار. فواضح ان $حـ^{*}_{١} = ٠$ لأن ل عدد صحيـح، والمتسلسلة الأولى لا تحوي قوى س الفـرديـة. فيبقى الحد الأخير في (٥ ـ ١٠٦)، فنجعل فيه ن = ٢ك + ١ (أي فردياً) فنحصل على العلاقة الدورية :

$$(٢ك + ١) (٢ك + ١ - ٢ل) حـ^{*}_{٢ك+١} = - حـ^{*}_{٢ك-١}$$

فجميع الحدود $حـ^{*}_{٢ك+١}$ أصفار. اما الحدود ذات الارقام الزوجية : فمن (٥ ـ ١٠٦) نحصل على المتطابقات التالية بالتتابع :

$$٢ (٢ - ٢ل) حـ^*_٢ + حـ^*_. = ٠ ،$$

$$٤ (٤ - ٢ل) حـ^*_٤ + حـ^*_٢ = ٠ ،$$

.

. ... (٥ ـ ١٠٧)

.

$$(٢ل - ٢) ٢ حـ^*_{٢ل-٢} + حـ^*_{٢ل-٤} = ٠ .$$

اما قوى س الزوجية، حتى القوة ٢ل على الأقل، فلدينا العلاقة الدورية:

$$\frac{(-١)^ن (٢ن + ل)}{٢^{٢ن+ل-١} ن! (ل + ن)!} + حـ^*_{٢ن+٢ل} (٢ن) (٢ن + ٢ل) + حـ^*_{٢ن+٢ل-٢} = ٠ ،$$

ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... . (٥ ـ ١٠٨)

فيكون

$$حـ^*_٢ = \frac{حـ^*_.}{٢^٢ (ل - ١)} ، حـ^*_٤ = \frac{حـ^*_.}{٢^٤ ٢! (ل - ٢)(ل - ١)} ، .... ،$$

$$حـ^*_{٢ل-٢} = \frac{حـ^*_.}{٢^{٢ل-٢} (ل - ١)!^٢}$$

ثم من (٥ ـ ١٠٨):

$$\frac{ل}{٢^{ل-١} ل!} + حـ^*_{٢ل-٢} = ٠ ،$$

$$\frac{-(ل + ٢)}{٢^{ل+١} (ل + ١)!} + حـ^*_{٢ل+٢} (٤ل + ٤) + حـ^*_{٢ل} = ٠ ، \text{الخ}$$

فيكون

$$\frac{\text{حـ}_{.}^{*}}{٢^{٢ل-٢}(ل-١)^{٢}} = \text{حـ}^{*}{}_{٢ل-٢} = \frac{-ل}{٢^{ل-١}\,ل} = \frac{-١}{٢^{ل-١}\,(ل-١)}$$

فيكون $\text{حـ}_{.}^{*} = -٢^{ل-١}\,(ل-١)$ ، .... (٥ ـ ١٠٩)

فكـل المعـامـلات البـاقيـة يمكن الآن حسابها . وبعد عملية حسابية طويلة (الا انها روتينية) ينتج :

$$\text{ص}_{٢}(\text{س}) = \mathbf{J}_{ل}(\text{س})\ \text{لي}\ |\text{س}| - \frac{١}{٢}\Big[\sum_{ك=٠}^{ل-١} \frac{(ل-ك-١)!}{ك!}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢ك-ل}$$

$$+ \frac{\text{هـ}_{ل}}{ل!}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{ل} + \sum_{ك=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ك}\,[\text{هـ}_{ك} + \text{هـ}_{ك+ل}]}{ك!\,(ل+ك)!}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢ك+ل}\Big] \quad (٥ ـ ١١٠)$$

حيث $\text{هـ}_{ل} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \ldots + \frac{١}{ل}$ ،

ل عدد صحيح موجب

وبطريقة مماثلة نحصل على نتيجة التمرين (٥ ـ ٣ ـ ٢٣)، حيث ل = ٠

ومن المألوف الاستعاضة عن (٥ ـ ١١٠) بالتجميع :

$$\text{ص}_{ل}(\text{س}) = \frac{٢}{\pi}\,[\text{ص}_{٢}(\text{س}) + (\gamma - \text{لي}_{٢})\,\mathbf{J}_{ل}(\text{س})]،\ ل = ٠ ، ١ ، ٢ ،$$

حيث

$\gamma = \underset{ل \leftarrow \infty}{\text{نها}}\ (\text{هـ}_{ل} - \text{لي}\ ل) = \ldots ٠,٥٧٧٢١\ ٥٦٦٤٩$ وهو المسمى بثابت اويلر

وواضح ان هذا الحل الخاص مستقل عن $J_{\text{ل}}(\text{س})$، ويسمى اقتران بيزيل من النوع الثاني والرتبة ل، ويسمى أيضا اقتران نيوتن من الرتبة ل. ويعَرف بالصيغة التالية:

$$\text{ص}_{\text{ل}}(\text{س}) = \frac{٢}{\pi} J_{\text{ل}}(\text{س}) \left(\text{لي}\,\frac{\text{س}}{٢} + \gamma\right) - \frac{١}{\pi}\left[\sum_{\text{ك}=٠}^{\text{ل}-١} \frac{(\text{ل}-\text{ك}-١)!}{\text{ك}!}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢\text{ك}-\text{ل}} + \frac{\text{هـ}_{\text{ل}}}{\text{ل}!}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{\text{ل}} + \sum_{\text{ك}=١}^{\infty} (-١)^{\text{ك}} \frac{[\text{هـ}_{\text{ك}} + \text{هـ}_{\text{ل}+\text{ك}}]}{\text{ك}!\,(\text{ل}+\text{ك})!}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢\text{ك}+\text{ل}}\right].$$

لكل الأعداد الصحيحة ل = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . .

ويمكن توسيع الاقتران $\text{ص}_{\text{ل}}$ حتى يشمل كل الأعداد الحقيقية ل $\geqslant$ ٠ (انظر التمرين ٢٤)، وذلك بالصيغة:

$$\text{ص}_{\text{ل}}(\text{س}) = \frac{١}{\text{جا}\,\text{ل}\pi}[J_{\text{ل}}(\text{س})\,\text{جتا}\,\text{ل}\pi - J_{-\text{ل}}(\text{س})]،\ \text{ل} \neq ٠ ، ١ ، ٢ ،$$

. . . . (٥ ـ ١١١).

فبهذا التعريف نتوصل الى النتيجة التالية:

النظرية ٥ ـ ٥ هنالك حل عام لمعادلة بيزيل ذات الرتبة ل، هو:

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{أ}\,J_{\text{ل}}(\text{س}) + \text{ب}\,\text{ص}_{\text{ل}}(\text{س})،\ \text{س} \neq ٠.$$

ويظهر بالشكل ٥ ـ ١ رسوم بيانية للاقترانات $\text{ص}_٠$ ، $\text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٢$.

خصائص اقترانات بيزيل: أما وقد حصلنا على مفكوكات $J_{\text{ل}}(\text{س})$ و $\text{ص}_{\text{ل}}(\text{س})$

فقد صار بإمكاننا ان نستنتج عدداً من الصيغ المهمة التي تحتوي على اقترانات بيـزيـل ومشتقاتها. وللتبسيط سنعتبر أن س > ٠، فالمتطابقتان التاليتان تنتجان مباشرة من المعادلة (٥ ـ ٩٩):

$$\frac{د}{د\,س}\left[س^{ل}\, J_{ل}(س)\right] = س^{ل}\, J_{ل-١}(س) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ١١٢)$$

$$\frac{د}{د\,س}\left[س^{-ل}\, J_{ل}(س)\right] = -س^{-ل}\, J_{ل+١}(س) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ١١٣)$$

ولأثبات المعادلة (٥ ـ ١١٢) نفاضل حاصل الضرب $س^{ل} J_{ل}$ حداً حداً:

$$\frac{د}{د\,س} \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{٢^{ل} (س/٢)^{٢ن+٢ل}}{ن!\ \Gamma(ل+ن+١)} = \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{٢^{ل-١} (س/٢)^{٢ن+٢ل-١} (ن+ل)}{ن!\ \Gamma(ل+ن+١)}$$

$$= س^{ل} \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{(س/٢)^{٢ن+ل-١}}{ن!\ (ل+ن)} = س^{ل}\, J_{ل-١}(س)\,.$$

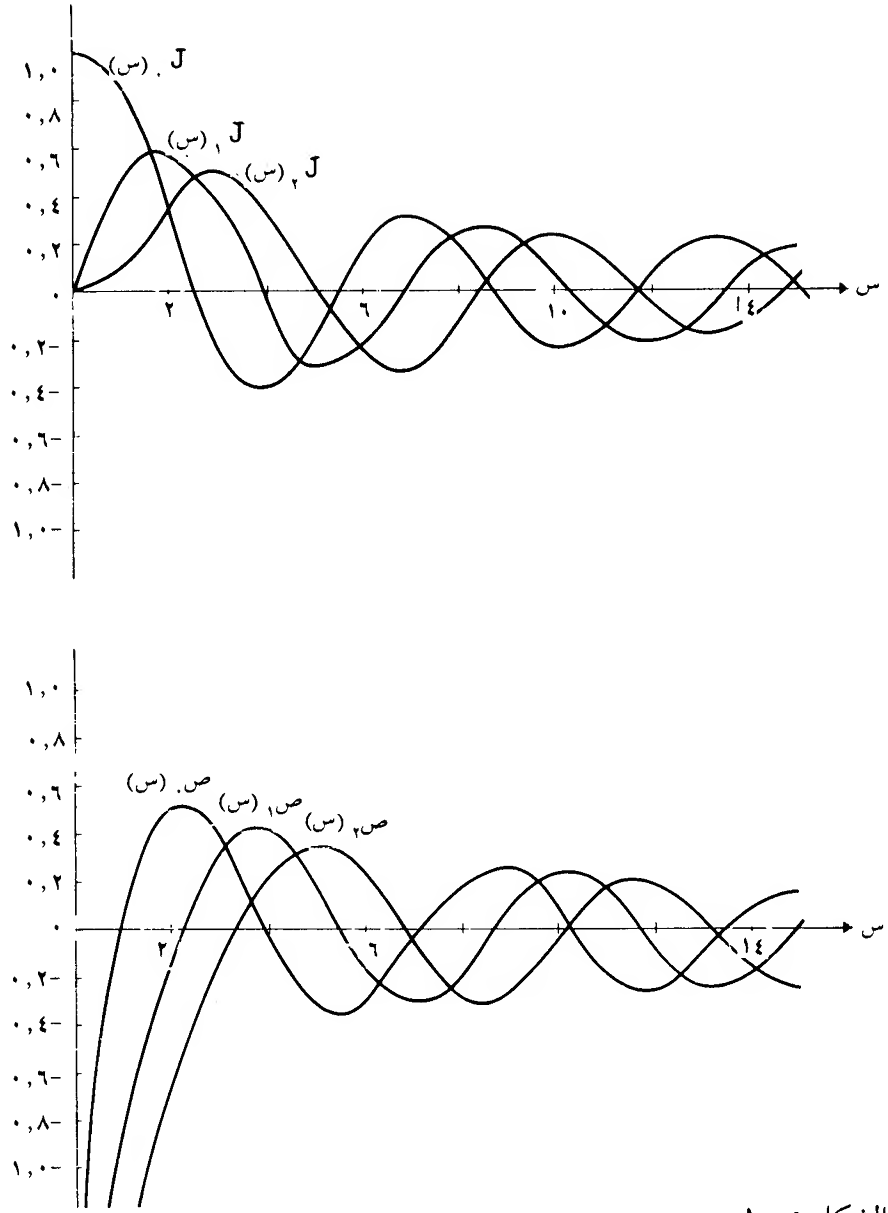
وذلك لأن $\Gamma(ل+ن+١) = (ل+ن)\ \Gamma(ل+ن)$

وبمثل ذلك نبرهن على المعادلة (٥ ـ ١١٣) (انظر التمرين ٤).

فاذا فككنا الطرف الأيمن في كل من المعادلتين (٥ ـ ١١٢) و(٥ ـ ١١٣) ينتج:

$$س^{ل} J'_{ل} + ل\, س^{ل-١} J_{ل} = س^{ل} J_{ل-١}\,،$$

$$س^{-ل} J'_{ل} - ل\, س^{-ل-١} J_{ل} = -س^{-ل} J_{ل+١}$$



الشكل ٥ ـ ١

وبتبسيط هذين تنتج المتطابقتان:

$$\text{س}\, J'_{\text{ن}} = \text{س}\, J_{\text{ن}-١} - \text{ن}\, J_{\text{ن}} \quad \text{(٥ ـ ١١٤)}$$

$$\text{س}\, J'_{\text{ن}} = \text{ن}\, J_{\text{ن}} - \text{س}\, J_{\text{ن}+١} \quad \text{(٥ ـ ١١٥)}$$

وبطرح (٥ ـ ١١٥) من (٥ ـ ١١٤) تنتج العلاقة الدورية:

$$\text{س}\, J_{\text{ن}+١} - ٢\, \text{ن}\, J_{\text{ن}} + \text{س}\, \text{ن}_{\text{ن}-١} = ٠ \quad \text{(٥ ـ ١١٦)}$$

وبجمعهما معاً ينتج $٢\, J'_{\text{ن}} = J_{\text{ن}-١} - J_{\text{ن}+١}$ (٥ ـ ١١٧)

والصيغتان (٥ ـ ١١٢) حتى (٥ ـ ١١٧) على جانب من الأهمية في حل المسائل التي تحتوي على اقترانات بيزيل، لأنها تمكننا من التعبير عن الاقترانات ذات الرتب العالية باقترانات ادنى رتبة. لاحظ انه اذا ثبتنا س، صار $J_{\text{ن}}$ (س) عدداً، ولذا فان (٥ ـ ١١٦) معادلة فروق خطية، من الرتبة الثانية، ذات معاملات غير ثابتة.

ولأن ص ن (س) ايضاً تحقق المعادلة (٥ ـ ١١٦) فان هذه المعادلة يمكن ان تستعمل لحساب ص ن (س) بطريقة البند (٤ ـ ٣) (أنظر التمرين ٧).

المثال ٥ ـ ٤ ـ ١ عبِّر عن $J_{٣}$ (س) بدلالة $J_{٠}$ (س) و $J_{١}$ (س)**:** في المعادلة (٥ ـ ١١٦) نجعل ن = ٢ فيكون

$$\text{س}\, J_{٣} = ٤\, J_{٢} - \text{س}\, J_{١}$$

نطبق الصيغة (٥ ـ ١١٦) مع ن = ١ على $J_{٢}$ فينتج:

$$\text{س}\, J_{٢} = ٢\, J_{١} - \text{س}\, J_{٠}.$$

فيكون

$$J_{٣}(\text{س}) = \frac{٤}{\text{س}} J_{٢} - J_{١} = \frac{٤}{\text{س}^{٢}}(٢J_{١} - \text{س}\, J_{٠}) - J_{١}$$

$$= \left(\frac{٨}{\text{س}^{٢}} - ١\right) J_{١}(\text{س}) - \frac{٤}{\text{س}} J_{٠}(\text{س}) .$$

المثال ٥ ـ ٤ ـ ٢ ما قيمة

$$\int \text{س}^{٤} J_{١}(\text{س})\, \text{د س} \;؟ \qquad \text{(٥ ـ ١١٨)}$$

نكامل بالأجزاء فينتج، حسب (٥ ـ ١١٢):

$$\int \text{س}^{٢} [\text{س}^{٢} J_{١}(\text{س})]\, \text{د س} = \text{س}^{٢} (\text{س}^{٢} J_{٢}) - \int \text{س}^{٢} J_{٢} \cdot ٢\text{س}\, \text{د س}$$

$$= \text{س}^{٤} J_{٢}(\text{س}) - ٢ \int \text{س}^{٣} J_{٢}\, \text{د س} .$$

نطبق (٥ ـ ١١٢) ثانية للتكامل الأخير، فينتج:

$$\int \text{س}^{٤} J_{١}(\text{س})\, \text{د س} = \text{س}^{٤} J_{٢}(\text{س}) - ٢\text{س}^{٣} J_{٣}(\text{س}) + \text{حـ} .$$

وبوجه عام ان التكامل الذي بالشكل

$$\int \text{س}^{\text{م}} J_{\text{ن}}\, \text{د س} ،$$

حيث م ، ن عددان صحيحان، $\text{م} + \text{ن} \geqslant ٠$ ، يمكن تقديره كلياً اذا كان م + ن فردياً.

اما اذا كان م + ن زوجياً فالنتيجة تعتمد على البقية الباقية، وهي $\int J_{\cdot}$ (س) د س . وليس من الممكن تبسيط

$$\int J_{\cdot}\text{(س) د س ، [ولا} \int \text{ص}_{\cdot}\text{(س) د س]}$$

الى حدود أبسط ولهذا السبب يجعل لهذين الاقترانين جداول.

المثال ٥ ـ ٤ ـ ٣ عبِّر عن $J_{٣/٢}$ (س) بدلالة جا س ، جتا س . نذكر من المثال ٥ ـ ٣ ـ ٥ ان الحل العام لمعادلة بيزيل من الرتبة $\frac{١}{٢}$ يمكن ان يكتب بدلالة الجيوب وجيوب التمام. فاذا ضربنا $ص_١$ (س) و$ص_٢$ (س) في حـ. = $[\sqrt{٢}\ \Gamma(\frac{٣}{٢})]^{-١}$ ينتج :

$$J_{\frac{١}{٢}}\text{(س)} = \frac{١}{\sqrt{٢}\ \Gamma(\frac{٣}{٢})} \cdot \frac{\text{جا س}}{\sqrt{\text{س}}} = \sqrt{\frac{٢}{\pi\ \text{س}}}\ \text{جا س}$$

(٥ ـ ١١٩) . . . .

و

$$J_{-\frac{١}{٢}}\text{(س)} = \frac{١}{\sqrt{٢}\ \Gamma(\frac{٣}{٢})} \cdot \frac{\text{جتا س}}{\sqrt{\text{س}}} = \sqrt{\frac{٢}{\pi\ \text{س}}}\ \text{جتا س} \qquad \text{(٥ ـ ١٢٠)}$$

وذلك لأن $\Gamma(\frac{٣}{٢}) = \frac{١}{٢}\ \Gamma(\frac{١}{٢}) = \sqrt{\pi}\ /٢$ (انظر الملحق ١، والصيغتين ٥٥ ، ٥٦). وحسب (٥ ـ ١١٦) يكون

$$J_{٣/٢}\text{(س)} = \frac{١}{\text{س}}\ J_{١/٢} - J_{-١/٢} = \sqrt{\frac{٢}{\pi\ \text{س}}}\ (\frac{\text{جا س}}{\text{س}} - \text{جتا س})$$

وهنالك للاقتران $ص_ن$ (س) نتائج مماثلة (انظر التمارين ٥ ، ٦ ، ٧).

وكثير من المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة يمكن تحويلها الى معادلة بيزيل .

المثال ٥ ـ ٤ ـ ٤ انظر في المعادلة

$$ص'' + ك^{٢} س ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٢١)$$

اليك تعويضاً يحولها الى معادلة بيزيل : ليكن ف = ص / $\sqrt{س}$ ، ع = ٢ ك س$^{٣/٢}$/٣ ، فيكون :

$$\frac{د ف}{د ع} = \frac{د ف / د س}{د ع / د س} = \frac{ص'}{ك س} - \frac{ص}{ك س^{٢}}$$

$$، \frac{د^{٢} ف}{د ع^{٢}} = \frac{\frac{د}{د س}\left(\frac{د ن}{د ع}\right)}{د ع / د س} = \frac{ص''}{ك^{٢} س^{٣/٢}} - \frac{٣ ص'}{٢ ك^{٢} س^{٥/٢}} + \frac{ص}{ك^{٢} س^{٧/٢}}$$

فاذن

$$ع^{٢} \frac{د^{٢} ف}{د ع^{٢}} + ع \frac{د ف}{د ع} = \frac{٤}{٩} س^{٣/٢} ص'' + \frac{١}{٩} \frac{ص}{\sqrt{س}} ،$$

ونستعمل (٥ ـ ١٢١) من أجل ص'' فينتج :

$$ع^{٢} \frac{د^{٢} ف}{د ع^{٢}} + ع \frac{د ف}{د ع} = - \frac{٤}{٩} ك^{٢} س^{٣} \left(\frac{ص}{\sqrt{س}}\right)$$

$$+\frac{1}{9}\frac{ص}{\sqrt{س}} = -\left(ع^{2} - \frac{1}{9}\right) ف$$

اي أن

$$ع^{2}\frac{د^{2}ف}{دع^{2}} + ع\frac{دف}{دع} + \left(ع^{2} - \frac{1}{9}\right) ف = ٠ \qquad \text{..........} \qquad (٥ ـ ١٢٢)$$

وهذه هي معادلة بيزيل من الرتبة $\frac{1}{2}$. ولأن (٥ ـ ١٢٢) حلها العام

$$ف(ع) = أ J_{1/3}(ع) + ب J_{-1/3}(ع)$$

فان (٥ ـ ١٢١) لها الحل:

$$ص(س) = \sqrt{س}\,[أ J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} ك س^{3/2}\right) + ب J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} ك س^{3/2}\right)].$$

التمارين ٥ ـ ٤

١. عبرِّ عن $J_{5}(س)$ بدلالة $J_{0}(س)$ و $J_{1}(س)$.

٢. عبر عن $J_{5/2}(س)$ بدلالة جا س وجتا س.

٣. بينّ ما يلي:

أ) $4 J''_{ل}(س) = J_{ل+2}(س) - 2 J_{ل}(س) + J_{ل-2}(س)$

ب) $-8 J'''_{ل}(س) = J_{ل+3}(س) - 3 J_{ل+1}(س) + 3 J_{ل-1}(س) - J_{ل-3}(س)$.

٤. أثبت ان $[\text{س}^{-\text{ل}} J_{\text{ل}}(\text{س})]' = \text{س}^{-\text{ل}} J_{\text{ل}+1}(\text{س})$

٥. بيِّن ان $[\text{س}^{\text{ل}}\, \text{ص}_{\text{ل}}(\text{س})]' = \text{س}^{\text{ل}}\, \text{ص}_{\text{ل}-1}(\text{س})$

٦. أثبت ان $[\text{س}^{-\text{ل}}\, \text{ص}_{\text{ل}}(\text{س})]' = -\text{س}^{-\text{ل}}\, \text{ص}_{\text{ل}+1}(\text{س})$

٧. بيِّن مستعيناً بمعادلتي التمرينين (٥) و(٦):

أ) أن $\text{س}\,(\text{ص}_{\text{ل}+1} + \text{ص}_{\text{ل}-1}) = 2\,\text{ل}\,\text{ص}_{\text{ل}}$

ب) أن $2\,\text{صَ}_{\text{ل}} = \text{ص}_{\text{ل}-1} - \text{ص}_{\text{ل}+1}$

٨. أثبت صحة المتطابقات التالية:

أ) $\int J_1(\text{س})\,\text{د س} = -J_0(\text{س}) + \text{حـ}$

ب) $\int \text{س}^2 J_1(\text{س})\,\text{د س} = 2\,\text{س}\,J_1(\text{س}) - \text{س}^2 J_0(\text{س}) + \text{حـ}$

جـ) $\int \text{س}\,J_0(\text{س})\,\text{د س} = \text{س}\,J_1(\text{س}) + \text{حـ}$

د) $\int \text{س}^3 J_0(\text{س})\,\text{د س} = (\text{س}^3 - 4\,\text{س})\,J_1(\text{س}) + 2\,\text{س}^2 J_0(\text{س}) + \text{حـ}$

هـ) $\int J_0(\text{س})\,\text{جتا س}\,\text{د س} = \text{س}\,J_0(\text{س})\,\text{جتا س} + \text{س}\,J_1(\text{س})\,\text{جا س} + \text{حـ}$

و) $\int J_0(\text{س})\,\text{جا س}\,\text{د س} = \text{س}\,J_0(\text{س})\,\text{جا س} - \text{س}\,J_1(\text{س})\,\text{جتا س} + \text{حـ}$

ز) $\int J_1(\text{س})\,\text{جتا س}\,\text{د س} = \text{س}\,J_1(\text{س})\,\text{جتا س} -$
$(\text{س جا س} + \text{جتا س})\,J_0(\text{س}) + \text{حـ}$

ح) $\int J_1(\text{س})\,\text{جا س}\,\text{د س} = \text{س}\,J_1(\text{س})\,\text{جا س} +$
$(\text{س جتا س} - \text{جا س})\,J_0(\text{س}) + \text{حـ}$

٩. حقق صحة المتطابقات التالية:

أ) $\int \text{س}^2 J_0(\text{س})\,\text{د س} = \text{س}^2 J_1(\text{س}) + \text{س}\,J_0(\text{س}) - \int J_0(\text{س})\,\text{د س} +$
حـ

ب) $\int$ س$^{-1}$ J_1 (س) د س = − J_1 (س) + $\int$ J_0 (س) د س + حـ

جـ) $\int$ س J_1 (س) د س = − س J_0 (س) + $\int$ J_0 (س) د س + حـ

د) $\int$ س^3 J_1 (س) د س = 3 س^2 J_1 (س) − (س^3 − 3 س) J_0 (س)

− 3 $\int$ J_0 (س) د س + حـ

10. بيِّن أن $\int$ J_0 ($\sqrt{\text{س}}$) د س = 2 س J_1 ($\sqrt{\text{س}}$) + حـ

11. بيِّن أن $\int$ س J_0 (س) جا س د س = $\frac{1}{3}$ { س^2 [J_0 (س) جا س

− J_1 (س) جتا س] + س J_1 (س) جا س } + حـ

12. بيِّن أن $\int$ س J_1 (س) جتا س د س = $\frac{1}{3}$ { س^2 [J_1 (س) جتا س

− J_0 (س) جا س] + 2 س J_1 (س) جا س } + حـ

13. بيِّن ان $\int$ J_0 (س) د س = 2 [J_1 (س) + J_3 (س) + J_5 (س) + . . .] + حـ

في التمارين 14 الى 21 حوّل كل معادلة معطاة الى معادلة بيزيل ثم حلها

14. س^2 صً + س صَ + (أ^2 س^2 − ل^2) ص = 0

15. 4 س^2 صً + 4 س صَ + (س^2 − ل^2) ص = 0

16. س^2 صً + س صَ + 4 (س^4 − ل^2) ص = 0

17. س صً − صَ + س ص = 0

18. س^2 صً + (س^2 + $\frac{1}{4}$) ص = 0

١٩ . س $\ddot{ص}$ + (١ + ٢ك) $\dot{ص}$ + س ص = ٠

٢٠ . $\ddot{ص}$ + ك^{٢} س^{٢} ص = ٠

٢١ . $\ddot{ص}$ + ك^{٢} س^{٤} ص = ٠

٢٢ . استخرج نتيجة التمرين (٥ ـ ٣ ـ ٢٣) بطرق هذا البند

٢٣ . استخرج الصيغة (٥ ـ ١١٠) مع ل = ١ بطرق هذا البند

٢٤* . برهن انه اذا كان ل عدداً صحيحاً $\geqslant$ ٠ كان

$$\lim_{ك \to ل} \frac{J_{ك}(س) \text{ جتا } ك\pi - J_{-ك}(س)}{\text{جا } ك \text{ س}} = ص_{ل}(س).$$

هذا توسيع للعلاقة (٥ ـ ١١١) حتى تشمل ص$_{ك}$ كل قيم ك $\geqslant$ ٠

٢٥ . أ) فك $e^{(س/٢)[مـ - ١/مـ]}$ الى متسلسلة في مـ بضرب متسلسلتي $e^{س مـ/٢}$ ، $e^{-س/٢مـ}$

ب) بين ان معامل مـ^{ن} في المفكوك الذي حصلت عليه في (أ) هو $J_{ن}$ (س)

جـ) استنتج ان

$$e^{(س/٢)(مـ - ١/مـ)} = J_{٠}(س) + \sum_{ن=١}^{\infty} J_{ن}(س)\,[مـ^{ن} + (-مـ)^{-ن}]$$

يسمى هذا الاقتران بالاقتران المولد لاقترانات بيزيل

د) إجعل مـ = $e^{i\theta}$ ، في عبارة القسم (جـ). واستخرج من ذلك المتطابقتين:

$$\text{جتا (س جا } \theta) = J_{٠}(س) + ٢\sum_{ن=١}^{\infty} J_{٢ن}(س) \text{ جتا } ٢ن\theta$$

$$\text{، جا (س جا } \theta) = ٢\sum_{ن=١}^{\infty} J_{٢ن-١}(س) \text{ جا } (٢ن - ١)\theta$$

٢٦ . بيّن أن $J_{٠}$ (س) = $(١/\pi)\int$ جتا (س جتا مـ) د مـ

٢٧ . بيّن أن $J_{ن}$ (س) = $(١/\pi)\int^{\pi}$ جتا (ن مـ − س جا مـ) د م

٢٨ . **(اقترانات بيزيل معدَّلة)** : يسمى الاقتران أ$_{ل}$ (س) = $i^{-ل}$ $J_{ل}$ (i س)، $i^{٢} = -١$ ، **اقتران بيزيل المعدل من النوع الأول والرتبة ل.** بيّن أن أ$_{ل}$ (س) هو حل للمعادلة التفاضلية

س^{٢} صً + س صَ − (س^{٢} + ل^{٢}) ص = ٠

واستخرج بطريقة فروبينيوس قيمته بصيغة متسلسلة.

٢٩ . بيّن ان الاقتران

$$ك_{ل}(\text{س}) = \frac{\pi}{٢ \text{ جا } ل\pi}\,[\text{أ}_{-ل}(\text{س}) - \text{أ}_{ل}(\text{س})]$$

، **المسمى باقتران بيزيل المعدل من النوع الثاني والرتبة ل،** هو حل آخر للمعادلة التفاضلية المذكورة في التمرين ٢٨ .

٣٠ . (انظر التمرين ٢٥) برهن ان

$$e^{(\text{س}/٢)(\text{مـ} + ١/\text{مـ})} = \text{أ}_{٠}(\text{س}) + \sum_{ن=١}^{\infty} \text{أ}_{ن}(\text{س})\,[\text{مـ}^{ن} + \text{مـ}^{-ن}]$$

٣١ . أثبت المتطابقات :

أ) $$\frac{د}{د\,\text{س}}[\text{س}^{ل}\,\text{أ}_{ل}(\text{س})] = \text{س}^{ل}\,\text{أ}_{ل-١}(\text{س})$$

ب) $\frac{د}{د\, س}[س^{-ل} أ_ل(س)] = س^{-ل} أ_{ل+١}(س)$

جـ) $س(أ_{ل-١} - أ_{ل+١}) = ٢\, ل\, أ_ل$

٣٢. أ) بين انه مع كل الاعداد الصحيحة ن > ٠ يكون

$$\int_{٠}^{\infty} J_{ن+١}(س)\, د\, س = \int_{٠}^{\infty} J_{ن-١}(س)\, د\, س\,.$$

استعن بالمعادلة (٥ ـ ١١٧) والعلاقة التقريبية

$$J_ن(س) \approx \sqrt{\frac{٢}{\pi\, س}}\, جتا\left(س - \frac{\pi}{٤} - \frac{ن\,\pi}{٢}\right)$$

ب) استنتج حقيقة مماثلة عن ص $_ن$، مستعيناً بالعلاقة التقريبية

$$ص_ن(س) \approx \sqrt{\frac{٢}{\pi\, س}}\, جا\left(س - \frac{\pi}{٤} - \frac{ن\,\pi}{٢}\right)$$

جـ) بيّن ان $\int_{٠}^{\infty} J_ن(س)\, د\, س = ١$

د) أثبت أن $\int_{٠}^{\infty} (J_ن(س) / س)\, د\, س = ١/ن$

٥ ـ ٥ حدوديات لاجاندر Legendre Polynomials

من المعـادلات التفـاضليـة الكثـيرة الأهميـة التي نقـابلها في الحقول التطبيقية، مثل نظرية

الكمون، (potential theory)، معادلة لاجاندر:

$$(١ - س^٢)\, صً - ٢\, س\, صَ + ل\,(ل + ١)\, ص = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٢٣)$$

حيث ل عدد معلوم. وكل حل للمعادلة (٥ - ١٢٣) يسمى **اقتران لاجاندر***

نقسم المعادلة (٥ - ١٢٣) على $(١ - س^٢)$ فينتج:

$$صً - \frac{٢\,س}{١ - س^٢}\, صَ + \frac{ل\,(ل + ١)}{١ - س^٢}\, ص = ٠ ،$$

ونلاحظ هنا، بالنظر الى المتسلسلتين الهندسيتين، ان المعاملين أ (س) ، ب (س)، حسب الصيغة (٥ - ٥١)، كلاهما تحليلي عند س = ٠ ونصف قطر اقترابه نق = ١ :

$$فإن\ أ\,(س) = \frac{-٢\,س}{١ - س^٢} = -٢س\,(١ + س^٢ + س^٤ + س^٦ + \ldots)$$

$$ب\,(س) = ل\,(ل + ١)\,(١ + س^٢ + س^٤ + س^٦ + \ldots)$$

فحسب النظرية ٥ - ٢ يمكن ان نطبق طريق متسلسلة القوى للحصول على حل عام للمعادلة (٥ - ١٢٣). أضف الى ذلك ان الحل العام ستكون صيغته متسلسلة قوى تصح في الفترة $|س| < ١$. نعوض

$$ص = \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_ن\, س^ن$$

ومشتقاته في (٥ - ١٢٣) فينتج:

$$(١ - س^٢) \sum_{ن=٢}^{\infty} حـ_ن\, ن\,(ن - ١)\, س^{ن-٢} - ٢س \sum_{ن=١}^{\infty} حـ_ن\, ن\, س^{ن-١} +$$

* منسوباً الى الرياضي الفرنسي ادريان ميري لاجاندر (١٧٥٢ - ١٨٣٣)

$$ل\,(ل+١) \sum_{ن=٠}^{\infty} حـ_{ن}\, س^{ن} = ٠$$

أي ان

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} \left\{ (ن+٢)\,(ن+١)\, حـ_{ن+٢} - حـ_{ن} \left[ن\,(ن+١) - ل\,(ل+١) \right] \right\} س^{ن} = ٠ \quad \text{..........................} \quad (٥ ـ ١٢٤)$$

نساوي معاملات (٥ ـ ١٢٤) بالصفر فنحصل على العلاقة الدورية:

$$(ن+٢)\,(ن+١)\, حـ_{ن+٢} = حـ_{ن}\,(ن^{٢} + ن - ل^{٢} - ل) = حـ_{ن}\,(ن-ل)\,(ن+ل+١).$$

فإن

$$حـ_{ن+٢} = - \frac{(ل-ن)\,(ل+ن+١)}{(ن+٢)\,(ن+١)}\, حـ_{ن} \quad \text{...............} \quad (٥ ـ ١٢٥)$$

فإذن

$$حـ_{٢} = - \frac{ل\,(ل+١)}{٢!}\, حـ_{٠} \quad ؛ \quad حـ_{٣} = - \frac{(ل-١)\,(ل+٢)}{٣!}\, حـ_{١}$$

$$حـ_{٤} = - \frac{(ل-٢)\,(ل+٣)}{٤ \times ٣}\, حـ_{٢} = \frac{(ل-٢)\,ل\,(ل+١)\,(ل+٣)}{٤!}\, حـ_{٠}.$$

$$حـ_{٥} = - \frac{(ل-٣)\,(ل+٤)}{٥ \times ٤}\, حـ_{٣} = \frac{(ل-٣)\,(ل-١)\,(ل+٢)\,(ل+٤)}{٥!}\, حـ_{١}$$ ، الخ

وبوضع هذه المعاملات في متسلسلة القوى التي تمثل ص (س) ينتج :

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{حـ}_0\, \text{ص}_1(\text{س}) + \text{حـ}_1\, \text{ص}_2(\text{س}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ١٢٦)$$

حيث

$$\text{ص}_1(\text{س}) = 1 - \text{ل}(\text{ل}+1)\frac{\text{س}^2}{2!} + (\text{ل}-2)\,\text{ل}\,(\text{ل}+1)(\text{ل}+3)\frac{\text{س}^4}{4!} - \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ ـ ١٢٧)$$

$$\text{، ص}_2(\text{س}) = \text{س} - (\text{ل}-1)(\text{ل}+2)\frac{\text{س}^3}{3!}$$

$$+ (\text{ل}-3)(\text{ل}-1)(\text{ل}+2)(\text{ل}+4)\frac{\text{س}^5}{5!} - \ldots \quad \ldots\ldots \quad (٥ ـ ١٢٨)$$

بقسمة (٥ ـ ١٢٨) على (٥ ـ ١٢٧)، ينتج

$$\frac{\text{ص}_2(\text{س})}{\text{ص}_1(\text{س})} = \text{س} + \frac{\text{ل}^2 + \text{ل} + 1}{3}\,\text{س}^3 + \ldots \text{،}$$

وواضح ان هذا ليس عدداً ثابتاً، فإذن ص_1 ، ص_2 مستقلان خطياً. فيكون (٥ ـ ١٢٦) الحل العام لمعادلة لاجاندر (٥ ـ ١٢٣) للفترة $|\text{س}| < 1$.

وفي تطبيقات عديدة يكون الثابت ل في معادلة لاجاندر عدداً صحيحاً غير سالب. فاذا كان ذلك فان الطرف الأيسر في (٥ ـ ١٢٥) يتلاشى عند ن = ل، وهذا يوحي بأن $\text{حـ}_{\text{ل}+2} = \text{حـ}_{\text{ل}+4} = \text{حـ}_{\text{ل}+6} = \ldots = 0$. فبذلك تتحول احدى المعادلتين (٥ ـ ١٢٧) أو (٥ ـ ١٢٨) الى حدودية من الدرجة ل. (فاذا كانت ل زوجية تحولت ص_1،

واذا كانت ل فردية تحولت $ص_٢$).

وهـذه الحـدوديـات، مضـروبـة بثـابت مناسب تسمى **حدوديات لاجاندز**. ونظراً لأهميتها سندرسها بتفصيل أكثر.

ومن المألوف ان نجعل

$$ح_ل = \frac{(٢ل)!}{٢^ل (ل!)^٢} ، \quad ل = ٠، ١، ٢، \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٢٩)$$

فيكون

$$ح_{ل-٢} = - \frac{ل(ل-١)}{٢(٢ل-١)} ح_ل = - \frac{(٢ل-٢)!}{٢^ل (ل-١)! (ل-٢)!} ،$$

$$ح_{ل-٤} = - \frac{(ل-٢)(ل-٣)}{٤(٢ل-٣)} ح_{ل-٢} = \frac{(٢ل-٤)!}{٢^ل ٢! (ل-٢)! (ل-٤)!}$$

وبوجه عام:

$$ح_{ل-٢ك} = \frac{(-١)^ك (٢ل-٢ك)!}{٢^ل ك! (ل-ك)! (ل-٢ك)!} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٣٠)$$

فحدوديات لاجاندر ذات الرتبة ل هي:

$$ح_ل(س) = \sum_{ك=٠}^{ت} \frac{(-١)^ك (٢ل-٢ك)!}{٢^ل ك! (ل-ك)! (ل-٢ك)!} س^{ل-٢ك} ، \quad ل = ٠، ١، ٢، \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥ - ١٣١)$$

حيث ط هي أكبر عدد صحيح لا يزيد عن ل/٢. وعلى الأخص:

$ح_٠ (س) = ١$ ، $ح_١ (س) = س$ ، $ح_٢ (س) = \frac{١}{٢} (٣ س^٢ - ١)$ ، $ح_٣ (س) = \frac{١}{٢} (٥ س^٣ - ٣س)$ ، $ح_٤ (س) = \frac{١}{٨} (٣٥ س^٤ - ٣٠ س^٢ + ٣)$، الخ. وهذه الحالات الخاصة تدل على ان نتيجة اختبارنا (٥ ـ ١٢٩) لقيمة $ح_ل$ نتج ان $ح_ل (١) = ١$

$ح_ل (-١) = (-١)^ل$ لجميع قيم ل $\geqslant$ ٠ وهذا ما سنثبته في التمرين (٥ ـ ٥ ـ ٣).

وللحصول على صيغة لحدوديات لاجاندر أخصر من (٥ ـ ١٣١)، نلاحظ اننا يمكن ان نكتب

$$ح_ل (س) = \sum_{ك=٠}^{ط} \frac{(-١)^ك}{٢^ل ك! (ل - ك)!} \frac{د}{د س^ل} (س^{٢ل-٢ك})$$

لأن

$$\frac{د}{د س^ل} (س^{٢ل-٢ك}) = (٢ل - ٢ك) \frac{د}{د س^{ل-١}} (س^{٢ل-٢ك-١}) = \ldots$$

$$= (٢ل - ٢ك) \ldots (ل - ٢ك + ١) س^{ل-٢ك} = \frac{(٢ل - ٢ك)!}{(ل - ٢ك)!} س^{ل-٢ك}$$

فاذن:

$$ح_ل (س) = \frac{١}{٢^ل ل!} \cdot \frac{د ل}{د س^ل} \sum_{ك=٠}^{ط} (-١)^ك \frac{ل!}{ك! (ل - ك)!} (س^٢)^{ل-ك}$$

نستطيع الآن ان نوسع مدى هذا المجموع بأن نجعل ك تتراوح من ٠ الى ن. وهذا التوسيع لن يؤثر في النتيجة، لأن الحدود التي تضاف هي نفسها حدودية من درجة >

ل ، فمشتقتها اللامية صفر. فيكون

$$ح_ل(س) = \frac{1}{2^ل\, ل!} \frac{د^ل}{د\, س^ل} \sum_{ك=0}^{ن} \frac{ل!}{ك!\,(ل-ك)!} (س^2)^{ل-ك} (-1)^ك$$

فحسب صيغة ذات الحدين يكون:

$$ح_ل(س) = \frac{1}{2^ل\, ل!} \frac{د^ل}{د\, س^ل} (س^2 - 1)^ل \text{ ، } ل = 0 \text{ ، } 1 \text{ ، } 2 \text{ ، } \ldots$$

.... (٥ ـ ١٣٢)

تسمى هذه الصيغـة بصيغـة ردريغـز* Rodrigues' formula ، وهي تؤدي الى طريقة سهلة لحساب حدوديات لاجاندر المتتالية

المثال ٥ ـ ٥ ـ ١ بيِّن ان $ح_2(س) = \frac{1}{2}(3\, س^2 - 1)$ حسب قاعدة ردريغز:

$$ح_2(س) = \frac{1}{2^2\, 2!} \frac{د^2}{د\, س^2} (س^4 - 2\, س^2 + 1) = \frac{1}{8}(12\, س^2 - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(3\, س^2 - 1)$$

ويمكن ان نستعمل قاعدة ردريغز لاستنتاج عدد من العلاقات الدورية المفيدة:

لاحظ ان

$$حَ_{ل+1} = \frac{د}{د\, س} \left[\frac{1}{2^{ن+1}\,(ل+1)!} \frac{د^{ل+1}}{د\, س^{ل+1}} (س^2 - 1)^{ل+1} \right]$$

* نسبة الى الرياضي الصيرفي الفرنسي اولان ردريغز (١٧٩٤ ـ ١٨٥١).

$$= \frac{\text{د}}{\text{د س}} \left\{ \frac{1}{2^{\text{ل}}\,\text{ل}!} \frac{\text{د}^{\text{ل}}}{\text{د س}^{\text{ل}}} [\text{س}\,(\text{س}^{2} - 1)^{\text{ل}}] \right\}$$

$$= \frac{1}{2^{\text{ل}}\,\text{ل}!} \frac{\text{د}^{\text{ل}+1}}{\text{د س}^{\text{ل}+1}} [\text{س}\,(\text{س}^{2} - 1)^{\text{ل}}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٥ ـ ١٣٣})$$

فاذا فاضلنا ما بين الحاصرتين ينتج :

$$\acute{\text{ح}}_{\text{ل}+1} = \frac{1}{2^{\text{ل}}\,\text{ل}!} \frac{\text{د}^{\text{ل}}}{\text{د س}^{\text{ل}}} [(\text{س}^{2} - 1)^{\text{ل}} + 2\,\text{ل}\,\text{س}^{2}\,(\text{س}^{2} - 1)^{\text{ل}-1}]$$

$$= \frac{1}{2^{\text{ل}}\,\text{ل}!} \frac{\text{د}^{\text{ل}}}{\text{د س}^{\text{ل}}} [(2\text{ل} + 1)(\text{س}^{2} - 1)^{\text{ل}} + 2\text{ل}\,(\text{س}^{2} - 1)^{\text{ل}-1}]$$

$$= (2\text{ل} + 1)\,\text{ح}_{\text{ل}} + \acute{\text{ح}}_{\text{ل}-1} \text{ ، ل = ١ ، ٢ ، ٣ ، } \ldots \quad \ldots\ldots \quad (\text{٥ ـ ١٣٤})$$

ويمكن ان نستنتج من (٥ ـ ١٣٣) علاقة دورية أخرى، اذا ذكرنا تأثير المفاضلة المتكررة لعبارة بالشكل س ق (س). اذكر ان

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}} [\text{س ق (س)}] = \text{س} \frac{\text{د}}{\text{د س}} \text{ق (س)} + \text{ق (س)}$$

$$\frac{\text{د}^{2}}{\text{د س}^{2}} [\text{س ق (س)}] = \text{س} \frac{\text{د}^{2}}{\text{د س}^{2}} \text{ق (س)} + 2 \frac{\text{د}}{\text{د س}} \text{ق (س)}$$

وبوجه عام :

$$\frac{d^{\text{ل}+1}}{d\text{س}^{\text{ل}+1}}[\text{س ق(س)}] = \text{س} \frac{d^{\text{ل}+1}}{d\text{س}^{\text{ل}+1}} \text{ق(س)} + (\text{ل} + 1) \frac{d^{\text{ل}}}{d\text{س}^{\text{ل}}} \text{ق(س)} \qquad (٥ ـ ١٣٥)$$

فاذا طبقنا (٥ ـ ١٣٥) على الحاصرتين في (٥ ـ ١٣٣) ينتج :

$$\acute{\text{ح}}_{\text{ل}+1} = \frac{1}{2^{\text{ل}}\,\text{ل}!}\left[\text{س} \frac{d^{\text{ل}+1}}{d\text{س}^{\text{ل}+1}} (\text{س}^2 - 1)^{\text{ل}} + (\text{ل} + 1) \frac{d^{\text{ل}}}{d\text{س}^{\text{ل}}} (\text{س}^2 - 1)^{\text{ل}}\right]$$

$$= \text{س}\,\acute{\text{ح}}_{\text{ل}} + (\text{ل} + 1)\,\text{ح}_{\text{ل}} \text{ ، ل} = ٠ \text{ ، } ١ \text{ ، } ٢ \text{ ، } \ldots\ldots \qquad (٥ ـ ١٣٦)$$

اذن فقد اثبتنا المتطابقتين

$$(\text{ل} + 1)\,\text{ح}_{\text{ل}} = \acute{\text{ح}}_{\text{ل}+1} - \text{س}\,\acute{\text{ح}}_{\text{ل}} \text{ ،}$$
$$(2\text{ل} + 1)\,\text{ح}_{\text{ل}} = \acute{\text{ح}}_{\text{ل}+1} - \acute{\text{ح}}_{\text{ل}-1} \text{ ،} \qquad (٥ ـ ١٣٧)$$

نطرح المتطابقة الاولى من الثانية فينتج

$$\text{ل}\,\text{ح}_{\text{ل}} = \text{س}\,\acute{\text{ح}}_{\text{ل}} - \acute{\text{ح}}_{\text{ل}-1} \text{ ، ل} = ١ \text{ ، } ٢ \text{ ، } \ldots\ldots \qquad (٥ ـ ١٣٨)$$

وأخيراً: لاحظ انه من (٥ ـ ١٣٧) و(٥ ـ ١٣٨) ينتج :

$$(\text{ل} + 1)\,\text{ح}_{\text{ل}+1} - (2\text{ل} + 1)\,\text{س}\,\text{ح}_{\text{ل}} + \text{ل}\,\text{ح}_{\text{ل}-1} = (\text{س}\,\acute{\text{ح}}_{\text{ل}+1} - \acute{\text{ح}}_{\text{ل}}) -$$
$$\text{س}\,(\acute{\text{ح}}_{\text{ل}+1} - \acute{\text{ح}}_{\text{ل}-1}) + (\acute{\text{ح}}_{\text{ل}} - \text{س}\,\acute{\text{ح}}_{\text{ل}-1}) \text{ ،}$$

فنستطيع ان نسقط كل المشتقات ونحصل على العلاقة :

$$(\text{ل} + ١)\,\text{ح}_{\text{ل}+١} + \text{ل}\,\text{ح}_{\text{ل}-١} = (٢\text{ل} + ١)\,\text{س}\,\text{ح}_{\text{ل}} \text{ ، } \text{ل} = ١ \text{ ، } ٢ \text{ ، } \ldots \qquad (٥ \text{ ـ } ١٣٩)$$

وهـذه معـادلـة فروق متجانسة من الرتبة الثانية ، ويمكن ان تستعمل لتوليد كل حدوديات لاجاندر اذا كان $\text{ح}_{٠}$ ، $\text{ح}_{١}$ معلومين (انظر الفصل ٤).

وسنوضح هذه العملية التتابعية بالمثال التالي :

المثال ٥ ـ ٥ ـ ٢ إبدأ بالحدوديتين $\text{ح}_{٠} = ١$ ، $\text{ح}_{١} = \text{س}$ واحسب الحدوديات $\text{ح}_{٢}$ ، $\text{ح}_{٣}$ ، $\text{ح}_{٤}$ مستعملاً (٥ ـ ١٣٩) :

$$\text{ح}_{\text{ل}+١} = \frac{(٢\text{ل} + ١)\,\text{س}\,\text{ح}_{\text{ل}} - \text{ل}\,\text{ح}_{\text{ل}-١}}{\text{ل} + ١} \text{ ،}$$

فيكـون

$$\text{ح}_{٢} = \frac{٣\,\text{س}\,\text{ح}_{١} - \text{ح}_{٠}}{٢} = \frac{٣\,\text{س}^{٢} - ١}{٢} \text{ ،}$$

$$\text{، } \text{ح}_{٣} = \frac{٥\text{س}\,\text{ح}_{٢} - ٢\,\text{ح}_{١}}{٣} = \frac{١٥\,\text{س}^{٣} - ٥\text{س} - ٤\text{س}}{٦} = \frac{٥\,\text{س}^{٣} - ٣\text{س}}{٢} \text{ ،}$$

$$\text{ح}_{٤} = \frac{٧\text{س}\,\text{ح}_{٣} - ٣\,\text{ح}_{٢}}{٤} = \frac{٣٥\,\text{س}^{٤} - ٢١\,\text{س}^{٢} - ٩\,\text{س}^{٢} + ٣}{٨}$$

$$= \frac{٣٥\,\text{س}^{٤} - ٣٠\,\text{س}^{٢} + ٣}{٨}$$

وهنـالـك متطـابقـة أخـرى في غايـة الأهميـة تسمى الاقـتران المـولد، بالنسبة الى

حدوديات لاجاندر، وتتبين من النظرية التالية:

النظرية ٥ ـ ٦:

$$\frac{١}{\sqrt{١ - ٢\,س\,ع + ع^{٢}}} = ح_{٠}(س) + ح_{١}(س)\,ع + ح_{٢}(س)\,ع^{٢} + \dots + ح_{ن}(س)\,ع^{ن} + \dots \qquad (٥\text{ـ}١٤٠)$$

البرهان: نفك العبارة، حسب نظرية ذات الحدين (انظر التمرين ٥ ـ ١ ـ ٢٥):

$$[١ - (٢\,س\,ع - ع^{٢})]^{-\frac{١}{٢}} = ١ + \frac{١}{٢}(٢\,س\,ع - ع^{٢}) + \frac{(\frac{١}{٢})(\frac{٣}{٢})}{٢!}(٢\,س\,ع - ع^{٢})^{٢} + \dots +$$

$$\frac{(\frac{١}{٢})(\frac{٣}{٢})(\frac{٥}{٢})\dots[(٢ل - ١)/٢]}{ل!}(٢\,س\,ع - ع^{٢})^{ل} + \dots$$

فالقوة $ع^{ل}$ تأتي فقط في الحدود من الحد اللامي $(٢\,س\,ع - ع^{٢})^{ل}\ [= ع^{ل}\,(٢س - ع)^{ل}]$ فما دونه.فبفك قوى $(٢س - ع)$ المختلفة نجد ان معامل $ع^{ل}$ هو:

$$\frac{(\frac{١}{٢})(\frac{٣}{٢})\dots[(٢ل - ١)/٢]}{ل!}(٢س)^{ل} -$$

$$\frac{(\frac{١}{٢})(\frac{٣}{٢})\dots[(٢ل - ٣)/٢]}{(ل - ١)!}(ل - ١)\,(٢س)^{ل-٢}$$

$$+ \frac{(\frac{١}{٢})(\frac{٣}{٢})\dots[(٢ل - ٥)/٢]}{(ل - ٢)!}\ \frac{(ل - ٢)\,(ل - ٣)}{٢!}\,(٢\,س)^{ل-٤} - \dots$$

أي

$$\frac{(٢ ل)!}{٢^{ل}(ل!)^{٢}} س^{ل} - \frac{(٢ل - ٢)!\, س^{ل-٢}}{٢^{ل}(ل - ١)!\,(ل - ٢)!}$$

$$+ \frac{(٢ل - ٤)!\, س^{ل-٤}}{٢^{ل}\, ٢!\,(ل - ٢)!\,(ل - ٤)!} - \ldots \qquad (٥ ـ ١٤١)$$

وليكن ط اكبر عدد صحيح لا يزيد عن ل/٢ . لاحظ ان اكبر قوى ع في الحد $(٢ س ع - ع^{٢})^{ط-١}$ هي $ع^{٢ط-٢}$ ، وان $٢ط - ٢ \leqslant ل - ٢$.

فالمجموع (٥ ـ ١٤١) يحتوي فقط على الحدود

$$\sum_{ك=٠}^{ط} \frac{(-١)^{ك}\,(٢ل - ٢ك)!\, س^{ل-٢ك}}{٢^{ل}\, ك!\,(ل - ك)!\,(ل - ٢ك)!} = ح_{ل}(س)$$

فقد تم البرهان.

المثال ٥ ـ ٥ ـ ٣ المتطابقتان التاليتان صحيحتان لكل الاعداد الصحيحة $ل \geqslant ٠$

$$ح_{ل}(١) = ١ \text{ ،} \quad ح_{ل}(-١) = (-١)^{ل}$$

لأثبات ذلك نعوض س = ± ١ في المعادلة (٥ ـ ١٤٠) فينتج :

$$\frac{١}{\sqrt{١ \mp ٢ع + ع^{٢}}} = ح_{٠}(\pm ١) + ح_{١}(\pm ١)ع + ح_{٢}(\pm ١)ع^{٢} + \ldots +$$

$$ح_{ن}(\pm ١)ع^{ن} + \ldots .$$

ولكن $١ \mp ٢ع + ع^{٢} = (١ \mp ع)^{٢}$ ، والمتسلسلة الهندسية

$$\frac{١}{١ \mp ع} = ١ \pm ع + ع^{٢} \pm \ldots + (\pm ع)^{ن} + \ldots$$

، حسب المعادلة (٥ ـ ١٠) فمعاملات المتسلسلتين يجب ان تتوافق . وهذا يفضي الى النتيجة المطلوبة .

التمارين ٥ ـ ٥

١ . احسب $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$ ، $ح_{٨}$ بطريقة المعادلة (٥ ـ ١٣٩) .

٢ . اثبت ان المتسلسلة (٥ ـ ١٢٧) لها نصف قطر اقتراب نق = ١ .

٣ . اثبت ان المتسلسلة (٥ ـ ١٢٨) لها نصف قطر اقتراب نق = ١ .

٤ . احسب $ح_{٤}$ باستعمال قاعدة ردريغز .

٥ . اثبت ان $ح_{٢ل+١}(٠) = ٠$ لجميع الأعداد الصحيحة ل ⩾ ٠

٦ . اثبت ان

$$ح_{٢ل}(٠) = \frac{(-١)^{ل}\,(٢ل)!}{٢^{٢ل}\,(ل!)^{٢}} \quad \text{لكل } ل \geqslant ٠$$

٧ . اثبت انه لكل الأعداد الصحيحة ل ⩾ ٠

$$\text{أ) } \acute{ح}_{٢ل}(٠) = ٠ \qquad \text{ب) } \acute{ح}_{٢ل+١}(٠) = \frac{(-١)^{ل}\,(٢ل + ١)!}{٢^{٢ل}\,(ل!)^{٢}}$$

٨ . بين صحة ما يلي لكل الاعداد الصحيحة ل > ٠ :

$$\text{أ) } \int_{٠}^{١} ح_{ل}(س)\, د س = \frac{١}{ل + ١}\, ح_{ل-١}(٠) \qquad \text{ب) } \int_{٠}^{١} ح_{٢ل}(س)\, د س = ٠$$

ح) $\int_{0}^{1} ح_{2ل+1}(س)\, د س = (-1)^{ح} \frac{(2ل)!\,(4ل+3)}{2^{2ل+1}\, ل!\,(ل+1)!}$

د) إحسب هذه التكاملات عند ل = ٠

٩. خذ المعادلة التفاضلية

$$ص'' - 2 س ص' + 2 ل ص = 0 \qquad \dots\dots\dots\dots \qquad (5-142)$$

وتسمى **معادلة هرمايت (Hermite)**

أ) استعمل طريقة فروبينيوس لبيان ان كل حلولها من النوع

$$ص = ح_0 \left[1 + \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{2^{ن} (-ل)(-ل+2) \dots (-ل+2ن-2)}{(2ن)!} س^{2ن}\right]$$

$$+ ح_1 \left[س + \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{2^{ن} (1-ل)(1-ل+2) \dots (1-ل+2ن-2) س^{2ن+1}}{(2ن+1)!}\right] ،$$

حيث $ح_0$ ، $ح_1$ اقترانان اعتباطيان.

ب) بيِّن ان (٥ ـ ١٤٢) لها حل بصورة حدودية من الدرجة ل، حيث ل عدد صحيح غير سالب،هذه الحدوديات يرمز لها بالرمز $هـ_ل(س)$ وتسمى **حدوديات هرمايت ذات الدرجة ل**.

حـ) بيّن أن

$$هـ_ل(س) = \sum_{ن=0}^{\frac{ل}{2}} \frac{(-1)^{ن} ل! (2س)^{ل-2ن}}{ن! (ل-2ن)!} ،$$

حيث ط اكبر عدد صحيح $\leqslant$ ل/٢ .

د) إحسب $هـ_{.}$ ، $هـ_{١}$ ، $هـ_{٢}$ ، $هـ_{٣}$ ، $هـ_{٤}$.

١٠ . انظر في **معادلة لاجوير (Laguerre)** :

س صً + (١ - س) صَ + ل ص = ٠ .... (٥ - ١٤٣)

أ) بيّن انـه اذا كان ل عدداً صحيحـاً غير سالب كان لهذه المعـادلة حل بصيغة حدودية بالشكل

$$ج_{ل}(س) = \sum_{ن=٠}^{ل} \frac{(-١)^{ن} ل! س^{ن}}{(ل - ن)! (ن!)^{٢}}$$

نسمى الاقترانات $ج_{ل}$ (س) **حدوديات لاجوير**

ب) إحسب $ج_{.}$ (س) ، $ج_{١}$ (س) ، $ج_{٢}$ (س) ، $ج_{٣}$ (س) ، $ج_{٤}$ (س)

الفصل السادس

٦ ـ ١ مقدمة
التعريف بمحولات لابلاس
وخصائصها الاساسية

من أقوى الطرق في حل بعض المعادلات التفاضلية ، العادية والجزئية ، طريقة استعمال محولات لابلاس . وترجع قوة هذه المحولات الى مقدرتها على تحويل المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية . فتحل هذه المعادلة ، فاذا عكس التحويل ، نتج حل المعادلة التفاضلية ذاتها . مَثَل ذلك ، في كثير من الوجوه ، كمثل استعمال اللوغريثمات في الضرب والقسمة .

وسنرى بعد قليل ان محول لابلاس يعرف بأنه تكامل ما ، مداه من الصفر الى اللانهاية . ونعلم أن مثل هذا التكامل يعرف باسم **التكامل المعتل** (improper integral) . وبعبارة شكلية : اذا كان هـ أي عدد حقيقي ، ق (هـ) أي اقتران فإن :

$$\int_{0}^{\infty} ق\,(هـ)\; د\,هـ = \lim_{و \to \infty} \int_{0}^{و} ق\,(هـ)\; د\,هـ$$

فاذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة نقول ان التكامل المعتل **متقارب** . وإلا فهو **متباعد** .

المثال ٦ ـ ١ ـ ١ اذا كان ق (هـ) = $e^{أهـ}$ ، أ ≠ ٠ ، فإن :

$$\int_{0}^{\infty} e^{أهـ} د هـ = \underset{و \to \infty}{نها} \int_{0}^{و} e^{أهـ} د هـ = نها_{و \to \infty} \frac{1}{أ} e^{أهـ} \Big|_{0}^{و} = نها_{و \to \infty} \frac{1}{أ}(e^{أو} - 1) .$$

وواضح ان هذه النهاية تكون محدودة اذا كان أ $<$ ٠ وتتباعد الى + ∞ اذا كان أ $>$ ٠

المثال ٦ ـ ١ ـ ٢ ليكن ق (هـ) = جتا هـ. فيكون:

$$\int_{0}^{\infty} جتا هـ د هـ = \underset{و \to \infty}{نها} \int_{0}^{و} جتا هـ د هـ = نها_{و \to \infty} جا هـ \Big|_{0}^{و} = نها_{و \to \infty} جا و$$

ولكن جا و ليس له نهاية عندما و $\to \infty$. فاذن $\int_{0}^{\infty}$ جتا هـ د هـ متباعد رغم أن:

$$-1 \leqslant \int_{0}^{و} جتا هـ د هـ \leqslant 1 ، لكل و \geqslant 0 .$$

المثال ٦ ـ ١ ـ ٣ ليكن ق (هـ) = ١/هـ^{ل} ، ل $\neq$ ١ ، فيكون:

$$\int_{1}^{\infty} هـ^{-ل} د هـ = \underset{و \to \infty}{نها} \int_{1}^{و} هـ^{-ل} د ل = نها_{و \to \infty} \frac{1}{1 - ل} هـ^{1-ل} \Big|_{1}^{و}$$

$$= نها_{و \to \infty} \frac{1}{1 - ل} (و^{1-ل} - 1) ،$$

وهذه تقارب ١/(ل ـ ١) اذا كان ل $>$ ١، وتتباعد اذا كان ل $<$ ١

وهنالك أيضاً انواع أخرى من التكاملات المعتلة.

المثال ٦ ـ ١ ـ ٤ ليكن ق (هـ) = هـ$^{-1/2}$ ولننظر في $\int_{0}^{1}$ هـ$^{-1/2}$ د هـ : فلأن ق (هـ) غير معرَّف عند هـ = ٠ ، نعرف

$$\int_{\text{و}}^{1} هـ^{-1/2}\ د\ هـ = \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نها}} \int_{\text{و}}^{1} هـ^{-1/2}\ د\ هـ$$

$$= \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نها}}\ ٢\ هـ^{1/2} \Big|_{\text{و}}^{1} = \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نها}}\ ٢\ (١ - \sqrt{\text{و}}) = ٢\ .$$

وإذن فان $\int_{\cdot}^{1} هـ^{-1/2}$ د هـ متقارب .

المثال ٦ ـ ١ ـ ٥ ليكن ق (هـ) = هـ$^{-1}$، فيكون $\int_{\cdot}^{1}$ هـ$^{-1}$ د هـ تكاملاً معتلاً، ويكون :

$$\int_{\cdot}^{1} هـ^{-1}\ د\ هـ = \text{نها}_{\text{و} \leftarrow \cdot} \int_{\text{و}}^{1} هـ^{-1}\ د\ هـ = \text{نها}_{\text{و} \leftarrow \cdot}\ \text{لي و} \Big|_{\text{و}}^{1} = \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نها}}\ (\text{لي } ١ - \text{لي و})$$

$$= \underset{\text{و} \leftarrow \cdot}{\text{نها}}\ (-\text{لي و}) = + \infty$$. فالتكامل متباعد.

لن نقوم في باقي هذا الفصل، سكليا، بحساب التكاملات المعتلة، كما صنعنا في هذه الأمثلة الخمسة. ولكن على القاريء ان يذكر دائماً ان التكامل المعتل يعَّرف بأنه نهاية ما.

فاذا كان ق (هـ) اقتراناً قيمته حقيقية. معَّرفاً لكل هـ $\geqslant$ ٠ ، وضربنا ق (هـ) في $e^{-\text{زهـ}}$ ثم كاملنا الحاصل بالنسبة الى هـ، من الصفر الى اللانهاية. فتقارب التكامل، فهو اقتران في ز:

$$\text{ق (ز)} = \int_{\cdot}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\ \text{ق (هـ) د هـ} \qquad \text{(٦ ـ ١)}$$

ويسمى هذا الاقتران: **مُحول لابلاس** للاقتران ق (هـ). **وسنرمز الى الاقترانات الأصلية بالحروف العادية والى المحولات بحروف مشطوبة مثل قم أو بمثل لا { ق (هـ) }**

$$ق(ز) = لا \{ق(هـ)\}(ز) = \int_{0}^{\infty} e^{-زهـ} ق(هـ) \, د هـ \qquad (٦ - ٢)$$

قد إتضح الآن لماذا نشير الى هذه العملية باسم التحويل. فالعملية تحول الاقتران الأصلي ق (هـ) الى اقتران جديد هولا { ق (هـ) } (ز). ولاهتمامنا بعكس العملية، نقول ان الاقتران الأصلي، ق (هـ)، عكس المحول قهِ = لا { ق (هـ) } ، ونرمز اليه بالصيغة ق(هـ) = $لا^{-١}$ { ق } ونستعمل العبارات: عكس المحول، والمقابل، والمعكوس بمعنى واحد، كما نستعمل عكس الاقتران والاقتران العكسي. فمثلاً اذا كان ق (س) = $\sqrt{س}$ فعكس ق، ورمزه $ق^{-١}$ (س) هو $ق^{-١}$ (س) = $س^{٢}$. والمعنى هنا واضح. فاذا كان س > ٠، واخذنا الجذر التربيعي الموجب للعدد س، ثم ربعناه: نحصل على س، العدد الأصلي وبالرموز الرياضية: عندنا $ق^{-١}$ (ق (س)) = س. ومثل هذا في محولات لابلاس: فيمكن ان نقول ان معكوس المحول قهِ، أي $لا^{-١}$ { قهِ } هو الاقتران الذي محوله قهِ، لاحظ ان هذه العبارة تترجم الى كلمات الرموز $لا^{-١}$ { قهِ } = $لا^{-١}$ { لا { ق } } = ق .

المثال ٦ ـ ١ ـ ٦ ليكن ق (هـ) = $e^{أهـ}$ ، حيث أ ثابت

$$فيكون لا \{e^{أهـ}\} = \int_{0}^{\infty} e^{-زهـ} e^{أهـ} \, د هـ = \left. \frac{e^{-(ز-أ)هـ}}{أ - ز} \right|_{0}^{\infty}$$

فإذا كان ز − أ > ٠ فهذا يتقارب إلى

$$لا \{e^{أهـ}\} = \frac{١}{ز - أ} \qquad (٦ - ٣)$$

فمحول لابلاس للاقتران $e^{أهـ}$ هو الاقتران ق (ز) = ١ /(ز − أ)، لكل ز > أ لاحظ اننا نستطيع ان نقول ايضاً ان $لا^{-١}$ { ق (ز) } = $e^{أهـ}$.

يظهر من هذا المثال ان لا { ق (هـ) } قد لا يكون معَّرفاً مع جميع قيم ز، فاذا كان معَّرفاً فإنه يوجد مع قيم من ز كبيرة الي حد مناسب. والواقع ان (٦ ـ ٣) يصح لقيم ز > أ.

المثال ٦ ـ ١ ـ ٧ اذا كان ق (هـ) = ١/هـ، يكون

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{e^{-زهـ}}{هـ} د هـ = \int_{\cdot}^{١} \frac{e^{-زهـ}}{هـ} د هـ + \int_{١}^{\infty} \frac{e^{-زهـ}}{هـ} د هـ$$

أما في الفترة ٠ ≥ هـ ≥ ١، فان $e^{-زهـ} \geq e^{-ز}$، اذا كان ز > ٠ فإذن

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{e^{زهـ}}{هـ} د هـ \geq e^{-ز} \int \frac{د هـ}{هـ} + \int_{١}^{\infty} \frac{e^{-زهـ}}{هـ} د هـ$$

وقد رأينا فيما سبق $\int^{١} هـ^{-١}$ د هـ متباعد. فاذن ق (هـ) = ١/هـ ليس له محول لابلاسي. والمشكلة هنا ان ١/هـ غير متصل عند الصفر.

من هذا المثال ومما سبق يبرز لنا السؤالان التاليان:

١. ما الاقترانات ق (هـ) التي لها محولات لابلاسية؟

٢. هل يكون لاقترانين ق (هـ) ، ك (هـ) محول لابلاسي واحد؟

في البحث عن جواب لهذين السؤالين، يكفينا ان نجد مجموعة من الاقترانات، كبيرة الى حد انها تشمل كل الاقترانات التي تنشأ في الحياة العملية، ويوجد لها محولات لابلاسية، لكل منها معكوس وحيد وتنشأ الحاجة الى المعكوس الوحيد لحاجتنا الى ان نعكس التحويل لأيجاد حل المسألة المعطاة، وهذه الخطوة لا تتم ان لم تكن المعكوسات في هذه المجموعة من الاقترانات وحيدة. وسنرى في البند ٦ ـ ٣ ان بعض المعادلات التفاضلية يمكن ان تحل بأن نجد اولاً محول لابلاس لكل من طرفي المعادلة، ثم حساب محول

لابلاس للحل، ومن ثم أخذ معكوسه الوحيد.

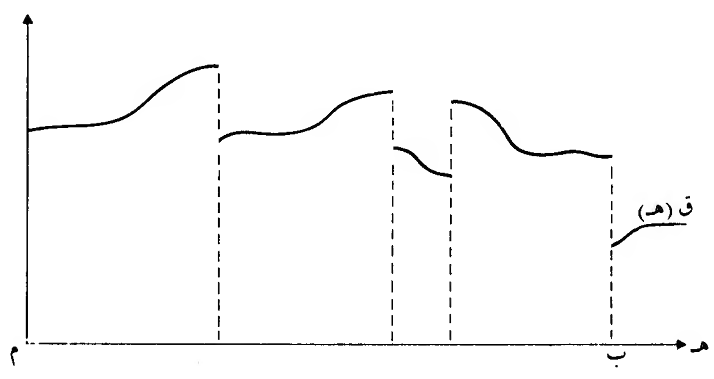
ولوضع شروط سهلة تضمن وجود محول لابلاس نحتاج الى التعريفات التالية:

يكون للاقتران ق (هـ) **انقطاع قافز** jump discontinuity عند النقطة هـ* اذا كان له نهايتان (محدودتان) مختلفتان عند اقترابه من هـ*، واحدة من اليمين والأخرى من اليسار.

ويكون الاقتران ق (هـ) المعرف على [٠ ، ∞) متصلاً جزءاً جزءاً (بالأجزاء) (piecewise continuous) اذا كان متصلاً على كل فترة محدودة ٠ ≥ س ≥ ب، ربما باستثناء عدد محدود من النقاط التي له عندها انقطاع قافز. والشكل (٦ ـ ١) يبين مثل هذا الاقتران ومجموعة الاقترانات المتصلة بالأجزاء تشمل كل اقتران متصل كما تشمل كثيراً من الاقترانات المهمة المنقطعة، مثل الاقتران السلمي واقتران الخطوة الواحدة واقتران الموجات المربعة التي سنقابلها في هذا الفصل.

النظرية ٦ ـ ١ نظرية الموجودية

اذا كان ق (هـ) متصلاً جزءاً جزءاً على هـ ≤ ٠ ويحقق:



الشكل ٦ ـ ١

$$|\text{ق}(\text{هـ})| \leqslant \text{ط}\, e^{\text{أهـ}} \qquad \ldots\ldots (٦ - ٤)$$

لكل هـ $\geqslant$ ة، حيث أ، ط، ة ثوابت غير سالبة، يكون لا {ق (هـ)} موجوداً لكل ز $>$ أ.

البرهان بما ان ق (هـ) متصل بالأجزاء فان $e^{-\text{زهـ}}$ ق (هـ) قابل للتكامل على أي عدد محدود من فترات هـ $\geqslant$ ٠ وان

$$|\text{لا}\{\text{ق}(\text{هـ})\}| = \left|\int_{0}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,\text{ق}(\text{هـ})\,\text{د هـ}\right| \leqslant \int_{0}^{\text{ة}} \left|e^{-\text{زهـ}}\,\text{ق}(\text{هـ})\,\text{د هـ}\right| + \int_{\text{ة}}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,|\text{ق}(\text{هـ})|\,\text{د هـ} \qquad \ldots\ldots (٦ - ٥)$$

فالاقتران الأخير الى اليسار موجود، وحسب (٦ - ٤) فان:

$$\int_{\text{ة}}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,|\text{ق}(\text{هـ})|\,\text{د هـ} \leqslant \text{ط}\int_{\text{ة}}^{\infty} e^{-(\text{ز}-\text{أ})\text{هـ}}\,\text{د هـ} = \left.\frac{\text{ط}\, e^{-(\text{ز}-\text{أ})\text{هـ}}}{\text{أ}-\text{ز}}\right|_{\text{ة}}^{\infty}$$

وهذه تتقارب من ط $e^{-(\text{ز}-\text{أ})\text{هـ}}$ / (ز − أ) اذا كان ز $>$ أ. وهكذا فقد تم البرهان.

هنا استعملنا اختبار المقارنة لاختبار تقارب التكاملات:

افرض ان أ (هـ) ، ب (هـ) اقترانان متصلان بالأجزاء وان ٠ $\leqslant$ أ (هـ) $\leqslant$ ب (هـ) على كل النقاط هـ حيث يكون أ ، ب متصلين. فاذا كان

$$\int_{0}^{\infty} \text{ب}(\text{هـ})\,\text{د هـ} < \infty$$

كان

$$\int_{0}^{\infty} \text{أ}(\text{هـ})\,\text{د هـ} < \infty$$

وشروط النظرية (٦ - ١) يسهل اختبارها. فمثلاً:

جز هـ $\geqslant$ e ^{هـ} ، هـ ^{ن} $\geqslant$ ن! e ^{هـ} ، لكل هـ > ٠

لكن

$$e^{هـ^٢} > ط\, e^{أهـ}$$

اذا كانت هـ كبيرة بما فيه الكفاية، مهما يكن ط، أ

ويسهل بيان هذه الحقائق كما يلي:

١. جز هـ = $\frac{e^{هـ} - e^{-هـ}}{٢} > \frac{e^{هـ}}{٢} > e^{هـ}$، لأن - $\frac{e^{-هـ}}{٢} > ٠$.

٢. $e^{هـ} = ١ + هـ + \frac{هـ^٢}{٢!} + \ldots + \frac{هـ^ن}{ن!} + \ldots$ إذن لكل هـ > ٠،

$\frac{هـ^ن}{ن!} \geqslant e^{هـ}$، أي أن هـ ^{ن} $\geqslant$ ن! e ^{هـ}.

٣. وأخيراً، ليكن ط، أ ثابتين معينين. فواضح انه اذا كانت هـ كبيرة بما فيه الكفاية يكون:

$$هـ^٢ > لي\, ط + أ\, هـ$$

(إختر هـ بحيث يكون هـ > أ + لي ط/هـ)،

فبالرفع ينتج: $e^{هـ^٢} > e^{لي\, ط + أهـ} = e^{لي\, ط}\, e^{أهـ} = ط\, e^{أهـ}$

ويجدر ان نلاحظ أيضاً ان هنالك اقترانات لها محولات لابلاسية ولكنها لا تحقق

شروط النظرية (٦ ـ ١) فمثلاً ق (هـ) = ١ / $\sqrt{هـ}$ يكون لا متناهياً عند هـ = ٠، ولكن اذا جعلنا س^{٢} = ز هـ، يكون:

$$لا \{ هـ^{-١/٢} \} = \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} هـ^{-\frac{١}{٢}} د هـ = \frac{٢}{\sqrt{ز}} \int_{٠}^{\infty} e^{-س^{٢}} د س = \sqrt{\frac{\pi}{ز}}$$

حسب القاعدة ٥٨ في الملحق ١

اما البرهان على وحدانية المحول فيشتُّ بنا كثيراً عما نحن بصدده، ويمكن للطالب ان يجده في كتب أوسع، على ان بالامكان ان نبين أنه **اذا كان لاقترانين محول لابلاسي واحد فلا يمكن ان يختلفا في مدى فترة ذات طول موجب**، وان يكونا قد يختلفان عند عدة نقاط معزولة. واذن فان الاقترانين المختلفين المتصلين بالأجزاء اللذين لهما محول لابلاسي واحد انما يكون اختلافهما عند نقاط منعزلة. وهذا الاختلاف لا اهمية له في التطبيقات. واذن فمحول لابلاس له ـ جوهرياً ـ معكوس وحيد. وعلى الأخص: ان الاقترانات المتصلة المختلفة لها محولات لابلاسية مختلفة.

ومن اهم خصائص محولات لابلاس الخاصية التي تنص عليها النظرية التالية:

النظرية ٦ ـ ٢ الخطية Linearity

$$لا \{ أ ق (هـ) + ب ك (هـ) \} = أ لا \{ ق (هـ) \} + ب لا \{ ك (هـ) \}$$

البرهان حسب التعريف: $لا \{ أ ق (هـ) + ب ك (هـ) \} = \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} [أ ق (هـ) +$ $ب ك (هـ)] د هـ$

$$= أ \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} ق (هـ) د هـ + ب \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} ك (هـ) د هـ$$

$$= أ لا \{ ق (هـ) \} + ب لا \{ ك (هـ) \}$$

وخاصية الخطية هذه تمكننا من معالجة المعادلة حداً حداً كي نحصل على محولاتها.

المثال ٦ ـ ١ ـ ٨ لنأخذ ق (هـ) = جتز أهـ = $(e^{\text{أهـ}} + e^{-\text{أهـ}})/\text{٢}$ ، فحسب نتيجة المثال (٦ ـ ١ ـ ٦) يكون

$$\text{لا}\ \{\text{جتز أهـ}\} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\frac{\text{١}}{\text{ز} - \text{أ}} + \frac{\text{١}}{\text{ز} + \text{أ}}\right] = \frac{\text{ز}}{\text{ز}^{\text{٢}} - \text{أ}^{\text{٢}}} ، \quad \text{(٦ ـ ٦)}$$

لكل ز > | أ | . وبالمثل

$$\text{لا}\ \{\text{جز أهـ}\} = \frac{\text{أ}}{\text{ز}^{\text{٢}} - \text{أ}^{\text{٢}}} ،\ \text{ز} > |\text{أ}| \quad \text{(٦ ـ ٧)}$$

المثال ٦ ـ ١ ـ ٩ تذكر من المعادلة (٣ ـ ٢٨) أن

$$e^{i\,\text{أهـ}} = \text{جتا أ هـ} + i\ \text{جا أ هـ}$$

نعيد خطوات المثال (٦ ـ ١ ـ ٦) فنجد ان التكامل يتقارب مع ز > ٠ من:

$$\text{لا}\ \{e^{i\,\text{أهـ}}\} = \frac{\text{١}}{\text{ز} - i\,\text{أ}} \quad \text{(٦ ـ ٨)}$$

فاذن:

$$\text{لا}\ \{\text{جتا أ هـ}\} + i\ \text{لا}\ \{\text{جا أهـ}\}) = \frac{\text{١}}{\text{ز} - i\,\text{أ}}$$

$$= \frac{\text{ز} + i\,\text{أ}}{(\text{ز} - i\,\text{أ})\ (\text{ز} + i\,\text{أ})} = \frac{\text{ز} + i\,\text{أ}}{\text{ز}^{\text{٢}} + \text{أ}^{\text{٢}}} .$$

فنساوي بين الاجزاء الحقيقية، ونساوي بين الاجزاء التخيلية فيكون:

$$\text{لا}\left\{\text{جتا أهـ}\right\} = \frac{\text{ز}}{\text{ز}^{2} + \text{أ}^{2}} \text{ ، } \text{لا}\left\{\text{جا أهـ}\right\} = \frac{\text{أ}}{\text{ز}^{2} + \text{أ}^{2}} \quad \ldots\ldots \quad (٦ - ٩)$$

المثــال ٦ ـ ١ ـ ١٠ ليكـن ق (هـ) = $\text{هـ}^{\text{ن}}$، ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... فنكــامــل بالاجزاء، وينتج:

$$\text{لا}\left\{\text{هـ}^{\text{ن}}\right\} = \int_{0}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,\text{هـ}^{\text{ن}}\,\text{د ن} = \left[\frac{-e^{-\text{زهـ}}\,\text{هـ}^{\text{ن}}}{\text{ز}}\right]_{0}^{\infty} + \frac{\text{ن}}{\text{ز}}\int_{0}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,\text{هـ}^{\text{ن}-1}\,\text{د ن}$$

$$= \frac{\text{ن}}{\text{ز}}\,\text{لا}\left\{\text{هـ}^{\text{ن}-1}\right\} \text{ ، لكل ز} > ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ - ١٠)$$

فاذن

$$\text{لا}\left\{\text{هـ}^{\text{ن}}\right\} = \frac{\text{ن}}{\text{ز}}\,\text{لا}\left\{\text{هـ}^{\text{ن}-1}\right\} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - 1)}{\text{ز}^{2}}\,\text{لا}\left\{\text{هـ}^{\text{ن}-2}\right\} = \ldots$$

$$= \frac{\text{ن}!}{\text{ز}^{\text{ن}}}\,\text{لا}\left\{\text{هـ}^{0}\right\}$$

ولكن $\text{هـ}^{0} = 1 = e^{0\,\text{هـ}}$. فحسب المثال (٦ ـ ١ ـ ٦) $\text{لا}\left\{\text{هـ}^{0}\right\} = 1/\text{ز}$ فإذن

$$\text{لا}\left\{\text{هـ}^{\text{ن}}\right\} = \frac{\text{ن}!}{\text{ز}^{\text{ن}+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ - ١١)$$

وهـذه النتـائج الابتـدائية مدرجة في الجدول (٦ ـ ١). وفي الملحق ٢ كشف أوسع بمحولات لابلاس:

الجدول ٦ - ١

ق (هـ)	لا { ق (هـ) }	مدى التعريف
هـ^{ن}	$\frac{ن!}{ز^{ن+1}}$	ز > ٠
e^{أهـ}	$\frac{1}{ز - أ}$	ز > أ (حقيقي) .
جا أهـ	$\frac{أ}{ز^2 + أ^2}$	ز > ٠
جتا أهـ	$\frac{ز}{ز^2 + أ^2}$	ز > ٠
جز أهـ	$\frac{أ}{ز^2 - أ^2}$	ز > |أ|
جتز أهـ	$\frac{ز}{ز^2 - أ^2}$	ز > |أ|

التمارين ٦ - ١

أوجد محولات لابلاس للاقترانات التالية ، حيث أ ، ب ثابتان . مع أي قيم ز تكون هذه المحولات معرفة؟

١. 5 هـ + ٢ ‏ ‏ ‏ ٢. أهـ + ب

٣. هـ^{2} + أهـ + ب ‏ ‏ ‏ ٤. هـ^{ن} (أهـ + ب)

٥. $e^{5هـ+2}$ ‏ ‏ ‏ ٦. جا (أهـ + ب)

٧. جتا (أهـ + ب) ‏ ‏ ‏ ٨. جز (أهـ + ب)

٩. جتز (أهـ + ب) ‏ ‏ ‏ ١٠. هـ $e^{هـ}$

١١. $e^{-هـ}$ جا هـ ‏ ‏ ‏ ١٢. $e^{أهـ}$ جتا ب هـ

١٣. استخرج المعادلة

$$لا \{ جه\ أهـ \} = \frac{أ}{ز^{2} - أ^{2}} .$$

١٤. استخرج قانوني (٦ ـ ٩) مباشرة بالتكامل بالأجزاء.

في التمارين ١٥ ـ ٢٢ أعطيت لا { ق (هـ) } والمطلوب ايجاد المعكوس ق (هـ) في كل حالة:

١٥. $\frac{7}{ز^{2}}$

١٦. $\frac{18}{ز^{3}} + \frac{7}{ز}$

١٧. $\frac{أ_{1}}{ز} + \frac{أ_{2}}{ز^{2}} + \ldots + \frac{أ_{ن+1}}{ز^{ن+1}}$

١٨. $\frac{ز + ١}{ز^٢ + ١}$ ٢١. $\frac{ز - ٢}{ز^٢ + ٣}$

١٩. $\frac{٧}{ز - ٣}$ ٢٢. $\frac{١}{(ز - ١)^٢}$

٢٠. $\frac{ز - ٢}{ز^٢ - ٢}$

٢٣. على فرض ان ق (هـ) = لا$^{-١}$ { قهٖ (ز) } وان ف (هـ) = لا$^{-١}$ { فهٖ (ز) } ، أثبت أن :

α ق (هـ) + β ف (هـ) = لا$^{-١}$ { α قهٖ (ز) + β فهٖ (ز) } ، حيث α ، β ثابتان .

تسمى هذه الخاصية بخاصية الخطية لمعكوسات محولات لابلاس }

٢٤*. إذا كان $\sum_{ن=١}^{\infty}$ ق$_{ن}$ (هـ) متسلسلة من الاقترانات متقاربة بانتظام ، ولكل منها محول لابلاسي معرَّف على ز ⩾ أ(اي ان لا { ق$_{ن}$ (ز) } موجود لكل ز ⩾ أ) . أثبت ان

$$ق (هـ) = \sum_{ن=١}^{\infty} ق_{ن} (هـ)$$

له محول لابلاس . على ز ⩾ أ تعريفه :

$$لا \{ ق (هـ) \} = \sum_{ن=٠}^{\infty} لا \{ ق_{ن} (هـ) \}$$

٦ ـ ٢ نظريات النقل

ومحولات لابلاس

للمشتقات والتكاملات

في هذا البند سندرس عدة طرق لتسهيل عملية حساب محولات لابلاس للاقترانات المعقدة.

كالاقتران التالي، وهو عظيم الأهمية في التطبيقات العملية (مثل النبضة الواحدة في نظـام تحكم آلي) ويسمى **اقـتران الـدرجـة الـواحدة، او اقتران هيفيسايد** (نسبة الى العالم الفيزيائي Oliver Heaviside)

$$ج\,(هـ - أ) = \begin{cases} ٠ \text{ ، } هـ < أ \\ ١ \text{ ، } هـ > أ \end{cases} \quad \text{......................} \quad (٦ ـ ١٢)$$

حيث أ ثابت.

فاذا كان أ = ٠ صار الاقتران

$$ج\,(هـ) = \begin{cases} ٠ \text{ ، } هـ < ٠ \\ ١ \text{ ، } هـ > ٠ \end{cases}$$

فاذا كان أ ≥ ٠ ، ز > ٠ يكون:

$$لا \{ ج\,(هـ - أ) = \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ}\, ج\,(هـ - أ)\, د\,هـ = \int_{أ}^{\infty} e^{-زهـ}\, د\,هـ = \frac{e^{-زهـ}}{ز}$$

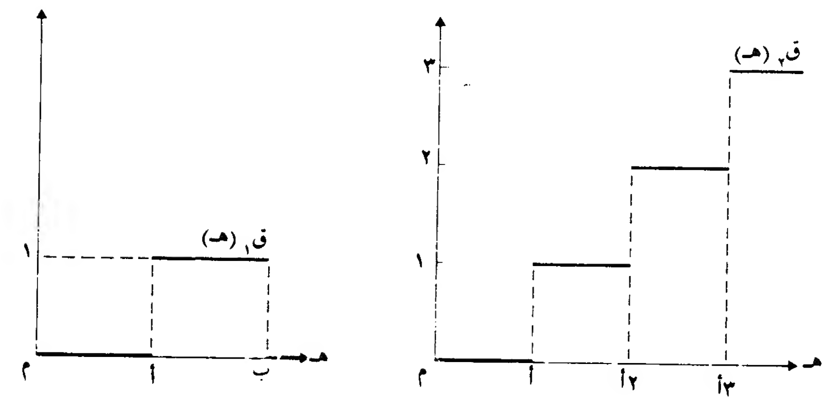
ويستعمل اقتران الدرجة الواحدة بمثابة لبنات لبناء اقترانات أخرى، فمثلاً:

ق$_1$ (هـ) = ج (هـ - أ) - ج (هـ - ب)، أ < ب .... (٦ - ١٤)

هو موجة مربعة بين أ ، ب ، في حين أن

ق$_2$ (هـ) = ج (هـ - أ) + ج (هـ - ٢أ) + ج (هـ - ٣أ)، أ > ٠ ،

يفضي الى سلم ذي ثلاث درجات. (انظر الشكل ٦ - ٢).



الشكل ٦ - ٢

فمن خاصية الخطية نستنتج ان

لا { ق$_1$ (هـ) } = $\frac{1}{ز}$ ($e^{-أز} - e^{-ب ز}$) ،

لا { ق$_2$ (هـ) } = $\frac{1}{ز}$ ($e^{-أز} + e^{-٢أز} + e^{-٣أز}$)

ويمكن ان نعمم هذا على النحو التالي

المثال ٦ - ٢ - ١ انظر في السلّم اللامتناهي :

ق (هـ) = ج (هـ) + ج (هـ - أ) + ج (هـ - ٢أ) + ج (هـ - ٣أ) + . . . ، أ > ٠

.... (٦ - ١٥)

ان محوله اللابلاسي

$$لا \{ ق(هـ) \} = \frac{١}{ز} (١ + e^{-أز} + e^{-٢أز} + e^{-٣أز} + \ldots) = \frac{١}{ز(١ - e^{-أز})}$$
.... (٦ - ١٦)

وفي الحصول على (٦ - ١٦) استعملنا القاعدة المشهورة عن مجموع المتسلسلة الهندسية :

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} س^{ن} = ١ + س + س^{٢} + \ldots = \frac{١}{١ - س} ، \quad |س| < ١ \quad .. \quad (٦ - ١٧)$$

حيث $س = e^{-أز}$، واستعملنا ايضاً توسيع النظرية (٦ - ٢) لتشمل متسلسلة لانهائية من الاقترانات (انظر التمرين ٢٤ في البند ٦ - ١).

المثال ٦ - ٢ - ٢ ليكن ق (هـ) يمثل الموجة المربعة الدورية المبينة بالشكل (٦ - ٣) : اننا نكتب ق (هـ) بالصيغة :

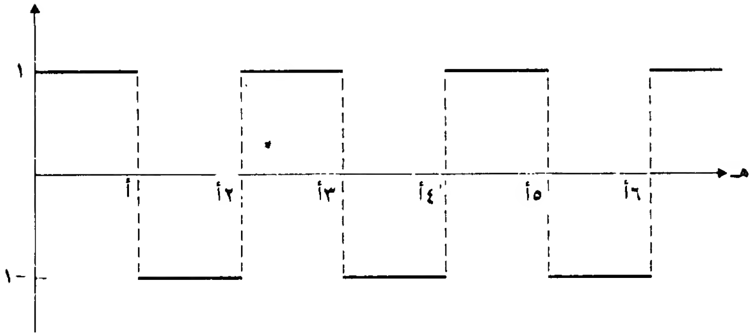
$$ق(هـ) = ج(هـ) - ٢ج(هـ - أ) + ٢ج(هـ - ٢أ) - ٢ج(هـ - ٣أ) + \ldots$$
.... (٦ - ١٨)

ومن ذلك ينتج ان

$$لا \{ ق(هـ) \} = \frac{١}{ز} (١ - ٢e^{-أز} + ٢e^{-٢أز} - ٢e^{-٣أز} + \ldots)$$

$$= \frac{١}{ز} \left(\frac{٢}{١ + e^{-أز}} - ١ \right) = \frac{١ - e^{-أز}}{ز(١ + e^{-أز})} \quad .... \quad (٦ - ١٩)$$

والنظرية التالية تعطينا طريقة سريعة لحساب محول لابلاس لا $\{e^{أهـ}$ ق (هـ) $\}$ عندما يكون لا $\{$ ق (هـ) $\}$ معروفاً.



الشكل ٦ ـ ٣

النظرية ٦ ـ ٣ نظرية النقل الأولى : اذا كـان

ق̂ (ز) = لا { ق (هـ) } فان لا { $e^{\text{أهـ}}$ ق (هـ) } (ز) = ق̂ (ز − أ) .

البرهان : حسب التعريف

لا { $e^{\text{أهـ}}$ ق (هـ) = $\int_{0}^{\infty}$ $e^{-\text{زهـ}}$ $e^{\text{أهـ}}$ ق (هـ) دهـ = $\int_{0}^{\infty}$ $e^{-(\text{ز}-\text{أ})\text{هـ}}$ ق (هـ) د هـ

= لا { ق (هـ) } (ز − أ) = ق̂ (ز − أ)

وتـوحي هذه الصيغـة بأننـا كى نضـع لا { $e^{\text{أهـ}}$ ق (هـ) } ، عندما نعرف لا { ق (هـ) } ، فكل ما نعمله هو ان نكتب ز − أ بدل ز في لا { ق (هـ) } .

وتسمى هذه الصيغة بنظرية النقل الأولى .

المثال ٦ ـ ٢ ـ ٣ اذا طبقنا نظرية النقل الأولى على الصيغ التي في الجدول (٦ ـ ١) نحصل على النتائج المبينة بالجدول ٦ ـ ٢ .

ق (هـ)	لا { ق (هـ) }	مدى التعريف
$e^{\text{أهـ}}\ \text{هـ}^{\text{ن}}$	$\frac{\text{ن}!}{(\text{ز}-\text{أ})^{\text{ن}+1}}$	ز > أ
$e^{\text{أهـ}}$ جا ب هـ	$\frac{\text{ب}}{(\text{ز}-\text{أ})^{2}+\text{ب}^{2}}$	ز > أ
$e^{\text{أهـ}}$ جتا ب هـ	$\frac{\text{ز}-\text{أ}}{(\text{ز}-\text{أ})^{2}+\text{ب}^{2}}$	ز > أ
$e^{\text{أهـ}}$ جه ب هـ	$\frac{\text{ب}}{(\text{ز}-\text{أ})^{2}-\text{ب}^{2}}$	ز > أ + | ب |
$e^{\text{أهـ}}$ جته ب هـ	$\frac{\text{ز}-\text{أ}}{(\text{ز}-\text{أ})^{2}-\text{ب}^{2}}$	ز > أ + | ب |

النظرية ٦ ـ ٤ : نظرية النقل الثانية اذا كان أ > ٠ فان

$$\text{لا}\,\{\text{ق}(\text{هـ}-\text{أ})\,\text{خ}(\text{هـ}-\text{أ})\} = e^{-\text{أز}}\,\text{لا}\,\{\text{ق}(\text{هـ})\}$$

البرهان: نستعمل التعريف مع تعويض س = هـ - أ فينتج :

$$\text{لا}\,\{\text{ق}(\text{هـ}-\text{أ})\,\text{خ}(\text{هـ}-\text{أ})\} = \int_{0}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,\text{ق}(\text{هـ}-\text{أ})\,\text{خ}(\text{هـ}-\text{أ})\,\text{د هـ} = \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{هـ}-\text{أ})\,\text{د هـ}$$

$$e^{-\text{زهـ}} = \int_{0}^{\infty} e^{-\text{ز}(\text{س}+\text{أ})}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = e^{-\text{أز}}\,\text{لا}\,\{\text{ق}(\text{هـ})\}$$

في هذه النظرية ننقل الاقتران أ وحدات الى اليمين ونبتره عند الصفر.

المثال ٦ ـ ٢ ـ ٤ لا { جا أ (هـ - ب) خ (هـ - ب) } = $e^{-ب ز}$ لا { جا أ هـ } = أ $e^{-ب ز}$/(ز^{٢} + أ^{٢}).

وأهم خصائص محولات لابلاس من حيث حل المعادلات التفاضلية خاصية تتعلق بتحويـل مشتقـة الاقـتران ق (هـ). وسنثبت فيما يلي ان مفاضلة الاقتران ق (هـ) يقابلها بالتقريب ضرب محوله في ز.

النظرية ٦ ـ ٥ خاصية التفاضل لنفرض ان ق (هـ) يحقق الشرط:

| ق (هـ) | ≥ ط $e^{أهـ}$ .... (٦ ـ ٢٠)

حيث هـ ≥ ة ، أ، ط، ة ثوابت غير سالبة. ولنفرض ان قَ (هـ) متصل أجزاءً لكل هـ ≥ ٠ فان محول قَ (هـ) اللابلاسي موجود، لكل قيم ز > أ، وان:

لا { قَ (هـ) } = ز لا { ق (هـ) } - ق (٠) } .... (٦ ـ ٢١)

البرهان: بما ان ق قابل للاشتقاق فهو متصل أيضاً ولذا فهو يحقق شروط نظرية الموجودية (٦ ـ ١) وله محول لابلاسي. فلنفرض اولاً ان قَ (هـ) متصل على هـ ≥ ٠ فنكامل تعريف لا { قَ (هـ) } بالاجزاء فينتج:

لا { قَ (هـ) } = $\int_{٠}^{\infty}$ $e^{-زهـ}$ قَ (هـ) د هـ = $e^{-زهـ}$ ق هـ $\Big|_{٠}^{\infty}$ + ز $\int_{٠}^{\infty}$ $e^{-زهـ}$ ق (هـ) د هـ
.... (٦ ـ ٢٢)

ولأن ق (هـ) يحقق (٦ ـ ٢٠) فان الحد الأيسر في (٦ ـ ٢٢) يتلاشى عند النهاية العليا حيث ز > أ، وحسب التعريف نحصل على لا { قَ } = ز لا { ق } - ق (٠).

فاذا كان قَ (هـ) متصلاً بالأجزاء، فالبرهان شبيه بما تقدم. انما نجزيء مدى التكامل الى اجـزاء يكـون قَ (هـ) متصـلاً في كل منهـا، ثم نكامل بالأجزاء كما في (٦ ـ ٢٢). فالحدود

الأولى تتلاشى كلها او تمحى، ما عدا − ق (٠)، والحدود الثانية تتجمع لتعطي ز لا { ق }

ويمكن توسيع النظرية (٦ ـ ٥) حتى تنطبق على الاقترانات المتصلة بالأجزاء (التمرين ٤٣ في نهاية هذا البند) ويمكن تطبيق (٦ ـ ٢١) مرة بعد مرة للحصول على تحويلات لابلاسية لمشتقات ذات رتب أعلى:

لا { قً } = ز لا { قَ } − قَ (٠) = ز[ز لا { ق } − ق (٠)] − قَ (٠)

أي ان

لا { قً } = ز٢ لا { ق } − ز ق (٠) − قَ (٠) .... (٦ ـ ٢٣)

وكذلك

لا { قًّ } = ز٣ لا { ق } − ز٢ ق (٠) − ز قَ (٠) − قً (٠)

وهذا يفضي بالاستقراء الى التوسيع التالي للنظرية (٦ ـ ٥):

النظرية ٦ ـ ٦ اذا كان ق(ك) (هـ) يحقق (٦ ـ ٢٠) مع ك = ٠، ١، ٢، ...، ن − ١ وكان ق(ن) (هـ) متصلاً بالأجزاء على هـ ≥ ٠ فان لا { ق(ن) (هـ) } موجود وهو كما يلي:

لا { ق(ن) (هـ) } = زن لا { ق } − زن−١ ق (٠) − زن−٢ قَ (٠) − ... − ق(ن−١) (٠) (٦ ـ ٢٤)

والنظريتان ٦ ـ ٥ و٦ ـ ٦ مهمتان لأنهما تستعملان لتغيير محول المعادلة التفاضلية اللابلاسي الى معادلة تقتصر على محول الحل. وسندرس تطبيق ذلك في البند (٦ ـ ٣) والبنود التي تليه. والنظريتان مهمتان ايضاً لأنهما تفيدان في ايجاد محولات بعض الاقترانات.

المثال ٦ ـ ٢ ـ ٥ إفرض ان ق (هـ) = جا٢ أهـ، فيكون:

قَ (هـ) = ٢ أ جا أ هـ جتا أ هـ = أ جا ٢ أ هـ

فإذن

$$\frac{٢ أ^٢}{ز^٢ + ٤ أ^٢} = لا \{ قَ \} = ز لا \{ ق \} - ق (٠)$$

ولأن ق (٠) = ٠ يكون

$$لا \{ جا^٢ أ هـ \} = \frac{٢أ^٢}{ز (ز^٢ + ٤ أ^٢)} ، ز > ٠$$

المثال ٦ ـ ٢ ـ ٦ إفرض ان ق (هـ) = هـ جا أ هـ، فيكون:

$$قَ (هـ) = جا أهـ + أهـ جتا أهـ ، قً (هـ) = ٢ أ جتا أهـ - أ^٢ هـ جا أهـ$$

ولأن ق (٠) = قَ (٠) = ٠ ، يكون:

$$٢ أ لا \{ جتا أهـ \} - أ^٢ لا \{ ق (هـ) \} = لا \{ قً \} = ز^٢ لا \{ ق \}$$

أي ان

$$(ز^٢ + أ^٢) لا \{ ق \} = ٢ أ لا \{ جتا أهـ \} = \frac{٢ أز}{ز^٢ + أ^٢}$$

اي ان

$$لا \{ ق \} = \frac{٢ أز}{(ز^٢ + أ^٢)^٢} ، ز > ٠ ،$$

ولأن مفاضلة ق (هـ) تقابل الضرب في ز، فلا يستغرب ان تكون مكاملة ق (هـ) تقابل القسمة على ز:

النظرية ٦ ـ ٧ خاصية التكامل اذا كان ق (هـ) متصلاً بالاجزاء ويحقق الشرط (٦ ـ ٢٠) ، يكون

$$لا \{ \int_{0}^{\infty} ق(ي)\, دي \} = \frac{1}{ز} لا \{ ق(هـ) \} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ ـ ٢٥)$$

البرهان : بما ان ق (هـ) يحقق شروط نظرية الموجودية (٦ ـ ١) فان لا { ق (هـ) } موجود.

ويمكن ان نعتبر ان أ > ٠ لأنه اذا كانت (٦ ـ ٢٠) تصح مع أ = ٠ فهي تصح ايضاً مع أ > ٠ وليكن

$$ف(هـ) = \int_{0}^{هـ} ق(ي)\, د ي$$

، فيكون ف متصلاً (انظر التمرين ٤١)، ويكون:

$$| ف(هـ) | \leqslant \int_{0}^{هـ} | ف(ي) | دي \leqslant ط \int_{0}^{هـ} e^{أي} دي \leqslant (\frac{ط}{أ}) e^{أهـ}.$$

فإذن ف يحقق ايضاً نظرية الموجودية. ولأن فَ (هـ) = ق (هـ)، الا عند النقاط التي فيها ينقطع ق (النظرية الأساسية في الحسبان)، فبأمكاننا ان نستعمل خاصية التفاضل، فيكون:

$$لا \{ ق(هـ) \} = لا \{ فَ(هـ) \} = ز لا \{ ف(هـ) \} - ف(٠).$$

ولكن ف (٠) = ٠ اذن فقد اكتمل البرهان.

المثال ٦ ـ ٢ ـ ٧ سنستعمل خاصية التكامل لاستخراج محول لابلاس للتكاملة:

$$\int_{0}^{هـ} ي\ جا\ ي\ د\ ي. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ ـ ٢٦)$$

فمن (٦ ـ ٢٥) والمثال (٦ ـ ٢ ـ ٦) يكون

$$لا \{ \int_{0}^{هـ} ي\ جا\ ي\ د\ ي \} = \frac{1}{ز} لا \{ هـ\ جا\ هـ \} = \frac{٢}{(ز^{٢} + ١)^{٢}}$$

المثال ٦ ـ ٢ ـ ٨ اقتران النبضة الواحدة The unit impulse function

(ويسمى ايضاً دلتة ديرك Direc delta function) : δ (هـ - أ)، وهو اقتران من قبيل التجاوز، فهو يساوي صفراً دائماً الا عند هـ = ١ ، وخاصيته أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(هـ - أ)\, دهـ = ١ . \qquad \text{(٦ - ٢٧)}$$

وللتوضيح سنصف دلتة ديرك على فرض أن أ = ٠ :

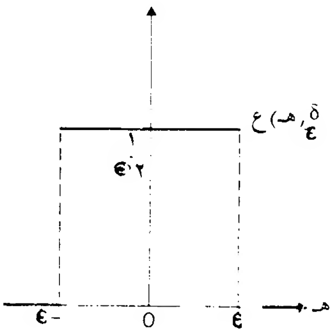
خذ الاقتران:

$$\delta_{\epsilon}(هـ) = \begin{cases} ١/٢\epsilon & -\epsilon < هـ < \epsilon \\ ٠ & |هـ| > \epsilon \end{cases}$$

، $\epsilon > ٠$ (انظر الشكل ٦ ـ ٤) فواضح ان δ_{ϵ}(هـ) متصل بالأجزاء وان :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(هـ)\, د هـ = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{١}{٢\epsilon}\, د هـ = ١$$

ونعرف δ (هـ) بالمعادلة δ (هـ) = نها$_{\epsilon \to ٠}$ δ_{ϵ} (هـ)



الشكل ٦ ـ ٤

ولا شك ان δ (هـ) ليس اقتراناً، ولكن لأنه نهاية اقترانات متصلة بالأجزاء، نعامله كما لو كان اقتـرانـا شرعيـاً. ولن نبرهن على هذه الحقيقة هنا، ولكننا سنسلم بها في كل ما يأتي من بحث عن اقتران دلتا.

ولأن δ (هـ - أ) تتمركز كل «كتلته» عند هـ = أ يظهر لنا أن

$$ج (هـ - أ) = \int_{-\infty}^{هـ} \delta (ى - أ)\, دى \quad \text{.......................} \quad (٦ - ٢٨)$$

وذلـك لأن التكـامـل في (٦ ـ ٢٨) يتـلاشى اذا كان هـ < أ ويسـاوي ١ اذا كان هـ > أ وحسب خاصية التكامل يكون

$$\frac{١}{ز}\, لا \{ \delta\, (هـ - أ) \} = لا \{ \int^{هـ} \delta\, (ى - أ)\, دى \} =$$

$$= لا \{ ج\, (هـ - أ) \} = \frac{e^{-أز}}{ز}$$

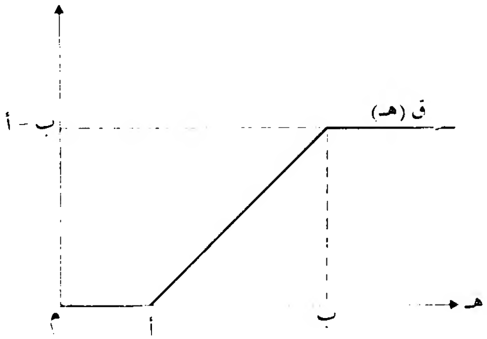
فاذن لا $\{ \delta$ (هـ - أ) $\} = e^{-أز}$، لكل أ $\geqslant$ ٠، ز > ٠

وتفيد خاصيتا التفاضل والتكامل في مناسبات أخرى أيضاً: فمثلاً: الاقتران المبين بالشكل (٦ ـ ٥) تكون مشتقته موجة مربعة (انظر (٦ ـ ١٤) فاذن

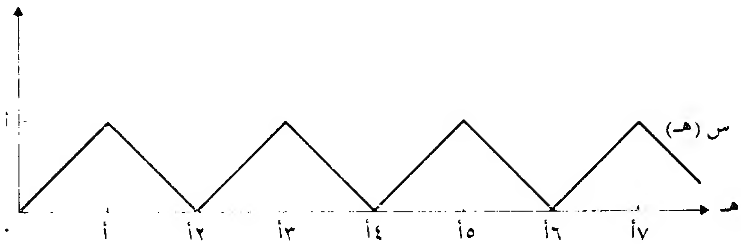
لا $\{$ ج (هـ - أ) - ج (هـ - ب) $\}$ = ز لا $\{$ ق (هـ) $\}$

أي ان

$$لا \{ ق\, (هـ) \} = \frac{١}{ز^{٢}} (e^{-أز} - e^{-ب ز})$$



الشكل ٦ ـ ٥



الشكل ٦ ـ ٦

المثال ٦ ـ ٢ ـ ٩ اوجد محول لابلاس للاقتران المنشاري س (ت) المبين بالشكل (٦ ـ ٦) :

لاحظ ان مشتقة س (هـ) هي الموجة المربعة الدورية ق (هـ) التي مَرَّ ذكرها في المثال (٦ ـ ٢ ـ ٢) فحسب النظرية ٦ ـ ٥ والمعادلة (٦ ـ ١٩) يكون :

$$ز\ لا \{ س\ (هـ) \} = لا \{ ق\ (هـ) \} = \frac{١ - e^{-أز}}{ز\ (١ + e^{-أز})}$$ ، فإذن :

$$لا \{ س\ (هـ) \} = \frac{١ - e^{-أز}}{ز^{٢}\ (١ + e^{-أز})} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٦ ـ ٢٩)$$

المثال ٦ ـ ٢ ـ ١٠ أوجد

$$لا^{-١} \left\{ \frac{٢}{ز^{٢} (ز^{٢} + ٤)} \right\}$$

نعرف المثال ٦ ـ ٢ ـ ٥ أن

$$لا \{ جا^{٢} هـ \} = \frac{٢}{ز (ز^{٢} + ٤)} .$$

نضرب طرفي هذه المعادلة في $\frac{١}{ز}$ ونطبق قاعدة التكامل فينتج:

$$\frac{٢}{ز^{٢} (ز^{٢} + ٤)} = \frac{١}{ز} لا \{ جا^{٢} هـ \} = لا \left\{ \int_{.}^{هـ} جا^{٢} ى \, دى \right\}$$

$$= لا \left\{ \frac{هـ - جا هـ جتا هـ}{٢} \right\}$$

فيكون

$$لا^{-١} \left\{ \frac{٢}{ز^{٢} (ز^{٢} + ٤)} \right\} = \frac{هـ - جا هـ جتا هـ}{٢} .$$

التمارين ٦ ـ ٢ :

١ . حقق القواعد المبينة بالجدول (٦ ـ ٢)، باستعمال تعريف محول لابلاس.

٢ . أوجد قيمة لا $\{ e^{\text{أهـ}} \text{ج} (\text{هـ} - \text{ب}) \}$

في التمارين ٣ الى ٨ حول كل اقتران زائدي الى اقتران أسي ثم بين ما يلي بتطبيق نظرية النقل الأولى

٣ . لا $\{ \text{جتز}^{٢} \text{ أهـ} \} = \dfrac{\text{ز}^{٢} - ٢ \text{ أ}^{٢}}{\text{ز}(\text{ز}^{٢} - ٤ \text{ أ}^{٢})}$

٤ . لا $\{ \text{جز}^{٢} \text{ أهـ} \} = \dfrac{٢ \text{ أ}^{٢}}{\text{ز}(\text{ز}^{٢} - ٤ \text{ أ}^{٢})}$

٥ . لا $\{ \text{جتز أهـ جا أهـ} \} = \dfrac{\text{أ}(\text{ز}^{٢} + ٢ \text{ أ}^{٢})}{\text{ز}^{٤} + ٤ \text{ أ}^{٤}}$

٦ . لا $\{ \text{جتز أهـ جا أهـ} \} = \dfrac{\text{ز}^{٣}}{\text{ز}^{٤} + ٤ \text{ أ}^{٤}}$

٧ . لا $\{ \text{جز أهـ جا أهـ} \} = \dfrac{٢ \text{ أ}^{٢} \text{ ز}}{\text{ز}^{٤} + ٤ \text{ أ}^{٤}}$

٨ . لا $\{ \text{جز أهـ جتا أهـ} \} = \dfrac{\text{أ}(\text{ز}^{٢} - ٢ \text{ أ}^{٢})}{\text{ز}^{٤} + ٤ \text{ أ}^{٤}}$

باستعمال الطريقة الثانية اوجد محولات لابلاس المبينة بالتمارين ٩ الى ١٤ :

٩. لا { جتز أهـ جتز ب هـ }

١٠. لا { جز أهـ جز ب هـ }

١١. لا { جتز أهـ جا ب هـ }

١٢. لا { جتز أهـ جتا ب هـ }

١٣. لا { جز أهـ جا ب هـ }

١٤. لا { جز أهـ جتا ب هـ }

بين ما يلي في التمارين ١٥ الى ١٧ باستعمال نظرية النقل الثانية :

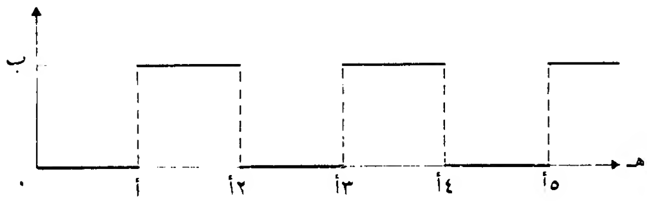
١٥. لا { جتا أ (هـ - ب) ج (هـ - ب) } = $\frac{\text{ز } e^{-\text{ب ز}}}{\text{ز}^{٢} + \text{أ}^{٢}}$

١٦. لا { جز أ (هـ - ب) ج (هـ - ب) } = $\frac{\text{أ } e^{-\text{ب ز}}}{\text{ز}^{٢} + \text{أ}^{٢}}$

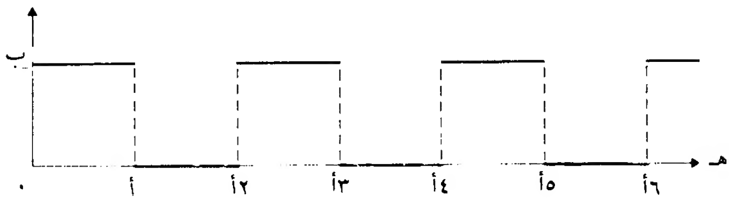
١٧. لا { جتز أ (هـ - ب) ج (هـ - ب) } = $\frac{\text{ز } e^{-\text{ب ز}}}{\text{ز}^{٢} - \text{أ}^{٢}}$

في التمارين ١٨ الى ٢٠ عبر عن الرسوم البيانية باقترانات درج وأوجد محولاتها اللابلاسية

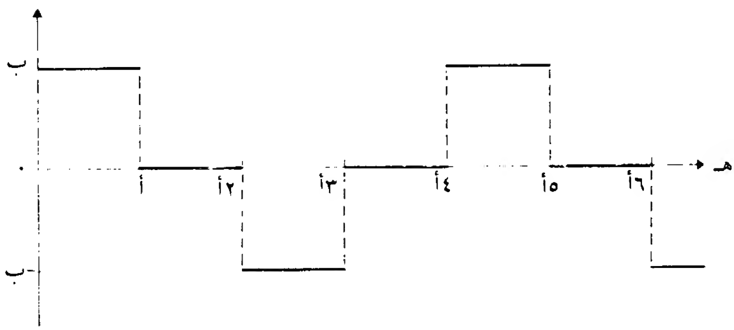
١٨ .



١٩ .



٢٠ .

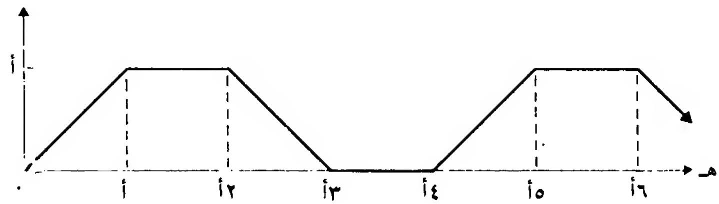


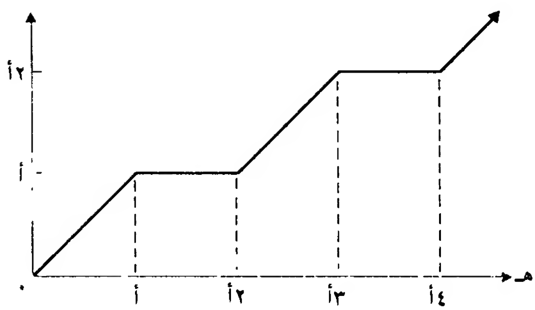
في التمارين ٢١ الى ٢٤ أوجد محول لابلاس لكل اقتران باستعمال خاصية التفاضل

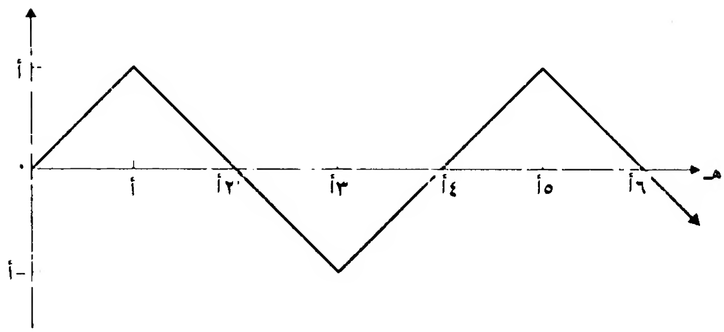
٢١ . جتا^{٢} أهـ ٢٢ . هـ جتا أهـ

٢٣ . هـ^{٢} جا أهـ ٢٤ هـ^{٢} جتا أهـ

في التمارين ٢٥ الى ٢٧ استعمل طريقة المثال (٦ - ٢ - ٩) لايجاد محولات الاقترانات المعطاة

. ٢٥


. ٢٦


. ٢٧


في التمارين ٢٨ الى ٣٢ استعمل خاصية التكامل في ايجاد ما يلي :

٢٨ . لا { $\int$ ى^{٢} جا أ ى دى }

٢٩. $\text{لا} \left\{ \int_{\text{٠}}^{\text{ـه}} \text{ى}^{\text{٢}}\ \text{جتا أ ى دى} \right\}$

٣٠. $\text{لا} \left\{ \int_{\text{٠}}^{\text{ـه}} \text{ى جتا أ ى دى} \right\}$

٣١. $\text{لا} \left\{ \int_{\text{٠}}^{\text{ـه}} \text{جتا}^{\text{٢}}\ \text{أ ى دى} \right\}$

٣٢. $\text{لا} \left\{ \int_{\text{٠}}^{\text{ـه}} \text{جا}^{\text{٢}}\ \text{أ ى دى} \right\}$

في التمارين ٣٣ الى ٤٠ استعمل طريقة المثال (٦ - ٢ - ١٠) في ايجاد معكوس المحولات اللابلاسية المعط

٣٣. $\dfrac{\text{١}}{\text{ز(ز − ١)}}$

٣٤. $\dfrac{\text{٢}}{\text{ز}^{\text{٣}} - \text{٤ز}}$

٣٥. $\dfrac{\text{٢}}{\text{ز}^{\text{٣}} + \text{٤ز}}$

٣٦. $\dfrac{\text{١}}{\text{ز}} \left(\dfrac{\text{ز − أ}}{\text{ز + ١}} \right)$

٣٧. $\dfrac{\text{١}}{\text{ز}^{\text{٢}}} \left(\dfrac{\text{ز − أ}}{\text{ز + ١}} \right)$

٣٨. $\dfrac{\text{١}}{\text{ز}^{\text{٣}} - \text{ز}^{\text{٢}}}$

٣٩. $\dfrac{\text{١}}{\text{ز}} \left(\dfrac{\text{ز + ٢}}{\text{ز}^{\text{٢}} + \text{٤}} \right)$

٤٠. $\dfrac{\text{١}}{\text{ز}} \left(\dfrac{\text{ز + ١}}{\text{ز}^{\text{٢}} - \text{٤}} \right)$

٤١ . ق (هـ) اقتران متصل بالأجزاء . استعمل نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات في بيان ان

$$ج (هـ) = \int_{ٲ}^{هـ} ق (ي) د ي$$ اقتران متصل في هـ .

[**إرشاد**: اكتب التكامل بصورة مجموع تكاملات في كل منها ق (هـ) متصل جزئياً]

٤٢ . بين ان الاقتران ق المذكور في التمرين ٤١ له مشتقة عند كل نقطة اتصال للمتغير ق، وانها تحقق العلاقة جَ (هـ) = ق (هـ) الا عند نقاط انقطاع ق .

٤٣ . افرض ان ق (هـ) متصل الا عند نقطة انقطاع قافز عند هـ = أ (< ٠) وافرض أنه يحقق كل باقي شروط النظرية ٦ ـ ٥ . اثبت ان :

$$لا \{ قَ (هـ) \} = ز لا \{ ق (هـ) \} - ق (٠) - e^{-أز} [ق (أ + ٠) - ق (أ - ٠)]$$

$$حيث\ ق (أ + ٠) = \lim_{د \to ٠^{+}} ق (أ + د)،\ ق (أ - ٠) = \lim_{د \to ٠^{-}} ق (أ + د)$$

٦ ـ ٣: تحويل المعادلات التفاضلية العادية

سنرى في هذا البند كيف ان المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة تحول، بواسطة محولات لابلاس، الى معادلات جبرية . من هذه المعادلات الجبرية سنجد المحولات اللابلاسية لحلول المعادلات الجبرية، وأخيراً سنعكس العملية فنجد معكوس المحول اللابلاسي فنجد بذلك حل المعادلة المطلوب .

فلنفرض اننا نريد ان نحل المعادلة التفاضلية التالية، وهي غير متجانسة، وذات معاملات ثابتة :

$$صً + أصَ + ب ص = ق (هـ)$$

(فيما يلي سنحسب محولات لابلاس، من غير ان نتساءل أموجودة هي أم لا . فكل حل نحصل عليه ينبغي ان نتحقق من صحته، بالتعويض في المعادلة الاصلية). نأخذ محول لابلاس لكل من الطرفين، فيكون:

$$لا \{ صً \} + أ لا \{ صَ \} + ب لا \{ ص \} = لا \{ ق (هـ) \}$$

فحسب المعادلتين ٦ ـ ٥ و ٦ ـ ٦ (خصائص التفاضل) ينتج أن:

$$[ز^{٢} لا \{ ص \} - ز ص (٠) - صَ (٠)] + أ [ز لا \{ ص \} - ص (٠)] + ب لا \{ ص \}$$
$$= لا \{ ق (هـ) \} \text{ فاذن}$$

$$[ز^{٢} + أز + ب] لا \{ ص \} - [ز ص (٠) + أص (٠) + صَ (٠)] = لا \{ ق (هـ) \}$$

اي ان

$$لا \{ ص \} = \frac{(ز + أ) ص (٠) + صَ (٠) + لا \{ ق (هـ) \}}{ز^{٢} + أز + ب} \quad \text{.............. (٦ ـ ٣٠)}$$

هنالك ثلاث حقائق تبينها العلاقة (٦ ـ ٣٠)

١ . يجب ان تعطى الشروط الابتدائية.

٢ . يجب ان يكون للاقتران ق (هـ) محول لابلاسي.

٣ . يجب ان يكون بامكاننا ان نجد $لا^{-١}$ للطرف الأيسر.

فطرق محولات لابلاس مهمتها في الأساس حل مسائل خطية ذات قيم إبتدائية ومعاملات ثابتة.

المثال ٦ ـ ٣ ـ ١ أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$صً - ٤ ص = ٠ \text{ ، } ص (٠) = ١ \text{ ، } صَ (٠) = ٢ \quad \text{............. (٦ ـ ٣١)}$$

حسب خاصية التفاضل، تحول هذه المعادلة الى معادلة جبرية:

$$[ز^2 \text{ لا } \{ (ص) - ز ص(٠) - صَ(٠)] - ٤ \text{ لا } \{ ص \} = [ز^2 \text{ لا } \{ ص \} - ز - ٢]$$
$$- ٤ \text{ لا } \{ ص \} = ٠$$

$$\text{فيكون لا } \{ ص \} = \frac{ز + ٢}{ز^2 - ٤} = \frac{١}{ز - ٢}$$

ومن الجدول (٦ ـ ١) نجد ان ص (هـ) = $e^{٢هـ}$ وهذه تحقق كل شروط المعادلة (٦ ـ ٣١).

المثال ٦ ـ ٣ ـ ٢ : حل

$$صً + W^2 ص = ٠ ، ص(٠) = أ، صَ(٠) = ب \quad \text{.......... (٦ ـ ٣٢)}$$

من خاصية التفاضل:

$$ز^2 \text{ لا } \{ ص \} - ز ص(٠) - صَ(٠) + W^2 \text{ لا } \{ ص \}$$
$$= ز^2 \text{ لا } \{ ص \} - ز أ - ب + W^2 \text{ لا } \{ ص \} = ٠$$

فيكون

$$\text{لا } \{ ص \} = \frac{أ ز + ب}{ز^2 + W^2} = أ(\frac{ز}{ز^2 + W^2}) + \frac{ب}{W}(\frac{W}{ز^2 + W^2}) \quad (٦ - ٣٣)$$

وبالرجوع الى الجدول (٦ ـ ١) نجد ان

$$ص(هـ) = أ \text{ جتا } W \text{ هـ} + \frac{ب}{W} \text{ جا } W \text{ هـ}$$

ويمكن بسهولة ان نتحقق انها حل المعادلة (٦ ـ ٣٢).

وفي حساب معكوس المحول في هذه المسألة استعملنا نتيجة التمرين (٦ ـ ١ ـ ٢٣). ويشير هذا المثال الى ان من الضروري ان نكتب لا { ص } على صورة تجميع خطي لحدود نعرف معكوسات محولاتها اللابلاسية وفي الأمثلة التالية سنعمد الى طريقة الكسور الجزئية من أجل الحصول على تجميعات خطية نعرف محولاتها العكسية.

المثال ٦ ـ ٣ ـ ٣ : حل

صً − ٥ صَ + ٤ ص = $e^{٢هـ}$ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٠.

باستعمال خاصية التفاضل والجدول (٦ ـ ١) ينتج :

[ز^{٢} لا { ص } − زص (٠) − صَ (٠)] − ٥ [زلا { ص } − ص (٠)] + ٤ لا { ص }
= لا { $e^{٢هـ}$ }

فيكون

$$[ز^{٢} لا \{ ص \} − ز] − ٥ [ز لا \{ ص \} − ١] + ٤ لا \{ ص \} = \frac{١}{ز − ٢}$$

أي أن

$$(ز^{٢} − ٥ز + ٤) لا \{ ص \} = ز − ٥ + \frac{١}{ز − ٢} = \frac{ز^{٢} − ٧ز + ١١}{ز − ٢}$$

فيكون

$$لا \{ ص \} = \frac{ز^{٢} − ٧ز + ١١}{(ز − ٢) (ز^{٢} − ٥ز + ٤)} = \frac{ز^{٢} − ٧ز + ١١}{(ز − ٢) (ز − ١) (ز − ٤)}$$

فقد حصلنا على عبارة يتكون مقامها من عوامل غير مكررة، من النوع (ز − أ). فلنبحث عن ثلاثة اعداد: أ ، ب ، حـ حيث

$$\frac{\text{أ}}{\text{ز} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ز} - ١} + \frac{\text{حـ}}{\text{ز} - ٤} = \frac{\text{ز}^{٢} - ٧\text{ز} + ١١}{(\text{ز} - ٢)\,(\text{ز} - ١)\,(\text{ز} - ٤)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦ \text{ـ} ٣٤)$$

وهناك طريقة سهلة للحصول على هذه الثوابت:

$$\text{أ} = \left.\frac{\text{ز}^{٢} - ٧\text{ز} + ١١}{(\text{ز} - ١)\,(\text{ز} - ٤)}\right|_{\text{ز}=٢} = -\frac{١}{٢} \text{ ،}$$

$$\text{ب} = \left.\frac{\text{ز}^{٢} - ٧\text{ز} + ١١}{(\text{ز} - ٢)\,(\text{ز} - ٤)}\right|_{\text{ز}=١} = \frac{٥}{٣} \text{ ،}$$

$$\text{حـ} = \left.\frac{\text{ز}^{٢} - ٧\text{ز} + ١١}{(\text{ز} - ٢)\,(\text{ز} - ١)}\right|_{\text{ز}=٤} = -\frac{١}{٦} .$$

لاحظ اننا نهمل المقام (ز − حـ) في كل حد على الطرف الأيمن من (٦ ـ ٣٤)، وفي مقام الطرف الأيسر، ثم نقدر قيمة الناتج باعتبار ز = حـ، لنحصل على قيمة الثابت المطلوب.

ولكي نرى لماذا تصح هذه الطريقة، نضرب طرفي (٦ ـ ٣٤) بالمقام (ز − ٢) فينتج:

$$\text{أ} + (\text{ز} - ٢)\left[\frac{\text{ب}}{\text{ز} - ١} + \frac{\text{حـ}}{\text{ز} - ٤}\right] = \frac{\text{ز}^{٢} - ٧\text{ز} + ١١}{(\text{ز} - ١)\,(\text{ز} - ٤)} . \qquad (٦ \text{ـ} ٣٥)$$

فاذا جعلنا ز = ٢ في الطرفين يتلاشى من الطرف الأيمن كل شيء عدا أ.

فاذن أ = $\left.\dfrac{ز^{٢} - ٧ز + ١١}{(ز - ١)(ز - ٤)}\right|_{ز=٢}$.

نعود الآن الى مسألتنا . فقد تبين أن

$$لا \{ص\} = \frac{(-\frac{١}{٢})}{ز - ٢} + \frac{(٣/٥)}{ز - ١} + \frac{-\frac{١}{٦}}{ز - ٤}$$

وهذا يعني حسب الجدول (٦ ـ ١) أن

$$ص(هـ) = -\frac{e^{٢هـ}}{٢} + \frac{٥e^{هـ}}{٣} - \frac{e^{٤هـ}}{٦}$$

النظرية ٦ ـ ٨ : العوامل (ز ـ حـ) غير مكررة . اذا كان

$$لا \{ص\} = \frac{ج(ز)}{(ز - حـ_{١})(ز - حـ_{٢}) \ldots (ز - حـ_{ك})}$$

حيث اذا كان د $\neq$ ذ كان حـ$_{د}$ $\neq$ حـ$_{ذ}$ فإن

$$ص(هـ) = أ_{١} e^{حـ_{١}هـ} + أ_{٢} e^{حـ_{٢}هـ} + \ldots + أ_{ك} e^{حـ_{ك}هـ}$$

$$حيث\ أ_{ى} = \left.\frac{ج(ز)}{(ز - حـ_{١}) \ldots (ز - حـ_{ى-١})(ز - حـ_{ى+١}) \ldots (ز - حـ_{ك})}\right|_{ز=حـ_{ى}}$$

المثال ٦ ـ ٣ ـ ٤ : حل

$$صً - ٤ صَ + ٤ ص = هـ^{٢} ، ص(٠) = ٠ ، صَ(٠) = ١ .$$

نستعمل خاصية التفاضل والجدول (٦ ـ ١)، فنجد ان :

$$[ز^٢ لا \{ ص \} - ١] - ٤ ز لا \{ ص \} + ٤ لا \{ ص \} = \frac{٢}{ز^٣} .$$

اي ان

$$(ز^٢ - ٤ز + ٤) لا \{ ص \} = \frac{٢}{ز^٣} + ١ = \frac{ز^٣ + ٢}{ز^٣}$$

$$، \quad لا \{ ص \} = \frac{ز^٣ + ٢}{ز^٣ (ز - ٢)^٢} \quad \text{.......................... (٦ ـ ٣٦)}$$

فالمقام هنا يتكون من عوامل مكررة من النوع (ز - حـ). فهنا نبحث عن ثوابت $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، $ب_١$ ، $ب_٢$ بحيث يكون

$$\frac{أ_١}{ز} + \frac{أ_٢}{ز^٢} + \frac{أ_٣}{ز^٣} + \frac{ب_١}{ز - ٢} + \frac{ب_٢}{(ز - ٢)^٢}$$

$$= \frac{ز^٣ + ٢}{ز^٣ (ز - ٢)^٢} \quad \text{.......................... (٦ ـ ٣٧)}$$

وهنا أيضاً طريقة سهلة لايجاد هذه المعاملات. افرض اننا نريد ان نجد $أ_٣$، فكما صنعنا سابقاً نضرب طرفي (٦ ـ ٣٧) في $ز^٣$ وينتج :

$$أ_١ ز^٢ + أ_٢ ز + أ_٣ + ز^٣ [\frac{ب_١}{ز - ٢} + \frac{ب_٢}{(ز - ٢)^٢}] = \frac{ز^٣ + ٢}{(ز - ٢)^٢} \quad \text{......... (٦ ـ ٣٨)}$$

واضح اننا نستطيع ان نعوض ز = ٠ فنجد ان $أ_٣ = \frac{١}{٢}$.

فلإيجاد $أ_٢$ نفاضل (٦ ـ ٣٨) بالنسبة الى ز وينتج:

$$٢أ_١ز + أ_٢ + ٣ز^٢ [\frac{ب_١}{ز - ٢} + \frac{ب_٢}{(ز - ٢)^٢}] + ز^٣ [\frac{ب_١}{ز - ٢} + \frac{ب_٢}{(ز - ٢)^٢}]'$$

$$= \frac{٣ز^٢}{(ز - ٢)^٢} - \frac{٢(ز^٣ + ٢)}{(ز - ٢)^٣} \qquad (٦ - ٣٩)$$

نضع ز = ٠ فينتج ان $أ_٢ = ٠$. ونفاضل (٦ ـ ٣٩) مرة أخرى، ونضع ز = ٠ فنجد ٢ $أ_١ = \frac{٣}{٤}$ اي ان $أ_١ = \frac{٣}{٨}$. وبالمثل

$$(ز - ٢)^٢ [\frac{أ_١}{ز} + \frac{أ_٢}{ز^٢} + \frac{أ_٣}{ز^٣}] + ب_١ (ز - ٢) + ب_٢ = \frac{ز^٣ + ٢}{ز^٣}$$

فينتج ان $ب_١ = - \frac{٣}{٨}$، ومن ثم ان $ب_٢ = \frac{٥}{٤}$. نعود الى (٦ ـ ٣٦) فنضع:

$$لا \{ص\} = \frac{٣/٨}{ز} + \frac{١/٢}{ز^٢} + \frac{١/٢}{ز^٣} + \frac{-٣/٨}{ز - ٢} + \frac{٥/٤}{(ز - ٢)^٢}$$

فحسب الجدولين ٦ ـ ١ و٦ ـ ٢ يكون:

$$ص(هـ) = \frac{٣}{٨} + \frac{هـ}{٢} + \frac{هـ^٢}{٤} - \frac{٣}{٨} e^{٢هـ} + \frac{٥}{٤} هـ e^{٢هـ}.$$

النظرية ٦ ـ ٩ : العوامل المكررة $(ز - حـ)^{ن}$. اذا كان

$$لا \{ ص \} = \frac{ج(ز)}{(ز-حـ)^{ن} ح(ز)} = \frac{أ_{١}}{ز - حـ} + \frac{أ_{٢}}{(ز-حـ)^{٢}} +$$

$$\ldots + \frac{أ_{ن}}{(ز-حـ)^{ن}} + ف(ز) ،$$

فان :

$$ص(هـ) = e^{أهـ} [أ_{١} + أ_{٢} \frac{هـ}{(١!)} + \ldots + أ_{ن} \frac{هـ^{ن-١}}{(ن-١)!}] + لا^{-١} \{ ف \}$$

حيث

$$أ_{ر} = \frac{١}{(ن-ر)!} \frac{د^{ن-١}}{د ز^{ن-١}} [\frac{ج(ز)}{ح(ز)}] |_{ز=حـ} ، ر = ١ ، \ldots ، ن$$

ويمكن استعمال النظريتين ٦ ـ ٨ و ٦ ـ ٩ عندما تكون حـ عدداً مركباً، الا ان النظرية التالية (٦ ـ ١٠) أنسب في هذه الحالة لأنها تعطي الحل مباشرة بدلالة الجيوب وجيوب التمام .

اذا كانت مسألة القيم الابتدائية ذات المعاملات الثابتة (الحقيقية) تؤدي الى معادلة ذات عوامل معقدة في مقام العبارة التي تعطي لا { ص } ، فان هذه العوامل تأتي ازواجاً ،كل عامل ومرافقه . فمثلاً في المعادلة (٦ ـ ٣٣) ،

$$لا \{ ص \} = \frac{أز + ب}{ز^{٢} + w^{٢}}$$

يستحسن الا نحلل $ز^{٢} + w^{٢}$ الى $(ز + wi)\,(ز - wi)$ بل ان نعبر عن المحول بالصيغة

$$\text{لا}\ \{\text{ص}\} = \text{أ}\left(\frac{ز}{ز^{٢} + w^{٢}}\right) + \frac{\text{ب}}{w}\left(\frac{w}{ز^{٢} + w^{٢}}\right)$$

فهذه تحل مباشرة بالرجوع الى الجدول في الملحق ٢ .

والمثال التالي ينطوي على بعض التعقيد :

المثال ٦ ـ ٣ ـ ٥ حل

$$\text{ص}'' + ٢\,\text{ص}' + ٢\,\text{ص} = \text{ق}\,(\text{هـ})،\quad \text{ص}\,(٠) = \text{ص}'\,(٠) = ١\,.$$

نطبق خاصية التفاضل ونجد قيمة لا { ص } فينتج :

$$\text{لا}\ \{\text{ص}\} = \frac{ز + ٣ + \text{لا}\ \{\text{ق}\,(\text{هـ})\}}{ز^{٢} + ٢ز + ٢} = \frac{ز + ٣ + \text{لا}\ \{\text{ق}\,(\text{هـ})\}}{(ز + ١)^{٢} + ١} \quad \ldots\ldots \quad (٦ - ٤٠)$$

وذلك بإكمال التربيع في المقام

فلو كان ق (هـ) = ٠ لكتبنا (٦ ـ ٤٠) بالشكل

$$\text{لا}\ \{\text{ص}\} = \frac{ز + ١}{(ز + ١)^{٢} + ١} + \frac{٢}{(ز + ١)^{٢} + ١}$$

فيظهر الحل على التو، بالنظر الى الجدول (٦ ـ ٢)، وهو

$$\text{ص}\,(\text{هـ}) = e^{-\text{هـ}}\,(\text{جتا هـ} + ٢\ \text{جا هـ})$$

فاذا كان ق (هـ) = هـ، فان (٦ − ٤٠) تصبح :

$$\text{لا}\{\text{ص}\} = \frac{\text{ز}^3 + 3\text{ز}^2 + 1}{\text{ز}^2[(\text{ز}+1)^2 + 1]} = \frac{\text{أ}(\text{ز}+1) + \text{ب}}{(\text{ز}+1)^2 + 1}$$

$$+ \frac{\text{جـ}_1}{\text{ز}} + \frac{\text{جـ}_2}{\text{ز}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ - ٤١)$$

وعلينا الآن ان نجد الثوابت أ ، ب ، جـ_1 ، جـ_2 . فلأيجاد أ ، ب نضرب طرفي (٦ - ٤١) في $(\text{ز}+1)^2 + 1$:

$$\frac{\text{ز}^3 + 3\text{ز}^2 + 1}{\text{ز}^2} = \text{أ}(\text{ز}+1) + \text{ب} + [(\text{ز}+1)^2 + 1]\left(\frac{\text{حـ}_1}{\text{ز}} + \frac{\text{حـ}_2}{\text{ز}^2}\right)$$

والآن نجعل ز يساوي أحد جذري $(\text{ز}+1)^2 + 1 = 0$، ولنقل $-1 + i$ ، فيكون

$$\left.\frac{\text{ز}^3 + 3\text{ز}^2 + 1}{\text{ز}^2}\right|_{\text{ز}=-1+i} = \text{أ}(\text{ز}+1) + \text{ب}\Big|_{\text{ز}=-1+i}$$

فيكون $2 + \frac{3}{2} i = \text{ب} + \text{أ} i$ ، أي أن $\text{أ} = \frac{3}{2}$ ، $\text{ب} = 2$

وبتطبيق النظرية (٦ - ٩) نجد ان $\text{حـ}_1 = -\frac{1}{2}$ ، $\text{حـ}_2 = \frac{1}{2}$

فيكون $\text{ص}(\text{هـ}) = e^{-\text{هـ}}\left[\frac{3}{2}\text{جتا هـ} + 2\text{ جا هـ}\right] - \frac{1}{2} + \frac{\text{هـ}}{2}$

النظرية ٦ ـ ١٠ : العامل المركب (ز − حـ)^{٢} + د^{٢} ، بلا تكرار إذا كان

$$\text{لا } \{\text{ص}\} = \frac{\text{ج (ز)}}{[(\text{ز} - \text{حـ})^{٢} + \text{د}^{٢}]\ \text{ح (ز)}} = \frac{\text{أ (ز} - \text{حـ) + ب}}{(\text{ز} - \text{حـ})^{٢} + \text{ب}^{٢}} + \text{ق (ز)}$$

يكون

$$\text{ص (هـ)} = \frac{e^{\text{حـ هـ}}}{\text{د}} (\text{د أ جتا دهـ + ب جا دهـ}) + \text{لا}^{-١} \{\text{ق}\}$$

حيث ب ، د أ هما الجزآن الحقيقي والتخيلي في المعادلة

$$\text{ب} + i\ \text{د أ} = \frac{\text{ج (ز)}}{\text{ح (ز)}} \Bigg|_{\text{ز=حـ}+i\,\text{د}}$$

نعود الى (٦ ـ ٤٠)، فنجد انه اذا كان ق (هـ) = $e^{-\text{هـ}}$ جا هـ، يكون :

$$\text{لا } \{\text{ص}\} = \frac{\text{ز} + ٣ + [(\text{ز} + ١)^{٢} + ١]^{-١}}{(\text{ز} + ١)^{٢} + ١} = \frac{\text{ز}^{٣} + ٥\ \text{ز}^{٢} + ٨\text{ز} + ٧}{[(\text{ز} + ١)^{٢} + ١]^{٢}}$$

$$= \frac{\text{أ}_{١}\ (\text{ز} + ١) + \text{ب}_{١}}{(\text{ز} + ١)^{٢} + ١} + \frac{\text{أ}_{٢}\ (\text{ز} + ١) + \text{ب}_{٢}}{[(\text{ز} + ١)^{٢} + ١]}$$

نطبق النظرية ٦ ـ ٩ ثانية ونضرب الطرفين في [(ز+ ١)^{٢} + ١]^{٢} ، فينتج :

$$\text{ز}^{٣} + ٥\ \text{ز}^{٢} + ٨\text{ز} + ٧ = [(\text{ز} + ١)^{٢} + ١]\ [\text{أ}_{١}\ (\text{ز} + ١) + \text{ب}_{١}]$$

$$+ [\text{أ}_{٢}\ (\text{ز} + ١) + \text{ب}_{٢}]$$

فنعوض في هذه المعادلة ز = -١ + i فنجد: ١ = ب$_٢$ + i أ$_٢$ ، أي ان ب$_٢$ = ١ ، أ$_٢$=٠
ونفاضل المعادلة مرتين فيتلاشى أ$_٢$ ، ب$_٢$ ويبقى

٦ز + ١٠ = ٦ أ$_١$ (ز + ١) + ٢ ب$_١$

نضع ز = -١ + i فينتج ان أ$_١$ = ١ ، ب$_١$ = ٢ فاذن

$$ص(هـ) = e^{-هـ}\left(جتا هـ + \frac{٥}{٢} جا هـ - \frac{هـ}{٢} جتا هـ\right)$$

وهكذا فاذا جابهتنا عوامل مركبة مكررة من قبيل $[(ز - حـ)^٢ + د^٢]^ن$ ، نضرب لا { ص } في $[(ز - حـ)^٢ + د^٢]$. ثم نجد ما تؤول اليه المعادلة بتعويض ز = حـ + i د ، ونفاضل مرة بعد مرة لنجد الثوابت.

وهنالك صيغتان كثيراً ما تفيدان في حل المسائل التي تتطلب تفاضل او تكامل المحول اللابلاسي للاقتران ق (هـ): فاذا عكسنا الترتيب الذي به تجري العمليتان نجد ان:

$$\frac{د}{د ز} لا \{ ق (هـ) \} = \int_{٠}^{\infty} \frac{د}{د ز} (e^{-زهـ}) ق (هـ) دهـ$$

$$= - \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} هـ ق (هـ) د هـ = -لا \{ هـ ق (هـ) \} \quad .... \quad (٦ - ٤٢)$$

$$، \int_{ز}^{\infty} لا \{ ق (هـ) \} (ز) د ز = \int_{٠}^{\infty} \int_{ز}^{\infty} e^{-زهـ} د ز ق (هـ) د هـ$$

$$= \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} \frac{ق (هـ)}{هـ} د هـ = لا \left\{ \frac{ق (هـ)}{هـ} \right\} \quad .... \quad (٦ - ٤٣)$$

ويصح هذا العكس للترتيب شريطة ان يكون لا { ق } موجوداً.ويمكن ان تستعمل هاتان

المتطابقتان، أحياناً (وليس دائماً)، لحل معادلات خطية بسيطة، ذات معاملات متغيرة بطرق محولات لابلاس. واليك هذا المثال:

المثال ٦ ـ ٣ ـ ٦ أنظر في المعادلة التالية ذات المعاملات المتغيرة:

هـ صً − هـ صَ − ص = ٠ ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ١ .

اذا جعلنا ص (ز) = لا { ص (هـ) } ، فبخاصية التفاضل والمعادلة (٦ ـ ٤٢) يكون:

لا { هـ صً } = − $\frac{د}{د ز}$ لا { صً }

= − $\frac{د}{د ز}$ { ز^{٢} ص (ز) − ز ص (٠) − صَ (٠) }

= − ز^{٢} صَ − ٢ ز ص

، لا { هـ صَ } = − $\frac{د}{د ز}$ لا { صَ } = − $\frac{د}{د ز}$ { ز ص − ص (٠) }

= − زصَ − ص

فبتعويض هذين في المحول اللابلاسي للمعادلة الأصلية ينتج:

− ز^{٢} صَ − ٢ ز ص + ز صَ + ص − ص = ٠

فبالترتيب والاختصار ينتج أن

(ز^{٢} − ز) صَ + ٢ ز ص = ٠

نقسم على ز^{٢} − ز = ز (ز − ١) فيكون

صَ + $\frac{٢}{ز - ١}$ ص = ٠

وبفصل المتغيرين: $\frac{د ص}{ص} = - \frac{٢}{ز - ١} د ز$ ،

وبالتكامل: لي ص = - ٢ لي (ز - ١) + حـ

اي ان

$$ص (ز) = \frac{حـ}{(ز - ١)^{٢}}$$

وحسب القانون ٢ في الملحق ٢ (او الجدول ٦ ـ ٢) يكون

$$ص (هـ) = حـ هـ e^{هـ}.$$

ولتعيين حـ نستعمل الشرط الابتدائي صَ (٠) = ١، مع ملاحظة ان

$$صَ (هـ) = حـ e^{هـ} (هـ + ١)$$

فيكون ١ = صَ (٠) = حـ، ويكون حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$ص (هـ) = هـ e^{هـ}$$

وننبه القارىء، مرة أخرى، الا يتوقع ان يكون بالامكان ان يحل بهذه الطريقة المعادلات ذات المعاملات المتغيرة. فالطريقة تنجح في الحالات التالية:

أ) عندما تكون المعاملات $أ_ر$ (هـ) حدوديات في هـ

ب) عندما تكون المعادلة التفاضلية في ص (ز) قابلة للحل.

جـ) عندما يكون بالامكان ايجاد محول ص (ز) العكسي

وقلما تلتقي كل هذه الشروط (انظر التمرين ٤٢).

وفي البند (٧ ـ ٨) تطبيقات أخرى على محولات لابلاس فيها تطوير للعملية يمكن

من حل منظومات من المعادلات التفاضلية.

التمارين ٦ ـ ٣

في التمارين من ١ الى ٢٠ حل مسائل القيم الابتدائية المعطاة:

١. صً + ص = ٠ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٠

٢. صً + ص = ٠ ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ١

٣. صً − حـ^{٢} ص = ٠ ، ص (٠) = أ ، صَ (٠) = ب

٤. صً − أ صَ = ٠ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = أ

٥. صً + ٢ صَ + ٥ ص = ٠ ، ص (٠) = صَ (٠) = ١

٦. صً − صَ + ص = ٠ ، ص (٠) = صَ (٠) = ١

٧. صً − ٤ صَ + ٥ ص = ١ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٤

٨. صً − ٢ صَ − ٣ ص = ٥ ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ١

٩. صً − ٩ ص = هـ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٢

١٠. صً − ٣ صَ − ٤ ص = هـ^{٢} ، ص (٠) = ٢ ، صَ (٠) = ١

١١. صًّ + ص = ٠ ، ص (٠) = صً (٠) = ١ ، صَ (٠) = −١

١٢. ص$^{(٤)}$ − ص = ٠ ، ص (٠) = صً (٠) = ١ ، صَ (٠) = صًّ (٠) = ٠

١٣. ص$^{(٤)}$ − ص = ٠ ، ص (٠) = صً (٠) = ٠ ، صَ (٠) − صًّ (٠) = ١

١٤. صً − ٣ صَ − ٢ ص = $e^{\text{٢هـ}}$ ، ص (٠) = صَ (٠) = ٠ ، صً (٠) = ١

١٥. صً + ك^{٢} ص = جتا ك هـ ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ك

١٦. صً + ٤ ص = جتا هـ، ص (٠) = صَ (٠) = ٠

١٧. صً + أ^{٢} ص = جا أ هـ ، ص (٠) = أ ، صَ (٠) = أ^{٢}

١٨. صً − ص = هـ $e^{\text{هـ}}$ ، ص (٠) = صَ (٠) = ١

١٩. ص$^{(٤)}$ − ص = جتا هـ ، ص (٠) = صً (٠) = ١ ، صَ (٠) = صً (٠) = ٠

٢٠. ص$^{(٤)}$ − ص = جز هـ ، ص (٠) = صً (٠) = ٠ ، صَ (٠) = صً (٠) = ١

استعمل الصيغتين (٦ ـ ٤٢) و (٦ ـ ٤٣) لايجاد المحولات اللابلاسية للاقترانات المذكورة في التمارين ٢١ الى ٣٦

٢١. هـ جتا ك هـ

٢٢. هـ^{٢} جتا ك هـ

٢٣. هـ جا ك هـ

٢٤. هـ^{٢} جا ك هـ

٢٥. هـ جتز هـ

٢٦. هـ^{٢} جتز هـ

٢٧. هـ جز هـ

٢٨. هـ^{٢} جز هـ

٢٩. (جا ك هـ)/هـ

٣٠. $\dfrac{\text{١ − جا أ هـ}}{\text{هـ}}$

٣١. $\dfrac{\text{١ − جتا أهـ}}{\text{هـ}}$

٣٢. $\int_{\text{٠}}^{\text{هـ}} \dfrac{\text{جا ك ى}}{\text{ى}}\ \text{د ى}$

٣٣. $\int_{\text{٠}}^{\text{هـ}} \dfrac{\text{١ − جا أ ى}}{\text{ى}}\ \text{دى}$

٣٤. $\int_{\text{٠}}^{\text{هـ}} \dfrac{\text{١ − جتز أ ى}}{\text{ى}}\ \text{دى}$

٣٥* حق (ن) = $\frac{٢}{\sqrt{\pi}} \int_{٠}^{ن} e^{-ى^٢}$ دى

٣٦. $\frac{e^{-ك^٢/٤هـ}}{\sqrt{\pi . هـ}}$

أوجد معكوس محول لابلاس لكل من التمارين من ٣٧ الى ٤٠ . استعمل التفاضلات والتكاملات

٣٧. لي $(١ + \frac{أ^٢}{ز^٢})$ ٣٨. لي $\frac{ز - أ}{ز - ب}$

٣٩. ظا$^{-١}$ $\frac{١}{ز}$ ٤٠. $\frac{١}{ز}$ ظا$^{-١}$ $\frac{١}{ز}$

٤١*. بيِّن ان لا { هـ^{ن} ق (هـ) } = $(-١)^{ن}$ $\frac{د^{ن}}{د ز^{ن}}$ لا { ق (هـ) }

[إرشاد: عمم المعادلة (٦ ـ ٤٢) بالاستقراء الرياضي].

٤٢*. خذ المعادلة صً + هـ^٢ ص = ٠ ، ص (٠) = ٠ ، صَ (٠) = ١

أ) استعن بنتيجة التمرين (٤١) لايجاد معادلة تفاضلية للعلاقة ص (ز) = لا { ص (هـ) } .

ب) حل المعادلة التفاضلية وأوجد ص (ز) . (لاحظ أنه لا يمكن قلب هذا المحول بالطرق التي درسناها) .

* يسمى هذا الاقتران باقتران الخطأ (error function) (خق = erf)

٦ ـ ٤ محولات التكاملات الملتفة

كثيراً ما يحدث في اثناء حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة المحولات ان ننتهي الى محول هو حاصل ضرب محولين آخرين. وقد أثبتنا في التمرين **٢٣** من البند **٦ ـ ١** أن

لا$^{-1}$ { ف + ق } = لا$^{-1}$ { ف } + لا$^{-1}$ { ق } .

الا أنه ليس صحيحاً أن لا$^{-1}$ { ف ق } = لا$^{-1}$ { ف } لا$^{-1}$ { ق } . (أنظر المثال ١٠ في البند ٦ ـ ٢). وسنعرِّف في هذا البند ملتفة الإقترانين ف، ق، وسنبين أن لا$^{-1}$ { ف ق } يساوي ملتفة لا$^{-1}$ { ف } ولا$^{-1}$ { ق } . وسنستخدم هذا الأمر في عدة وجوه.

تعريف: اذا كان ف (هـ) ، ق (هـ) اقترانين متصلين بالأجزاء، فان ملتفة ف، ق، وتكتب ف * ق، تعرَّف بأنها

ف * ق (هـ) = $\int_{0}^{هـ}$ ف (هـ − ي) ق (ي) د ي . . . . (٦ ـ ٤٤)

ويدل الرمز ف * ق (هـ) على ان الملتفة ف * ق هي دالة للمتغير المستقل هـ فاذا جعلنا ك = هـ − ي نجد أن

ف * ق (هـ) = − $\int_{هـ}^{0}$ ف (ك) ق (هـ − ك) د ك

= $\int_{0}^{هـ}$ ق (هـ − ك) ف (ك) د ك

= ق * ف (هـ) . . . . (٦ ـ ٤٥)

فإذن ف * ق (هـ) = ق * ف (هـ). فتغير الترتيب لا يغير في قيمة الملتفة واليك الآن

الحقيقة الرئيسية في هذا البند:

النظرية ٦ ـ ١١ : نظرية ملتفات المحولات اللابلاسية

ليكن ف (ز) = لا { ف (هـ) } ، ق (ز) = لا { ق (هـ) } ، فيكون لا { ف * ق (هـ) } = ف (ز) ق (ز) .

البرهان: حسب التعريف:

$$\text{ف}(\text{ز})\,\text{ق}(\text{ز}) = \left(\int_{0}^{\infty} e^{-\text{زي}}\,\text{ف}(\text{ي})\,\text{د ي}\right)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-\text{زك}}\,\text{ق}(\text{ك})\,\text{د ك}\right)$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\text{ز}(\text{ي}+\text{ك})}\,\text{ف}(\text{ي})\,\text{ق}(\text{ك})\,\text{د ك د ي} \quad \ldots \quad (٦ ـ ٤٦)$$

فاذا وضعنا هـ = ي + ك . يكون د هـ = د ك ويصير التكامل (٦ ـ ٤٦) كما يلي:

$$\text{ف}(\text{ز})\,\text{ق}(\text{ز}) = \int_{0}^{\infty}\int_{\text{ي}}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,\text{ف}(\text{ي})\,\text{ق}(\text{هـ}-\text{ي})\,\text{دهـ دي} \quad \ldots\ldots \quad (٦ ـ ٤٧)$$

نغير ترتيب التكامل مع ملاحظة ان $\int_{0}^{\infty}\int_{\text{ي}}^{\infty} \text{دهـ دي} = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\text{هـ}} \text{دي دهـ}$. (حقق ذلك!). فيصير التكامل (٦ ـ ٤٧):

$$\text{ف}(\text{ز})\,\text{ق}(\text{ز}) = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\text{هـ}} e^{-\text{زهـ}}\,\text{ف}(\text{ي})\,\text{ق}(\text{هـ}-\text{ي})\,\text{د ي دهـ}$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\text{زهـ}} \left[\int_{0}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{هـ}-\text{ي})\,\text{ف}(\text{ي})\,\text{دي}\right] \text{دهـ}$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,\text{ق} * \text{ف}(\text{هـ})\,\text{دهـ} = \int_{0}^{\infty} e^{-\text{زهـ}}\,\text{ف} * \text{ق}(\text{هـ})\,\text{د هـ}$$

$$= \text{لا}\,\{\,\text{ف} * \text{ق}\,\}$$

فقد تم البرهان.

وسنبدأ استخدام هذه النظرية بإيجاد معكوس المحول:

المثال ٦ ـ ٤ ـ ١ إحسب $\text{لا}^{-١} \{ \text{ز} / (\text{ز}^{٢} + ١)^{٢} \}$

لأن $\text{لا} \{ \text{جتا هـ} \} = \dfrac{\text{ز}}{\text{ز}^{٢} + ١}$ ، $\text{لا} \{ \text{جا هـ} \} = \dfrac{١}{\text{ز}^{٢} + ١}$

يكون

$$\text{لا}^{-١} \left\{ \frac{\text{ز}}{(\text{ز}^{٢} + ١)^{٢}} \right\} = \text{لا}^{-١} \left\{ \frac{\text{ز}}{\text{ز}^{٢} + ١} \cdot \frac{١}{\text{ز}^{٢} + ١} \right\}$$

وحسب النظرية (٦ ـ ١١)، هذا هو ملتفة جتا هـ ، جا هـ.

$$\text{ولكن جا هـ} * \text{جتا هـ} = \int_{٠}^{\text{هـ}} \text{جا (هـ} - \text{ي) جتا ي د ي}$$

$$= \int_{٠}^{\text{هـ}} (\text{جا هـ جتا ي} - \text{جتا هـ جا ي}) \text{ جتا ي د ي}$$

$$= \text{جا هـ} \int_{٠}^{\text{هـ}} \text{جتا}^{٢}\text{ي د ي} - \text{جتا هـ} \int_{٠}^{\text{هـ}} \text{جا ي جتا ي د ي}$$

وحسب جدول التكاملات (الملحق ١)، هذا يساوي:

$$\text{جا هـ} \left(\frac{\text{جا ي جتا ي} + \text{ي}}{٢} \right) - \text{جتا هـ} \frac{\text{جا}^{٢}\text{ي}}{٢} \Bigg|_{\text{ي}=٠}^{\text{ي}=\text{هـ}} = \frac{\text{هـ جا هـ}}{٢}$$

فيكون

$$\text{لا}^{-١} \left\{ \frac{\text{ز}}{(\text{ز}^{٢} + ١)} \right\} = \frac{\text{هـ حا هـ}}{٢} . \quad \text{.......................} \quad (٦ - ٤٨)$$

المثال ٦ ـ ٤ ـ ٢ إحسب $\text{لا}^{-1}\left\{ 1/\text{ز}^{2}(\text{ز}+1)^{2} \right\}$.

نعلم ان $\dfrac{1}{\text{ز}^{2}} = \text{لا}\left\{\text{هـ}\right\}$ ، $\dfrac{1}{(\text{ز}+1)^{2}} = \text{لا}\left\{\text{هـ}\, e^{-\text{هـ}}\right\}$

فيكون

$$\text{لا}^{-1}\left\{\frac{1}{\text{ز}^{2}(\text{ز}+1)^{2}}\right\} = \text{لا}^{-1}\left\{\frac{1}{\text{ز}^{2}}\cdot\frac{1}{(\text{ز}+1)^{2}}\right\} = \text{هـ} * \text{هـ}\, e^{-\text{هـ}}$$

ولكن $\text{هـ} * e^{-\text{هـ}} = \int_{0}^{\text{هـ}} (\text{هـ}-\text{ي})\,\text{ي}\, e^{-\text{ي}}\, \text{دي} = \text{هـ} \int_{0}^{\text{هـ}} \text{ي}\, e^{-\text{ي}}\, \text{دي} - \int_{0}^{\text{هـ}} \text{ي}^{2} e^{-\text{ي}}\, \text{دي}$

نكامل بالأجزاء، فينتج :

$$\text{هـ} * \text{هـ}\, e^{-\text{هـ}} = \left[-\text{هـ}\, e^{-\text{ي}}(1+\text{ي}) + e^{-\text{ي}}(\text{ي}^{2}+2\text{ي}+2)\right]_{0}^{\text{هـ}}$$

$$= \text{هـ} - 2 + (\text{هـ}+2)\, e^{-\text{هـ}}$$

أي أن

$$\text{لا}^{-1}\left\{\frac{1}{\text{ز}^{2}(\text{ز}+1)^{2}}\right\} = \text{هـ} - 2 + (\text{هـ}+2)\, e^{-\text{هـ}}$$

ومـع ان لنظـريـة الملتفة فائدة كبيرة جلية في حساب معكوس المحول، فان لها أيضاً تطبيقـات هامـة في حقـل آخـر مختلف جداً. ففي سنـة ١٩٣١ نشـر الـريـاضي الطليـاني فيتـوفـولتـيرا Vito Volterra كتـاباً احتوى على نموذج معقد للنمو السكاني. ويضيق المجال هنا عن محاولة البحث في هذا النموذج. الا من المعادلات الأساسية في المعادلة :

$$س(ن) = ق(ن) + \int_{٠}^{ن} أ(ن - ي)\, س(ي)\, د ي \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ - ٤٩)$$

والمعادلة التي من هذا النوع، على فرض ان ق (ن) ، أ (ن) متصلان، تسمى معادلة فولتيرا التكاملية ومنذ نشر فولتيرا بحوثه صار يصمم على غرار معادلاته التكاملية ظواهر شتى في الديناميكا الحرارية ونظرية المنظومات الكهربائية ونظرية المفاعلات النووية، والشؤون الطبية الكيمياوية.

ومن السهل ان نتبين كيف تفيد محولات لابلاس في حل المعادلات التي بالشكل (٦ ـ ٤٩): نأخذ محولات الطرفين، حسب نظرية الملتفات، ونرمز الى المحولات برموز مميزة فنحصل على الشكل

$$س(ز) = فه(ز) + أ(ز)\, س(ز)$$

أي أن

$$س(ز) = \frac{فه(ز)}{١ - أ(ز)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ - ٥٠)$$

وبالنظر الى المعادلة (٦ ـ ٥٠)، نلاحظ في الحال انه اذا كان فه (ز) ، أ (ز) معرَّفين على ز $\leqslant$ ز. ، يكون س (ز) بالمثل معرفاً ما دام أ (ز) $\neq$ ١ . فاذا عرف س (ز)، فعندها نجد حل $س(ن) = لا^{-١}\{س(ز)\}$ ، اذا كان ذلك ممكناً.

المثال ٦ ـ ٤ ـ ٣ خذ المعادلة التكاملية:

$$س(هـ) = هـ^{٢} + \int_{٠}^{هـ} جا(هـ - ي)\, س(ي)\, دي \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦ - ٥١)$$

نأخذ المحولات فيكون:

$$س(ز) = \frac{٢}{ز^٣} + \frac{١}{ز^٢ + ١} \cdot س(ز)$$

أي أن

$$س(ز) = \frac{٢/ز^٣}{١ - ١/(ز^٢ + ١)} = \frac{٢(ز^٢ + ١)}{ز^٥} = \frac{٢}{ز^٣} + \frac{٢}{ز^٥}$$

فحل المعادلة (٦ ـ ٥١) هو اذن

$$س(هـ) = هـ^٢ + \frac{١}{١٢} هـ^٤$$

وفي التمارين تطبيقات أخرى على نظرية الملتفات العظيمة الفائدة. وعلى الطالب ان يتذكر دائماً ان الصعوبة الكبرى في استعمال أي من هذه الطرق هي ان حساب معكوس المحول كثيراً ما يكون صعباً. ومعظم المسائل التي نقابلها تفضي، لسوء الحظ، الى عكس محولات لا تقع ضمن النماذج التي نعرفها. ولهذا السبب وضعت طرق لتقدير هذه المعكوسات. وعلى الطالب الذي يهمه الأمر ان يرجع في ذلك الى كتب متقدمة في محولات لابلاس. مثل كتاب ودر الممتاز*.

التمارين ٦ ـ ٤

في التمارين ١ إلى ٥ اوجد محول لابلاس لكل تكامل ملتف معطى

١ . $ق(هـ) = \int_{٠}^{هـ} (هـ - ي)^٣ \, جا ي \, د ي$

٢ . $ق(هـ) = \int_{٠}^{هـ} e^{-(هـ - ي)} \, جتا٢ي \, د ي$

* D.V. Widder, The Laplace Transformation, Princeton University, 1941.

٣. ق (هـ) = $\int_{٠}^{هـ}$ (هـ − ي)^{٣} ي^{٥} د ي

٤. ق (هـ) = $\int_{٠}^{هـ}$ جز٤ (هـ − ي) جتز ٥ي د ي

٥. ق (هـ) = $\int_{٠}^{هـ}$ $e^{١٧(هـ-ي)}$ ي^{١٩} دي

في التمارين ٦ الى ١٠ استعمل نظرية الملتفات في حساب معكوس لابلاس لكل من الاقترانات المعطاة

٦. فه (ز) = $\frac{٣}{ز^{٤}(ز^{٢}+١)}$

٧. فه (ز) = $\frac{أ}{ز^{٢}(ز^{٢}+أ^{٢})}$

٨. فه (ز) = $\frac{١}{(ز^{٢}+١)^{٢}}$

٩. فه (ز) = $\frac{١}{ز(ز^{٢}+أ^{٢})}$

١٠. فه (ز) = $\frac{١}{(ز^{٢}+١)^{٣}}$

١١. حل معادلة فولترا التكاملية س (هـ) = $e^{-هـ}$ − ٢ $\int_{٠}^{هـ}$ جتا (هـ − ي) س (ي) د ي

١٢. حل معادلة فولترا التكاملية س (هـ) = هـ + $\frac{١}{٦}$ $\int_{٠}^{هـ}$ (هـ − ي)^{٣} س (ي) د ي

١٣. خذ معادلة فولترا التكاملية س (هـ) = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ هـ + $\int_{٠}^{هـ}$ س (هـ − ي) س (ي) د ي

أ) بيِّن أن لا { س (هـ) } = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\sqrt{ز^٢ + ٤} + ز}{\sqrt{ز^٢ + ٤}}$)

[ارشاد: يلزم حل معادلة تربيعية تعتبر فيها اقترانات ز بمثابة ثوابت]

ب) استعن بالملحق ٢ في الحصول على الحل س (هـ) = $J_١$ (٢ هـ) حيث $J_١$ هو اقتران بيزيل من الرتبة الأولى .

جـ) بيّن أن لا { س (هـ) } يمكن ايضاً ان يكتب بالشكل

لا { س (هـ) } = ١ - $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\sqrt{ز^٢ + ٤} - ز}{\sqrt{ز^٢ + ٤}}$)

ومن ثم استنتج أن س (هـ) = δ (هـ) - $J_١$ (٢ هـ) هو أيضاً حل، حيث δ (هـ) هو دلته ديراك المعرفة في البند (٢ ـ ٦).

١٤ . من المعادلات التي تجابهنا كثيراً في التطبيقات معادلة فولترا التكاملية التفاضلية:

سَ (هـ) = أ س (هـ) + ق (هـ) + $\int_{.}^{هـ}$ حـ (هـ - ي) س (ي) دي ، س (هـ.) = س.

(٦ ـ ٥٢) ....

حيث أ ثابت، ق (هـ) ، أ (هـ) اقترانان متصلان معروفان. فعلى فرض ان أ (هـ) ، ق(هـ) لهما محولان لابلاسيان لكل ز $\geqslant$ ز. ، أوجد لا { س (هـ) } بدلالة هذين المحولين.

١٥ . حل معادلة فولترا التكاملية التفاضلية:

سَ (هـ) = س (هـ) + $e^{٢هـ}$ + $\int_{.}^{هـ}$ $e^{٢(هـ-ي)}$ س (ي) دي ، س (٠) = ١

٦ ـ ٥ : معادلات الفروق

وطرق محولات لابلاس

يسهل تعديل محولات لابلاس لحل معادلات الفروق الخطية ذات المعاملات الثابتة. خذ المعادلة:

$$ص_{ن+٢} + أ ص_{ن+١} + ب ص_{ن} = ق_{ن} ، \quad ص_{٠} = حـ_{٠} ، \quad ص_{١} = حـ_{١} \qquad (٦ - ٥٣)$$

وليكن ص (هـ) = ص ن، ق (هـ) = ق ن، اقترانين بمتغير حقيقي، ن ⩽ هـ < ن + ١ يتضح انه اذا كان ص ن ، ق ن معروفين لكل قيم ن، كان ص (هـ) ، ق (هـ) اقتراني درجة ارتفاعهما ص ن ، ق ن على الترتيب، في الفترة ن ⩽ هـ < ن + ١ . (انظر الشكل ٦ ـ ٧). فتصير المعادلة (٦ ـ ٥٣):

$$ص (هـ + ٢) + أ ص (هـ + ١) + ب ص (هـ) = ق (هـ)، ص (٠) = حـ_{٠} ، ص (١) = حـ_{١} \qquad (٦ - ٥٤)$$

فباستعمال اقتران الدرجة الواحدة الذي عرفناه في البند (٦ ـ ٢)، نكتب:

$$ق (هـ) = \sum_{ن=٠}^{\infty} ق_{ن} [ج (هـ - ن) - ج (هـ - (ن + ١))] \quad \ldots\ldots \quad (٦ - ٥٥)$$

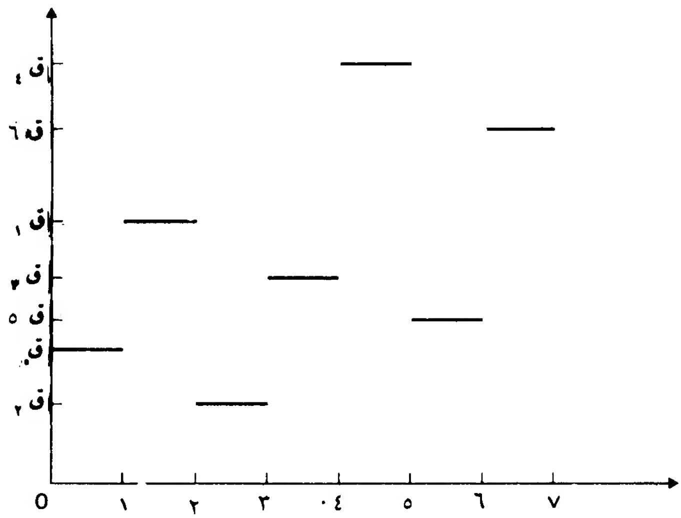
فعلى فرض ان بالأمكان ايجاد المحول اللابلاسي للمعادلة (٦ ـ ٥٥) حداً حداً، نجد:

$$لا \{ ق (هـ) \} = \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} ق (هـ) د هـ$$

$$= \sum_{ن=٠}^{\infty} ق_{ن} [\int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} ج (هـ - ن) د هـ - \int_{٠}^{\infty} e^{-زهـ} ج (هـ - (ن + ١)) د هـ]$$

$$= \sum_{ن=0} ف_{ن} \left[\frac{e^{-ن ز}}{ز} - \frac{e^{-(ن+1)ز}}{ز} \right]$$

$$= \frac{1 - e^{-ز}}{ز} \sum_{ن=0}^{\infty} ق_{ن} \, e^{-ن ز}$$



الشكل ٦ ـ ٧

ونجد مثل هذه النتيجة للمحول لا { ص (هـ) } . واما لا { ص (هـ + ١) } ولا { ص (هـ + ٢) } فيحتاجان الى طريقة أخرى من الحساب :

إجعل ي = هـ + ١ ، فيكون

$$لا \{ ص (هـ + ١) \} = \int_{0}^{\infty} e^{-زهـ} ص (هـ + ١) \, د هـ = \int_{1}^{\infty} e^{-ز(ي-١)} ص (ي) \, دي$$

$$= e^{ز} \left[\int_{0}^{\infty} e^{-زي} ص (ي) \, دي - \int_{0}^{1} e^{-زي} ص (ي) \, د ي \right]$$

$$= e^{\text{ز}} [\text{لا} \{ \text{ص} \} - \int_{0}^{1} e^{-\text{زي}} \, \text{ص} (٠) \, \text{دي}]$$

$$= e^{\text{ز}} \, \text{لا} \{ \text{ص} (\text{هـ}) \} - \frac{\text{ص} (٠)}{\text{ز}} (e^{\text{ز}} - ١) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٦ - ٥٧)$$

لاحظ التشابه مع خاصية التفاضل (النظرية ٦ ـ ٥).

ويمكن ان نجد لا { ص (هـ + ٢) } بتطبيق المعادلة (٦ ـ ٥٧) مرتين:

ليكن

$$\text{ع} (\text{هـ} + ١) = \text{ص} (\text{هـ} + ٢) \, ،$$

فيكون:

$$\text{لا} \{ \text{ص} (\text{هـ} + ٢) \} = \text{لا} \{ \text{ع} (\text{هـ} + ١) \} = e^{\text{ز}} \, \text{لا} \{ \text{ع} (\text{هـ}) \} - \frac{\text{ع} (٠)}{\text{ز}} (e^{\text{ز}} - ١)$$

$$= e^{\text{ز}} \, \text{لا} \{ \text{ص} (\text{هـ} + ١) \} - \frac{\text{ص} (١)}{\text{ز}} (e^{\text{ز}} - ١)$$

$$= e^{\text{ز}} [e^{\text{ز}} \, \text{لا} \{ \text{ص} (\text{هـ}) \} - \frac{\text{ص} (٠)}{\text{ز}} (e^{\text{ز}} - ١)] - \frac{\text{ص} (١)}{\text{ز}} (e^{\text{ز}} - ١)$$

$$= e^{٢\text{ز}} \, \text{لا} \{ \text{ص} (\text{هـ}) \} - \frac{(\text{ص} (٠) \, e^{\text{ز}} + \text{ص} (١))}{\text{ز}} (e^{\text{ز}} - ١) \qquad \ldots\ldots \qquad (٦ - ٥٨)$$

فتطبيق هذه النتائج على المعادلة (٦ ـ ٥٤) وتجميع الحدود المتشابهة، ينتج:

$$\text{لا} \{ \text{ص} (\text{هـ}) \} = \frac{(\text{حـ}_{٠} \, e^{\text{ز}} + \text{حـ}_{١} + \text{حـ}_{٠}) (e^{\text{ز}} - ١) + \text{ز} \, \text{لا} \{ \text{ق} (\text{هـ}) \}}{\text{ز} (e^{٢\text{ز}} + \text{ا} \, e^{\text{ز}} + \text{ب})}$$

وعندما تعكس هذه ينتج ص (هـ).

وأخيراً يحسب ص $_{ن}$ بحساب ص $_{ن}$ عند ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . .

وقبل حل معادلات فروق بهذه الطرق سنحسب عدداً من المحولات اللابلاسية التي تفيد في حل معادلات الفروق.

المثال ٦ ـ ٥ ـ ١ ليكن ق $_{ن}$ = أ^{ن} ، فحسب المعادلة (٦ ـ ٥٦) وقاعدة مجموع المتسلسلة الهندسية (٦ ـ ١٧) ينتج :

$$\text{لا}\{\text{ق}(\text{هـ})\} = \frac{1 - e^{-\text{ز}}}{\text{ز}} \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{أ}^{\text{ن}}\, e^{-\text{ن ز}}$$

$$= \frac{1 - e^{-\text{ز}}}{\text{ز}} \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} (\text{أ}\, e^{-\text{ز}})^{\text{ن}}$$

$$= \frac{1 - e^{-\text{ز}}}{\text{ز}} \cdot \frac{1}{1 - \text{أ}\, e^{-\text{ز}}} = \frac{1 - e^{-\text{ز}}}{\text{ز}(1 - \text{أ}\, e^{-\text{ز}})}$$

$$= \frac{e^{\text{ز}} - 1}{\text{ز}(e^{\text{ز}} - \text{أ})} \qquad \text{(٦ - ٥٩)}$$

[ملاحظة : يصح هذا عندما يكون أ $e^{-\text{ز}}$ < ١ أي عندما يكون ز > لي (١/أ) = −لي أ].

المثال ٦ ـ ٥ ـ ٢ اذا كان ق $_{ن}$ = ن أ^{ن} يكون :

$$\text{لا}\{\text{ق}(\text{هـ})\} = \frac{1 - e^{-\text{ز}}}{\text{ز}} \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{ن}\, (\text{أ}\, e^{-\text{ز}})^{\text{ن}}$$

فليكن ل = $\sum_{ن=٠}^{\infty}$ ن س^{ن} فيكون:

$$(١ - س)\ ل = ل - س\ ل = \sum_{ن=١}^{\infty} س^{ن} = \frac{١}{١ - س} - ١ = \frac{س}{١ - س}$$

أي ان

$$ل = س/(١ - س)^{٢}$$

فإذن:

$$لا\ \{\ ق\ (هـ)\ \} = \frac{أ\ e^{-ز}\ (١ - e^{-ز})}{ز\ (١ - أ\ e^{-ز})^{٢}} = \frac{أ\ (e^{ز} - ١)}{ز\ (e^{ز} - أ)^{٢}} \qquad (٦ - ٦٠)$$

وكما في المثال ٦ ـ ٥ ـ ١ تصح هذه النتيجة اذا كان ز > - لي أ.

المثال ٦ ـ ٥ ـ ٣ أذا كان ق$_{ن}$ = جتا ن θ ، ف$_{ن}$ = جا ن θ ، فيمكن ان نعرف ك$_{ن}$ = ق$_{ن}$ + i ف$_{ن}$ = $e^{i\,ن\,\theta}$ [حسب قانون أويلر (٣ ـ ٢٨)]، ومن هذا ينتج ان:

$$لا\ \{\ ك\ (هـ)\ \} = لا\ \{\ ق\ (هـ) + i\ ف\ (هـ)\ \} = \frac{١ - e^{-ز}}{ز} \sum_{ن=٠}^{\infty} e^{ن\,i\,\theta}\ e^{-ن\,ز}$$

$$= \frac{١ - e^{-ز}}{ز} \cdot \frac{١}{١ - e^{i\,\theta}\ e^{-ز}}$$

فنضرب البسط والمقام في $e^{ز}$ فينتج:

$$\frac{١ - e^{-ز}}{ز} \cdot \frac{١}{١ - e^{i\,\theta}\ e^{-ز}} = \frac{e^{ز} - ١}{ز\ (e^{ز} - e^{i\,\theta})}$$

$$= \frac{e^{\text{ز}} - 1}{\text{ز}\left[e^{\text{ز}} - (\text{جتا}\,\theta + i\,\text{جا}\,\theta)\right]}$$

ثم نضرب البسط والمقام في $(e^{\text{ز}} - \text{جتا}\,\theta + i\,\text{جا}\,\theta)$ فينتج:

$$\text{لا}\{\text{ق}(\text{هـ})\} + i\,\text{لا}\{\text{ف}(\text{هـ})\} = \frac{(e^{\text{ز}} - 1)(e^{\text{ز}} - \text{جتا}\,\theta + i\,\text{جا}\,\theta)}{\text{ز}\left[(e^{\text{ز}} - \text{جتا}\,\theta)^2 + \text{جا}^2\theta\right]}$$

ثم نساوي بين الحدود الحقيقية ونساوي بين الحدود التخيلية، فيكون:

$$\text{لا}\{\text{ق}(\text{هـ})\} = \frac{(e^{\text{ز}} - 1)(e^{\text{ز}} - \text{جتا}\,\theta)}{\text{ز}\left[(e^{\text{ز}} - \text{جتا}\,\theta)^2 + \text{جا}^2\theta\right]}$$

$$\text{لا}\{\text{ف}(\text{هـ})\} = \frac{\text{جا}\,\theta\,(e^{\text{ز}} - 1)}{\text{ز}\left[(e^{\text{ز}} - \text{جتا}\,\theta)^2 + \text{جا}^2\theta\right]}$$

المثال ٦ـ٥ ـ ٤ اذا كان $\text{ص}_{\text{ن}+2} - 3\,\text{ص}_{\text{ن}+1} + 2\,\text{ص}_{\text{ن}} = 0$ ، $\text{ص}_0 = 1$ ، $\text{ص}_1 = 2$

باستعمال المعادلتين (٦ ـ ٥٧) ، (٦ ـ ٥٨) ينتج:

$$\left[e^{2\text{ز}}\,\text{لا}\{\text{ص}\} - \frac{(e^{\text{ز}} + 2)(e^{\text{ز}} - 1)}{\text{ز}}\right] - 3\left[e^{\text{ز}}\,\text{لا}\{\text{ص}\} - \frac{e^{\text{ز}} - 1}{\text{ز}}\right]$$

$$+\, 2\,\text{لا}\{\text{ص}\} = 0$$

نجمع الحدود التي فيها لا { ص } فينتج :

$$(e^{2\text{ز}} - 3e^{\text{ز}} + 2)\,\text{لا}\,\{\text{ص}\} = \frac{e^{\text{ز}} - 1}{\text{ز}}\,(e^{\text{ز}} + 2 - 3)$$

أي ان

$$\text{لا}\,\{\text{ص}\} = \frac{(e^{\text{ز}} - 1)(e^{\text{ز}} - 1)}{\text{ز}(e^{\text{ز}} - 1)(e^{\text{ز}} - 2)} = \frac{e^{\text{ز}} - 1}{\text{ز}(e^{\text{ز}} - 2)}$$

فحسب (٦ ـ ٥٩) يكون $\text{ص}_{\text{ن}} = 2^{\text{ن}}$.

المثال ٦ ـ ٥ ـ ٥ $\text{ص}_{\text{ن}+2} + \text{ص}_{\text{ن}} = \text{ن}$ ، $\text{ص}_0 = 1$ ، $\text{ص}_1 = 0$

نستعمل (٦ ـ ٦٠) ، باعتبار أ = ١، فيكون

$$\left[e^{2\text{ز}}\,\text{لا}\,\{\text{ص}\} - \frac{e^{\text{ز}}(e^{\text{ز}} - 1)}{\text{ر}}\right] + \text{لا}\,\{\text{ص}\} = \frac{1}{\text{ز}(e^{\text{ز}} - 1)}$$

وإذن $(e^{2\text{ز}} + 1)\,\text{لا}\,\{\text{ص}\} = \frac{1}{\text{ز}(e^{\text{ز}} - 1)} + \frac{e^{\text{ز}}(e^{\text{ز}} - 1)}{\text{ز}} = \frac{e^{3\text{ز}} - 2e^{2\text{ز}} + e^{\text{ز}} + 1}{\text{ز}(e^{\text{ز}} - 1)}$

ونجزىء لا { ص } الى كسور جزئية فيصير :

$$\text{لا}\,\{\text{ص}\} = \frac{e^{3\text{ز}} - 2e^{2\text{ز}} + e^{\text{ز}} + 1}{\text{ز}(e^{\text{ز}} - 1)(e^{2\text{ز}} + 1)} = \frac{3e^{\text{ز}}(e^{\text{ز}} - 1)}{2\text{ز}(e^{2\text{ز}} + 1)}$$

$$+\ \frac{1}{2\text{ز}(e^{\text{ز}}-1)} - \frac{1}{2\text{ز}}$$

فلنجعل $\theta = \pi/2$ في المعادلة (٦ ـ ٦١)، أ = ١ في (٦ ـ ٩٥) ، (٦ ـ ٦٠) والنتيجة :

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{3}{2}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ن}\,\pi}{2} + \frac{\text{ن}}{2} - \frac{1}{2}$$

التمارين ٦ ـ ٥

حل المعادلات في التمارين ١ الى ١٠ باستعمال طرق هذا البند

١ . ص$_{ن+٢}$ + ٧ ص$_{ن+١}$ + ٦ ص$_{ن}$ = ٠ ، ص$_{٠}$ = ٠ ، ص$_{١}$ = ١

٢ . ص$_{ن+٢}$ + ٥ ص$_{ن+١}$ − ٦ ص$_{ن}$ = ٠ ، ص$_{٠}$ = ٣ ، ص$_{١}$ = ١١

٣ . ص$_{ن+٢}$ − ٦ ص$_{ن+١}$ + ٩ ص$_{ن}$ = ٠ ، ص$_{٠}$ = ٥ ، ص$_{١}$ = ١٢

٤ . ٦ ص$_{ن+٢}$ + ٥ ص$_{ن+١}$ + ص$_{ن}$ = ٠ ، ص$_{٠}$ = ١ ، ص$_{١}$ = ٠

٥ . ص$_{ن+٢}$ − ٢ ص$_{ن+١}$ + ٢ ص$_{ن}$ = ٠ ، ص$_{٠}$ = ١ ، ص$_{١}$ = ٢

٦ . ص$_{ن+٢}$ − ٣ ص$_{ن+١}$ + ٢ ص$_{ن}$ = ١ + ٥$^{ن+١}$ ، ص$_{٠}$ = ١ ، ص$_{١}$ = ٠

٧ . ص$_{ن+٢}$ − ٤ ص$_{ن+١}$ + ٤ ص$_{ن}$ = ن ٢^{ن} ، ص$_{٠}$ = ص$_{١}$ = ٠

٨ . ص$_{ن+٢}$ + ٥ ص$_{ن}$ = $\frac{\text{جا ن}\,\pi}{2}$ ، ص$_{٠}$ = ص$_{١}$ = ٠

٩ . ص$_{ن+٢}$ − ٥ ص$_{ن+١}$ + ٦ ص$_{ن}$ = ٤^{ن} ، ص$_{٠}$ = ٠ ، ص$_{١}$ = ١

١٠ . ص$_{ن+٢}$ − ٧ ص$_{ن+١}$ + ١٠ ص$_{ن}$ = ١٦ ن ، ص$_{٠}$ = ١ ، ص$_{١}$ = −٣

١١ . استنتج المعادلة (٦ ـ ٥٨) مباشرة بتعويض ي = هـ + ٢ في المحول لا { ص (هـ + ٢) } وهنالك طريقة أخرى كبيرة الفائدة في حل معادلات الفروق، وهي صورة متميزة عن محولات لابلاس :

عرِّف ك [ص ن] = $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ص_ن}{ز^{ن+١}} = \frac{ص_٠}{ز} + \frac{ص_١}{ز^٢} + \ldots$

فالمحول المتميز للمتغير $ص_{ن+١}$ يسهل ايجاده، وهو يعطى بصيغة شديدة بخاصية التفاضل في محولات لابلاس

$$ك [ص_{ن+١}] = \frac{ص_١}{ز} + \frac{ص_٢}{ز^٢} + \ldots$$

$$= ز [\frac{ص_٠}{ز} + \frac{ص_١}{ز^٢} + \frac{ص_٢}{ز^٣} + \ldots - \frac{ص_٠}{ز}]$$

$$= ز ك [ص_ن] - ص_٠ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٦ ـ ٦٣)$$

فنطبق (٦ ـ ٦٣) مرتين فينتج : $ك [ص_{ن+٢}] = ز^٢ ك [ص_ن] - ز ص_٠ - ص_١$

وبالمثل نحصل على $ك [ص_{ن+٣}]$ وهكذا.

ولاستعمال هذه الطريقة نحتاج الى جدول بمحولات عبارات شتى . مثلاً :

$$ك [أ^ن] = \frac{١}{ز} + \frac{أ}{ز^٢} + \frac{أ^٢}{ز^٣} + \ldots$$

$$= \frac{١}{ز} [١ + \frac{أ}{ز} + (\frac{أ}{ز})^٢ + \ldots]$$

$$= \frac{1}{ز(1 - أ/ز)} = \frac{1}{ز - أ} \quad \text{.......................} \quad (٦ - ٦٤)$$

باستعمال طرق مطابقة لما تقدم، اثبت ما يلي

١٢ . $ك[ن\, أ^{ن}] = \frac{أ}{(ز - أ)^{2}}$

١٣ . $ك[(ن + 1)\, أ^{ن}] = \frac{ز}{(ز - أ)^{2}}$

١٤ . $ك\left[\frac{1}{ن!}\right] = \frac{e^{1/ز}}{ز}$

١٥ . $ك[جتا\, ن\, \theta] = \frac{ز - جتا\, \theta}{(ز - جتا\, \theta)^{2} + جا^{2}\, \theta}$

١٦ . $ك[جا\, ن\, \theta] = \frac{جا\, \theta}{(ز - جتا\, \theta)^{2} + جا^{2}\, \theta}$

[ارشـاد: استعمـل نظـريـة ديمـواڤـر: $e^{i ن \theta} = جتا\, ن\, \theta + i\, جا\, ن\, \theta$ ، بالأضافة الى المعادلة (٦ ـ ٦٤)، لأثبات ١٥ ، ١٦]

وباستعمال القواعد السابقة يسهل حل معادلة الفرق $ص_{ن+1} - ص_{ن} = 2^{-ن}$ ، $ص_{0} = 2$

فمن (٦ ـ ٦٣) و (٦ ـ ٦٤) ينتج :

$$ز\, ك[ص_{ن}] - 2 - ك[ص_{ن}] = \frac{1}{ز - \frac{1}{2}}$$

فبتجميع الحدود المتشابهة ينتج :

$$ك[ص_ن] = \frac{٢ز}{(ز - ١)(ز - \frac{١}{٢})} = \frac{٤}{ز - ١} - \frac{٢}{ز - \frac{١}{٢}}$$

فيكون

$$ص_ن = ٤ - ٢ (٢)^{-ن}$$

بهذه الطريقة حل معادلات الفروق التالية :

١٧ . $ص_{ن+١} - ٢ ص_ن = ٢٠$ ، $ص_٠ = ١٠٠$

١٨ . $ص_{ن+٢} + ص_ن = ٠$ ، $ص_٠ = ٠$ ، $ص_١ = ١٠٠٠$

١٩ . $ص_{ن+٢} - ٣ ص_{ن+١} + ٢ ص_ن = ١ + ٥^{ن+١}$ ، $ص_٠ = ص_١ = ٠$

٢٠ . $ص_{ن+٢} + ص_ن = ن + ١$ ، $ص_٠ = ١$ ، $ص_١ = -\frac{١}{٢}$.

الفصل السابع

مبادىء منظومات المعادلات التفاضلية

٧ ـ ١ : مقدمة

في الفصول السابقة كانت كل مسألة نعالجها تنطوي على اقتران واحد مجهول، وتقتضي حل معادلة تفاضلية واحدة. وفي هذا الفصل سندرس منظومات من المعادلات التفاضلية الآنية ذات الرتبة الأولى. وتنشأ هذه المنظومات في المسائل التي تحتوي على أكثر من اقتران واحد مجهول، على مجاهيل كلها دوالّ لمتغير واحد مستقل، وهوعلى الغالب الزمن. لذا عمدنا، طوال هذا الفصل، رغبة بالانسجام، الى الرمز للمتغير المستقل بالرمز ن. واما المتغيرات الدوالّ فرموزها س (ن) ، ص (ن) أو $س_١$ (ن) ، $س_٢$ (ن) ، . . . ، $س_م$ (ن).

ويقتصر هذا الفصل على فحص طرق اشتقاق بعض المنظومات البسيطة من المعادلات وطرق حلها. ولن نلجأ الى طرق المصفوفات في البنود التسعة الأولى من الفصل، الا ان من المرغوب فيه إلمام القارىء ببعض الخصائص الأولية للمحددات (انظر

الملحق ٤). وفي البنـد (٧ ـ ١) أمثلة تبـين كيف تنشأ بعض المنظـومـات البسيطـة، مع اشارات الى طرق الحل. وفي البنود اللاحقة ننظر في منظومات الرتبة الأولى ونبين لماذا هي المنظـومـات الـوحيـدة التي نحتاج الى دراستها، مع اهتمام خاص في الحصول على حلول للمنظومات الخطية ذات الرتبة الأولى.

المثال ٧ ـ ١ ـ ١ افرض ان محلولاً كيمياوياً يجري من وعاء ما، بسرعة تتناسب مع حجمه ويصب في وعـاء آخـر، ويجـري منـه بسـرعـة ثابتـة. وليكن س (ن) ، ص (ن) حجمي المحلول، في الـوعـاءين الأول والثـاني على الـترتيب، في الزمن ن. (قد يكون الوعاءان، على سبيـل المثـال، حجـرتـين، ومن ثم فما نتكلم عنه هو انتشار المحلول من خلال جدار الحجرة). فلوضع المعادلات اللازمة نلاحظ ان تغير الحجم يساوي الفرق بين الوارد الى الوعاء والصادر منه. وتغير الحجم* هو مشتقة الحجم بالنسبة الى الزمن. وبما انه يصب في الوعاء الأول اي محلول، فالتغير في حجمه يساوي الصادر عنه:

$$\frac{د\,س}{د\,ن} = -\,حـ_{١}\,س$$

، حيث حـ$_{١}$ هو ثابت التناسب. وهو موجب

وكمية المحلول حـ$_{١}$ س التي تخرج من الوعاء الأول هي الوارد الى الوعاء الثاني. فليكن حـ$_{٢}$ هو الصادر من الوعاء الثاني، وهو ثابت. فتغير الحجم في الوعاء الثاني يساوي الفرق بين الوارد والصادر:

$$\frac{د\,ص}{د\,ن} = حـ_{١}\,س - حـ_{٢}$$

* عبارة المؤلف هنا ليست دقيقة، فهو يعني بتغير الحجم مقدار هذا التغير في وحدة الزمن او ما نسميه بسرعة التغير (المترجم).

وهكـذا فقـد وصفنـا جريان المحلول بمعادلتين تفاضليتين. ولأن الأمر سينطوي على أكثر من معادلة واحدة فاننا نقول ان ما حصلنا عليه هو منظومة من المعادلات التفاضلية هي :

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -\text{ح}_{1}\,\text{س}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{ح}_{1}\,\text{س} - \text{ح}_{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٧ - ١)$$

حيث ح_{1} ، ح_{2} ثابتان موجبان.

وحل المنظومة (٧ ـ ١) نعني به اقترانين : س (ن) ، ص (ن)، يحققان المعادلتين (٧ ـ ١) في آن واحد. ومن السهل حل هذه المنظومة : بحل المعادلتين بالتتابع (وهذا ما لا يكون في العادة ممكناً) :

فاذا رمزنا للحجم الابتدائي في الوعائين بالرمزين س (٠) ، ص (٠) على التوالي، نجد ان حل المعادلة الأولى هو:

$$\text{س (ن)} = \text{س (٠)}\, e^{-\text{ح}_{1}\text{ن}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٧ - ٢)$$

فنعوض هذا في ثانية المعادلتين (٧ ـ ١) ، فينتج

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{ح}_{1}\,\text{س (٠)}\, e^{-\text{ح}_{1}\text{ن}} - \text{ح}_{2}$$

وبعد التكامل نجد ان

$$\text{ص (ن)} = \text{ص (٠)} + \text{س (٠)}\,(1 - e^{-\text{ح}_{1}\text{ن}}) - \text{ح}_{2}\text{ن} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٧ - ٣)$$

والمعادلتان (٧ ـ ٢) ، (٧ ـ ٣) معاً هما الحل الوحيد للمنظومة (٧ ـ ١) الذي يحقق شروطها الابتدائية.

المثال ٧ ـ ١ ـ ٢ في الصهريج س، ١٠٠ جالون من ماء مذاب فيه ١٠٠ باوند من الملح. وفي الصهريج ص، ١٠٠ جالون من الماء العذب. أجرينا الماء الى الصهريج س بسرعة ٢ جالون في الدقيقة، واجرينا المزيج من س الى ص بسرعة ٣ جالون في الدقيقة، الا اننا، في الوقت نفسه كنا نضخ المحلول عائداً من ص الى س بسرعة جالون واحد في الدقيقة (لاستمرار العملية)، وكان المحلول ينسكب من ص الى الخارج بسرعة ٢ جالون في الدقيقة. والمطلوب ايجاد كمية الملح في الصهريجين في أي لحظة ن.

فاذا جعلنا س (ن) ، ص (ن) يرمزان الى كمية الملح في الصهريجين، س ، ص ، على التوالي، في الزمن ن، وتذكرنا ان تغير الوزن هو الفرق بين الصادر والوارد، نستطيع هنا أيضاً ان نستخرج منظومة من المعادلات الخطية ذات الرتبة الأولى:

فالصهريجان س ، ص فيهما في البدء من الملح س (٠) = ١٠٠ باوند ، ص (٠) = ٠ على التوالي. والمقداران س/١٠٠ ، ص/١٠٠ هما كميتا الملح في جالون واحد من المحلول، في س ، ص ، على التوالي. وفي كل دقيقة يؤخذ ٣ جالون من س وتضاف الى ص ويعاد جالون واحد من ص الى س فعندنا إذن المنظومة:

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -٣ \frac{\text{س}}{١٠٠} + \frac{\text{ص}}{١٠٠} \text{، س (٠) = ١٠٠}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٣\text{س}}{١٠٠} - \frac{٣\text{ص}}{١٠٠} \text{، ص (٠) = ٠} \quad \text{(٧ ـ ٤)}$$

ولقد رأينا في المثالين (١ ـ ١ ـ ٥) و(٣ ـ ١١ ـ ١) كيف ان إحدى الدالتين يمكن ان تُزال كليةً: نجد قيمة س في المعادلة الثانية، فينتج:

$$\text{س} = \text{ص} + \frac{١٠٠}{٣}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \quad \text{(٧ ـ ٥)}$$

ونفاضل (٧ ـ ٥) ونساوي بين الطرف الأيسر في الناتج والطرف الأيمن في أولى معادلتي (٧ ـ ٤) فيكون:

$$\frac{-٣\text{س}}{١٠٠} + \frac{\text{ص}}{١٠٠} = \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \frac{١٠٠}{٣}\,\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د ن}^{٢}} \quad \text{(٧ ـ ٦)}$$

ونعوض عن س في يمين (٧ ـ ٦) بقيمته في (٧ ـ ٥) فتنتج المعادلة الخطية التالية وهي من الرتبة الثانية:

$$\frac{١٠٠}{٣}\,\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د ن}^{٢}} + ٢\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \frac{٢\,\text{ص}}{١٠٠} = ٠ \quad \text{(٧ ـ ٧)}$$

والشروط الأولية للمعادلة (٧ ـ ٧) تؤخذ مباشرة من المنظومة (٧ ـ ٤) لأن ص (٠) = ٠ ،

$$\text{صَ}(٠) = ٣\,\frac{\text{س}(٠)}{١٠٠} - ٣\,\frac{\text{ص}(٠)}{١٠٠} = ٣ \quad \text{(٧ ـ ٨)}$$

فبطرق الفصل ٣ تحل المعادلة (٧ ـ ٧)، ونعوض (٧ ـ ٨)، فينتج:

$$\text{ص}(\text{ن}) = ٥٠\sqrt{٣}\left[\text{سا}\left(\frac{-٣+\sqrt{٣}}{١٠٠}\,\text{ن}\right) - \text{سا}\left(\frac{-٣-\sqrt{٣}}{١٠٠}\,\text{ن}\right)\right]$$

ومن (٧ ـ ٥) ينتج أن:

$$\text{س}(\text{ن}) = ٥٠\left[\text{سا}\left(\frac{-٣+\sqrt{٣}}{١٠٠}\,\text{ن}\right) + \text{سا}\left(\frac{-٣-\sqrt{٣}}{١٠٠}\,\text{ن}\right)\right]$$

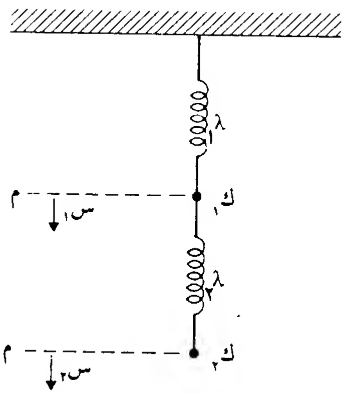
وفي البندين (٧ ـ ٣) و(٧ ـ ٤) سنناقش بالتفصيل هذا العمل في حذف أحد المتغيرين، وفي البند (٧ ـ ٥) سنتعلم طريقة مباشرة للحصول على الحل دون الحذف.

المثال ٧ ـ ١ ـ ٣ واليك مثالاً ثالثاً: منظومة الشكل (٧ ـ ١) من كُتل واسلاك نابضة، وهي تعميم مباشر للمنظومة المبينة في البند (٣ ـ ٩). وهنا عندنا كتلتان متصلتان بنابضين، على التوالي، ثابتا هما $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ (انظر البند ٣ ـ ٩) فاذا رمزنا الى الازاحة الرأسية عن وضع الاتزان للنابضين بالرمزين $س_{١}$ (ن) ، $س_{٢}$ (ن) على الترتيب، فحسب الفرضين (أ) و(ب) (أي قانون هوك) في البند المذكور، يكون صافي القوى التي تؤثر على الكتلتين كما يلي:

$$ق_{١} = - \lambda_{١} س_{١} + \lambda_{٢} (س_{٢} - س_{١})$$

$$ق_{٢} = - \lambda_{٢} (س_{٢} - س_{١})$$

وهنا اعتبرنا الاتجاه الموجب الى أسفل. لاحظ ان النابض الأول ينضغط عندما يكون $س_{١} < ٠$ وان الثاني ينضغط عندما يكون $س_{١} > س_{٢}$.



الشكل ٧ — ١

ومعادلتا الحركة :

$$ك_١ \frac{د^٢ س_١}{د ن^٢} = - \lambda_١ س_١ + \lambda_٢ (س_٢ - س_١)$$

(٧ - ٩) ....

$$ك_٢ \frac{د^٢ س_٢}{د ن^٢} = - \lambda_٢ (س_٢ - س_١)$$

وهـذه منظـومـة من معـادلتـين تفـاضليتـين خطيتـين من الـرتبة الثانية . معاملاتهما ثابتة . وسنناقش هذه المنظومة في البند التالي . ونتوقع ، اعتماداً على الاعتبارات الفيزيائية ، انه اذا تحركت الكتلة بسـرعـة أولية ، من وضع أولي ، فبالامكان التنبوء عن حركة الكتلة مستقبلاً على السلك .

المثال ٧ - ١ - ٤ درسنا في المثال ١ - ١ - ٥ منظومة بيئية من مفترسات وفرائس ، تعيش فيها المفترسات كلية على الفرائس ، في حين تتمتع الفرائس بمدد غذائي لا ينضب . فأعمُّ من ذلـك ان نعمم المعـادلـة الحـركيـة (المثـال ١ - ١ - ٤) الى وضـع يتنافس فيه النوعان على مصادر الغذاء في بيئة مناسبة . وبالتخصيص : نجعل س (ن) ، ص (ن) عددي النوعين في الزمن ن :

فعلى غرار المعادلة (١ - ٦) نحصل على المنظومة التالية :

$$سَ (ن) = س (\beta_١ - \delta_{١١} س - \delta_{٢١} ص)$$

(٧ - ١٠) ....

$$صَ (ن) = ص (\beta_٢ - \delta_{١٢} س - \delta_{٢٢} ص)$$

وتسمى المعادلتان (٧ - ١٠) معادلتي لوتكا وفولترا (Lotka - Volterra) . وقد درستا

بتفصيل في حقل علم البيئة الرياضي. وهذه المنظومة غير خطية، وكما في المثال ١ ـ ١ ـ ٥، ليس هناك طريقة لحساب حل صريح للمنظومة (٧ ـ ١٠). ولكن نستطيع ان نتبين كثيراً من المعلومات عن الحلول (وهي موجودة ولكنا لا نعرف ما هي) وذلك مما نعرفه عن الثوابت β_1، β_2، δ_{11}، δ_{21}، δ_{12}، δ_{22}. فمثلاً يسهل ان نحسب أعداد التوازن equilibrium populations دون حل المنظومة، وهذه هي الاعداد التي لا زيادة فيها ولا نقصان. وواضح ان نوعين على هذه الشاكلة قد يتكونان من ثابتين س = ص = ٠ (حيث يكون النوعان قد فنيا). الا ان التوازن قد ينشأ من وضع آخر في (٧ ـ ١٠) وذلك عند سَ = صَ = ٠

واذا فني س أو ص، فوضع التوازن هو س = ٠، ص = β_2 / δ_{22} أو س = β_1 / δ_{11}، ص = ٠ على التوالي. واذا لم يفن أي من النوعين (أي انه ليس س ولا ص صفراً): نقسم المعادلة الأولى (من ٧ ـ ١٠) على س والثانية على ص، فنحصل، (على اعتبار ان الطرف الأيمن صفر) على المعادلتين الآتيتين:

$$\delta_{11} س + \delta_{21} ص = \beta_1$$

(٧ ـ ١١) ....

$$\delta_{12} س + \delta_{22} ص = \beta_2$$

فاذا كانت المحددة ح = $\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12}$ ليست صفراً فهنالك حل وحيد للمعادلتين (٧ ـ ١١) هو

$$س = \frac{\delta_{22}\beta_1 - \delta_{21}\beta_2}{ح}،\quad ص = \frac{\delta_{11}\beta_2 - \delta_{12}\beta_1}{ح}$$ .... (٧ ـ ١٢)

فالحل (٧ ـ ١٢) يعطي توازناً فيه لم يفن أي من النوعين، على فرض أن حدي الحل

موجبان.

التمارين ٧ ـ ١:

١. في المثال ٧ ـ ١ ـ ١ : إفرض ان المحلول الذي يخرج من الوعاء الثاني يتناسب مع حجم ما في الوعاء. عدِّل معادلتي (٧ ـ ١) على حسب هذا الفرض.

٢. حل المنظومة التي حصلت عليها من التمرين (١) بدلالة الحجمين الابتدائيين س (٠) ، ص (٠)، وذلك بطريقة المثال ٧ ـ ١ ـ ١ .

٣. في المثال ٧ ـ ١ ـ ٢ : متى يحتوي الصهريج ص على الكمية العظمى من الملح؟ وكم يكون فيه من الملح عندئذ؟

٤. في المثال ٧ ـ ١ ـ ٢ : افرض ان سرعة الجريان من ص الى س هو٢ جالون في الدقيقة (لا جالون واحد) مع بقاء الشروط الأخرى كما هي. أوجد معادلتي كميتي الملح في الوعاءين في اللحظة ن، حسب هذا الفرض.

٥. خذ منظومة الاسلاك والكتل المبينة بالشكل (٧ ـ ٢). فيها ثلاث كتل مربوطة على التوالي بثلاثة نوابض ثوابتها $\lambda_{١}$، $\lambda_{٢}$ ، $\lambda_{٣}$ على الترتيب. كوِّن منظومة من معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية، تصف هذه المنظومة.

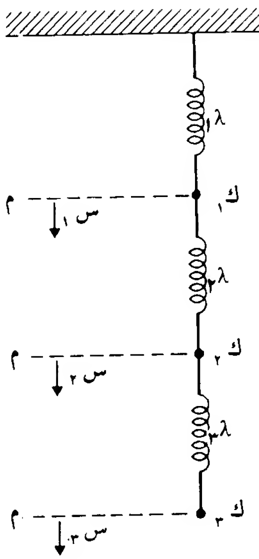
٦. أنظر في منظومة بيئية من ثلاثة أنواع تتصارع على مصادر الغذاء المتوفرة.

أ) استخرج لهذه المنظومة معادلات لوتكا وفولترا.

ب) أوجد كل أعداد التوازن الممكنة في هذه البيئة.

جـ) أي الشروط يجب ان تتوافر حتى يتم التوازن دون فناء اي من الأنواع؟

٧. مجتمع عدد أفراده ع، تعرضوا كلهم الى مرض مُعدٍ. ففي أي لحظة، ينقسم هذا المجتمع الى مجموعات ثلاث. فالمجموعة الأولى، وعدد افرادها $س_{١}$ (ن)، تضم من لا



الشكل ٧ — ٢

يزالون معرضين للأصابة، والمجموعة الثانية، وعدد أفرادها س$_٢$ (ن)، تضم من اصابتهم العدوى، والمجموعة الثالثة، وعدد أفرادها س$_٣$ (ن)، وتضم الذين ماتوا والذين في الحجر الصحي والمحصنـين. ومن المعقـول ان نعتـبر أن س$_٢$ (ن) وس$_٣$ (ن) هما في البـدء قلة بالنسبة الى س$_١$ (ن). وليكن ∝ ، β ثابتين صحيحين يشيران على الترتيب الى سرعة اصابة المعرضين، وسرعة انضمام المصابين الى المجموعة الثالثة. فما يلي هو نموذج معقول لانتشار هذا المرض:

سَ$_١$ (ن) = ∝ س$_١$ (٠) س$_٢$

سَ$_٢$ (ن) = ∝ س$_١$ (٠) س$_٢$ − β س$_٢$

سَ$_٣$ (ن) = β س$_٢$

أ) إبدأ بحل المعادلة الثانية في هذه المنظومة ثم أوجد الحل بدلالة $س_1$ (٠) ، $س_2$ (٠) ، $س_3$ (٠) لاحظ ان

$$س_1 (٠) + س_2 (٠) + س_3 (٠) = ع$$

ب) بيِّن أنه اذا كان $\propto$ س (٠) $< \beta$ فالمرض لن يصبح سارياً.

جـ) ماذا يحدث اذا كان $\propto$ س (٠) $> \beta$ ؟

٨. ان تقلبات الحرارة وتباطؤ الريح كثيراً ما يمسكان بملوثات الهواء في الأودية فترات طويلة من الزمن. وكثيراً ما تكون مركبات الكبريت الغازية سبباً في نشوء مشكلة حقيقية من تلوث الهواء، ويزيد من تعقيد المشكلة سرعة تأكسد هذه المركبات. فكبريتيد الهيدروجين، H_2S يتأكسد مكوناً ثاني أكسيد الكبريت SO_2، وهذا بدوره يتأكسد مكوناً كبريتات. واليك نموذجاً اقترح لتعيين تركيز س (ن) ، ص (ن) في H_2S ، SO_2 على الترتيب، في مكان معزول:

$$\text{ليكن } \frac{د س}{د ن} = -\propto س + \gamma$$

$$، \frac{د ص}{د ن} = \propto س - \beta ص + \delta$$

حيث $\propto$ ، β هما سرعة تحول H_2S الى SO_2 ، وسرعة تحول SO_2 الى كبريتات، على الترتيب؛ γ ، δ هما سرعة تكون H_2S ، SO_2 على الترتيب. وكلها ثوابت.

حل المعادلتين بالتتابع وقدر مستويات التركيز التي يمكن الوصول اليها اذا بقي الهواء الملوث لمدة طويلة.

٧ ـ ٢ تحويل المعادلات العالية الرتب الى منظومات من الرتبة الأولى

في البند التالي سندرس بعض الطرق لحل المنظومات الخطية ذات الرتبة الأولى ، اي المنظـومـات التي تحتـوي على المشتقـات الأولى فقـط . ولكن قبـل ذلك يجدر ان نعلم ان معـادلات الـرتبـة الأولى أكثـر من حالـة خاصـة جداً . بل سنبـين في هذا البنـد ان معظم المعـادلات (والمنظـومـات) التفـاضليـة ، من أي رتبـة ، يمكن ان تحول ، عن طريق جلب متغيرات جديدة الى منظومات من معادلات الرتبة الأولى . فاذا عرفنا ذلك تبين جلياً ان دراسة منظومات الرتبة الأولى ذات أهمية حاسمة في دراسة المعادلات التفاضلية . وهذا ما يبرر لنا ان نقتصر في باقي هذا الفصل على دراسة منظومات الرتبة الأولى ونبدأ بأمثلة بسيطة .

المثال ٧ ـ ٢ ـ ١ خذ معادلة الحركة التوافقية (المثال ٣ ـ ٥ ـ ١) ونعني :

س'' + س = ٠ .... (٧ ـ ١٣)

إجعل ص (ن) = س' (ن)، فيكون

ص' (ن) = س'' (ن) = − س (ن)

فقد تحولت المعادلة (٧ ـ ١٣) الى المنظومة :

س' = ص ، ص' = −س .... (٧ ـ ١٤)

فاذا وجـد حل، أي س (ن) ، ص (ن) ، للمجمـوعـة (٧ ـ ١٤) كان س (ن) فيـه حلاً للمعادلة (٧ ـ ١٣) ذات الرتبة الثانية .

المثال ٧ ـ ٢ ـ ٢ خذ معادلة أويلر التالية (انظر البند ٣ ـ ٨) :

ن^{٣} س''' + ٤ ن^{٢} س'' − ٨ ن س' + ٨ س = ٠ .... (٧ ـ ١٥)

نأخذ $س_1$ (ن) = س (ن) ، $س_2$ (ن) = سَ (ن) ، $س_3$ (ن) = سً (ن)

فيكون

$$سَ_1 (ن) = س_2 (ن) ، سَ_2 (ن) = س_3 (ن)$$

ويكون

$$سَ_3 (ن) = سٌ (ن) = - \frac{1}{ن^3} (4 ن^2 سً - 8 ن سَ + 8 س)$$

$$= - \frac{8}{ن^3} س_1 + \frac{8}{ن^2} س_2 - \frac{4}{ن} س_3$$

فالمعادلة (٧ ـ ١٥) ذات الرتبة الثالثة يمكن الآن ان نعبر عنها بمنظومة من ثلاث معادلات من الرتبة الأولى هي :

$$سَ_1 = س_2$$

$$سَ_2 = س_3 \qquad \text{(٧ ـ ١٦)}$$

$$سَ_3 = - \frac{8}{ن^3} س_1 + \frac{8}{ن^2} س_2 - \frac{4}{ن} س_3$$

ففي اي حل لهذه المنظومة تكون قيمة $س_1$ هي حل المعادلة (٧ ـ ١٥)

وواضح ان طريقة المثالين السابقين يمكن تعميمها : خذ أعمَّ صيغة للمعادلة ذات الرتبة م :

$$ق (ن ، س ، سَ ، سً ، \ldots ، س^{(م-1)}) = 0 \qquad \text{(٧ ـ ١٧)}$$

ولنفرض ان المعادلة (٧ ـ ١٧) يمكن ان تكتب بحيث يكون $س^{(م)}$ دالة للمتغير ين

ن، س، ومشتقاتها حتى الرتبة (م − ١). فلا بد ان هنالك اقتراناً ج . حيث

$$س^{(م)} = ج (ن ، س ، سَ ، سً ، \ldots ، س^{(م-1)}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ ـ ١٨)$$

[ليس بالأمر الممكن دائماً ان نحول معادلة بالشكل (٧ ـ ١٧) الى الشكل (٧ ـ ١٨)، الا انــه يمكن في معظم الحـالات التي تهمنـا، وعلى الأخص، اذا كانت (٧ ـ ١٧) خطيـة. وتبـين نظـريـة الاقـترانات الضمنية الشرط الذي يضمن وجود اقتران مثيل ويجد الطالب هذه النظـريـة في كتب الحسبـان المتقـدمة*]. وسنفترض، لأغراضنا الخاصة، ان معادلة الرتبة م العامة يمكن ان تكتب بالصيغة (٧ ـ ١٨)، فتكتمل لدينا النظرية التالية:

النظرية ٧ ـ ١ يمكن ان تكتب النظرية (٧ ـ ١٨) بشكل منظومة من معادلات الرتبة الأولى.

البرهان ليكن $س_1 (ن) = س (ن)$

$$س_2 (ن) = سَ (ن)$$

$$س_3 (ن) = سً (ن)$$

.

.

.

.

$$س_{م-1} (ن) = س^{(م-2)} (ن)$$

$$س_م (ن) = س^{(م-1)} (ن)$$

فتصير المعادلة (٧ ـ ١٨) كما يلي:

* مثل كتاب (R. Buck, Advanced Calculus, 1956)

$$\begin{aligned} س'_{١} &= س_{٢} \\ س'_{٢} &= س_{٣} \\ &\vdots \\ س'_{م-١} &= س_{م} \\ س'_{م} &= ج\,(ن ، س_{١} ، س_{٢} ، \ldots ، س_{ن}) \end{aligned} \qquad (٧ - ١٩)$$

ويصير الأمر اسهل اذا كانت المعادلة خطية . انظر مثلاً المعادلة :

$$س^{(م)}(ن) + أ_{١}(ن)\, س^{(م-١)}(ن) + أ_{٢}(ن)\, س^{(م-٢)}(ن) + \ldots + أ_{م-١}(ن)\, س'(ن) + أ_{م}(ن)\, س(ن) = ق\,(ن) \qquad (٧ - ٢٠)$$

فهنا اذا ادخلنا المتغيرات السابقة نفسها تصير لدينا المنظومة :

$$\begin{aligned} س'_{١} &= س_{٢} \\ س'_{٢} &= س_{٣} \\ &\vdots \\ س'_{م-١} &= س_{م} \\ س'_{م} &= -أ_{م}\, س_{١} - أ_{م-١}\, س_{٢} - \ldots - أ_{١}\, س_{ن} + ق \end{aligned} \qquad (٧ - ٢١)$$

لقد رأينا حتى الآن كيف تحول المعادلة الواحدة ذات الرتبة العالية الى منظومة معادلات من الرتبة الأولى . ولكن الطريقة يمكن تطبيقها بالمثل على منظومة من معادلات الرتب العالية :

المثال ٧ ـ ٢ ـ ٣ انظر الى منظومة الكتل والنوابض في المثال (٧ ـ ١ ـ ٣):

$$\ddot{\text{س}}_{١} = -\left(\frac{\lambda_{١} + \lambda_{٢}}{\text{ك}_{١}}\right)\text{س}_{١} + \frac{\lambda_{٢}}{\text{ك}_{١}}\text{س}_{٢}$$

(٧ ـ ٢٢) . . . .

$$\ddot{\text{س}}_{٢} = \frac{\lambda_{٢}}{\text{ك}_{٢}}\text{س}_{١} - \frac{\lambda_{٢}}{\text{ك}_{٢}}\text{س}_{٢}$$

بعد أن جمعنا الحدود المتشابهة وقسمنا كل معادلة على الكتلة فلندخل المتغيرات التالية:

$\text{س}_{٣} = \dot{\text{س}}_{١}$ ، $\text{س}_{٤} = \dot{\text{س}}_{٢}$. فيكون $\dot{\text{س}}_{٣} = \ddot{\text{س}}_{١}$ ، $\dot{\text{س}}_{٤} = \ddot{\text{س}}_{٢}$.

والمنظومة (٧ ـ ٢٢) يمكن ان نعبر عنها بشكل منظومة من اربع معادلات من الرتبة الأولى، كما يلي:

$$\dot{\text{س}}_{١} = \text{س}_{٣}$$

$$\dot{\text{س}}_{٢} = \text{س}_{٤}$$

$$\dot{\text{س}}_{٣} = -\left(\frac{\lambda_{١} + \lambda_{٢}}{\text{ك}_{١}}\right)\text{س}_{١} + \frac{\lambda_{٢}}{\text{ك}_{١}}\text{س}_{٢} \quad \ldots \quad (٧ - ٢٣)$$

$$\dot{\text{س}}_{٤} = \frac{\lambda_{٢}}{\text{ك}_{٢}}\text{س}_{١} - \frac{\lambda_{٢}}{\text{ك}_{٢}}\text{س}_{٢}$$

وقبل ان ننهي هذا البند، سنناقش أمر الشروط الابتدائية، وسنقوم بذلك عن طريق الأمثلة،

المثال ٧ ـ ٢ ـ ٤ انظر في مسألة الشروط الابتدائية التالية :

$$س'' + س = ٠ \quad ، \quad س(٠) = ١ \quad ، \quad س'(٠) = ٢$$

فاذا ادخلنا متغير المثال ٧ ـ ٢ ـ ١ ، وهو ص = سَ نحصل على المنظومة :

سَ = ص ، صَ = − س مع الشرطين الابتدائيين س (٠) = ١ ، ص (٠) = سَ (٠) =٢

المثال ٧ـ٢ ـ ٥ أنظر في معادلة أويلر في المثال ٧ ـ ٢ ـ ٢ . وافرض اننا اعطينا الشروط الابتدائية س (٢) = ٣ ، سَ (٢) = −٦ ، سً (٢) = ١٤ .

فلأن

$س_١ (ن) = س (ن)$ ، $س_٢ (ن) = س' (ن)$ ، $س_٣ (ن) = س'' (ن)$ ،

تصبح المعادلة (٧ ـ ١٥) هي المنظومة :

$$س'_١ = س_٢$$

$$س'_٢ = س_٣$$

$$س'_٣ = -\frac{٨}{ن^٣} س_١ + \frac{٨}{ن^٢} س_٢ - \frac{٤}{ن} س_٣$$

مع $س_١ (٢) = ٣$ ، $س_٢ (٢) = −٦$ ، $س_٣ (٢) = ١٤$

وواضح ان الطريقة التي يبينها المثالان السابقان يمكن استعمالها لتحويل اي معادلة قيم ابتدائية الى منظومة تقابلها .

التمارين ٧ ـ ٢

في التمارين ١ الى ٧ حول كل معادلة الى منظومة معادلات من الرتبة الأولى

١ .. سً + ٢ سَ + ٣ س = ٠

٢ . سً − ٦ ن سَ + ٣ ن^{٣} س = جتا ن

٣ . سًَ − سً + (سَ)^{٢} − س^{٣} = ن

٤ . س$^{(٤)}$ − جتا س (ن) = ن

٥ . سًَ + س سً − سَ س^{٤} = جا ن

٦ . س سَ سً سًَ = ن^{٥}

٧ . سًَ − ٣ سً + ٤ سَ − س = ٠

٨ . كتلة مقدارها ك تتحرك في الفضاء س ص ع حسب المعادلات التالية :

ك سً = ق (ن ، س ، ص ، ع)

ك صً = ف (ن ، س ، ص ، ع)

ك عً = ح (ن ، س ، ص ، ع)

حول هذه المعادلات الى منظومة من ست معادلات من الرتبة الأولى .

٩ . أنظر في المنظومة سَ$_{١}$ = س$_{١}$ ، سَ$_{٢}$ = س$_{٢}$

أ) ما الحل العام لهذه المنظومة .

ب) بيِّن ان ليس هنالك معادلة من الرتبة الثانية تكافىء هذه المنظومة .

[إرشاد: بيِّن ان اي معادلة من الرتبة الثانية لها حلول ليستحلولاً للمنظومة]

يبين هذا ان المنظومات ذات الرتبة الأولى أعمُّ من معادلات الرتب الأعلى ، بمعنى ان أياً منها يمكن ان يكتب بصورة منظومة من الرتبة الأولى ، وليس العكس .

٧ ـ ٣ : طريقة الحذف
في المنظومات الخطية
ذات المعاملات الثابتة

نتعرف في هذا البند على طريقة سهلة لحل المنظومة الخطية :

$$
\begin{aligned}
\bar{س}_{١} &= أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + \dots + أ_{١م} س_{م} + ق_{١} \text{ (ن)} \\
\bar{س}_{٢} &= أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} + \dots + أ_{٢م} س_{م} + ق_{٢} \text{ (ن)} \\
&\vdots \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (٧\text{-}٢٤) \\
\bar{س}_{م} &= أ_{م١} س_{١} + أ_{م٢} س_{٢} + \dots + أ_{مم} س_{م} + ق_{م} \text{ (ن)}
\end{aligned}
$$

حيث $أ_{ري}$ ثوابت (ر = ١ ، ٢ ، . . . ، م ؛ ي = ١ ، ٢ ، . . . ، م)

والطـريقـة تتضمن حذف كل الـدوالّ المتغيرة $س_{١}$ ، . . . ، $س_{م}$ إلا واحداً، بالتعويض الجـبري والتفـاضـل والـواقـع ان القـاريء لا بد ان يكـون قد قابـل هذه الطـريقة، فقد استعملت في تحويل كل من منظومات الرتبة الأولى في الأمثلة ١ ـ ١ ـ ٥ و ٣ ـ ١١ ـ ١ و ٧ ـ ١ ـ ٢ الى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية. والطريقة في جوهرها عكس للطريقة التي بيناها في البند (٧ ـ ٢).

وللسهولة سننظر فقط في المنظومة الخطية ذات المعادلتين:

$$
\begin{aligned}
\bar{س} &= أ_{١١} س + أ_{٢١} ص + ق_{١} \\
& \dots\dots\dots\dots \quad (٧ - ٢٥) \\
\bar{ص} &= أ_{١٢} س + أ_{٢٢} ص + ق_{٢}
\end{aligned}
$$

فنفاضل أولى هاتين المعادلتين، فينتج:

$$سً = أ_{١١} سَ + أ_{٢١} صَ + قَ_{١}$$

فنعوض هنا قيمة صَ في (٧ ـ ٢٥)، فينتج:

$$سً = أ_{١١} سَ + أ_{٢١} (أ_{١٢} س + أ_{٢٢} ص + ق_{٢}) + قَ_{١} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧ ـ ٢٦)$$

ولكن حسب أولى معادلتي (٧ ـ ٢٥)،

$$ص = \frac{١}{أ_{٢١}} (سَ - أ_{١١} س - ق_{١})$$

فبعد التبسيط تصبح (٧ ـ ٢٦):

$$سً - (أ_{١١} + أ_{٢٢}) سَ + (أ_{١١} أ_{٢٢} - أ_{٢١} أ_{١٢}) س = أ_{٢١} ق_{٢} - أ_{٢٢} ق_{١} + قَ_{١}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ ـ ٢٧)$$

والمعـادلـة (٧ ـ ٢٧) معـادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابتة ويمكن حلها بطرق الفصل ٣. لاحظ ان حساباتنا تصح بشرط ان يكون $أ_{٢١} \neq ٠$ ، فاذا كان $أ_{٢١} = ٠$ يمكن حل المعادلة الأولى في (٧ ـ ٢٥)، فهذا الشرط لا تقييد فيه.

ثم ليلاحظ انه حالما يعرف س (ن) صراحة، يسهل حساب ص (ن) من أولى معادلتي (٧ ـ ٢٥).

المثال ٧ ـ ٣ ـ ١ أنظر في المنظومة $سَ = س + ص ، س (٠) = ١$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ ـ ٢٨)$$

$$صَ = س - ص ، ص (٠) = ٠$$

نفاضل المعادلة الأولى. ثم نعوض: أولاً في الثانية، ثم في الأولى من معادلتي (٧ ـ ٢٨) فينتج:

سً = سَ + صَ = سَ + س − ص = سَ + س − (سَ − س)

أي أن

سً − ٢س = ٠

فيكون

س (ن) = حـ$_{1}$ جتا $\sqrt{٢}$ن + حـ$_{2}$ جا $\sqrt{٢}$ن

فحسب (٧ ـ ٢٨)، المعادلة الاولى :

ص = سَ − س

= − $\sqrt{٢}$ حـ$_{1}$ جا $\sqrt{٢}$ن + $\sqrt{٢}$ حـ$_{2}$ جتا $\sqrt{٢}$ن − حـ$_{1}$ جتا $\sqrt{٢}$ن − حـ$_{2}$ جا $\sqrt{٢}$ن

= (حـ$_{2}$ $\sqrt{٢}$ − حـ$_{1}$) جتا $\sqrt{٢}$ن − ($\sqrt{٢}$ حـ$_{1}$ + حـ$_{2}$) جا $\sqrt{٢}$ن

وبالرجوع الى الشروط الابتدائية نستنتج أن

س (٠) = حـ$_{1}$ = ١ ، ص (٠) = حـ$_{2}$ $\sqrt{٢}$ − حـ$_{1}$ = ٠

فالحل الوحيد للمنظومة (٧ ـ ٢٨) هو:

س (ن) = جتا $\sqrt{٢}$ن + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جا $\sqrt{٢}$ن

ص (ن) = −($\sqrt{٢}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) جا $\sqrt{٢}$ن = − $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ جا $\sqrt{٢}$ن

المثال ٧ - ٣ - ٢ : أنظر في المنظومة :

$$سَ = ٢س + ص + ن$$

$$\dots\dots\dots\dots \quad (٧ - ٢٩)$$

$$صَ = س + ٢ص + ن^{٢}$$

نمضي كما سبق فينتج :

$$سً = ٢ سَ + صَ + ١ = ٢ سَ + (س + ٢ص + ن^{٢}) + ١$$

$$= ٢ سَ + س + (٢ سَ - ٤س - ٢ن) + ن^{٢} + ١$$

أي أن

$$سً - ٤ سَ + ٣ س = (ن - ١)^{٢} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٧ - ٣٠)$$

فحلّ القسم المتجانس من المعادلة (٧ - ٣٠) هو

$$س (ن) = حـ_{١} e^{ن} + حـ_{٢} e^{٣ن}$$

ويسهل إيجاد حل خاص للمعادلة (٧ - ٣٠) هو

$$\frac{١}{٣} ن^{٢} + \frac{٢}{٩} ن + \frac{١١}{٢٧}$$

فيكون الحل العام للمعادلة (٧ - ٣٠) :

$$س (ن) = حـ_{١} e^{ن} + حـ_{٢} e^{٣ن} + \frac{١}{٣} ن^{٢} + \frac{٢}{٩} ن + \frac{١١}{٢٧}$$

وكما سبق ، فلأن ص = سَ - ٢س - ن يكون :

$$\text{ص}(\text{ن}) = \text{حـ}_{١}\, e^{\text{ن}} + ٣\, \text{حـ}_{٢}\, e^{٣\text{ن}} + \frac{٢}{٣}\, \text{ن} + \frac{٢}{٩}$$

$$- ٢\, \text{حـ}_{١}\, e^{\text{ن}} - ٢\, \text{حـ}_{٢}\, e^{٣\text{ن}} - \frac{٢}{٣}\, \text{ن}^{٢} - \frac{٤}{٩}\, \text{ن} - \frac{٢٢}{٢٧} - \text{ن}$$

أي أن

$$\text{ص}(\text{ن}) = - \text{حـ}_{١}\, e^{\text{ن}} + \text{حـ}_{٢}\, e^{٣\text{ن}} - \frac{٢}{٣}\, \text{ن}^{٢} - \frac{٧}{٩}\, \text{ن} - \frac{١٦}{٢٧}$$

ولا يستغرب القاريء اذ يكتشف ان حلول المنظومات الخطية ذات المعاملات الثابتة تبدو شديدة الشبه بحلول معادلات الرتب الثانية والعليا ذات المعاملات الثابتة. وسننظر في هذا التشابه في البندين التاليين.

ويمكن تعميم الطريقة التي بيناها بالمثالين السابقين حتى تنطبق على منظومات خطية من ثلاث معادلات وأكثر. فالمنظومة الخطية ذات ن معادلات من الرتبة الأولى تحول الى معادلة تفاضلية خطية بالرتبة ن، لأنها تحتاج على الغالب الى عملية تفاضل واحدة لأزالة كل متغير من $\text{س}_{٢}$ الى $\text{س}_{\text{ن}}$.

وأخيراً ينبهنا المثال ١ ـ ١ ـ ٥ الى ان بعض المنظومات غير الخطية يمكن أيضاً ان تحول الى معادلة واحدة (غير خطية على الغالب). والمثال التالي يبين ان هذه المعادلة لا يلزم ان تكون غير خطية.

المثال ٧ ـ ٣ ـ ٣ أنظر في المنظومة غير الخطية

$\text{سَ} = \text{س} + \text{جا س جتا س} + ٢\, \text{ص}$

. . . . (٧ ـ ٣١)

$\text{صَ} = \text{جا}^{٢}\, \text{س} \,(\text{س} + \text{جا س جتا س} + ٢\, \text{ص}) + \text{س}$

نمضي كما تقدم فنجد :

سً = سَ (١ + جتا^{٢} س − جا^{٢} س) + ٢ صَ

= ٢ سَ جتا^{٢} س + ٢ (س + جا س جتا س + ٢ ص) جا^{٢} س + ٢ س

= ٢ سَ جتا^{٢} س + ٢ سَ جا^{٢} س + ٢ س = ٢ سَ + ٢ س

أي أن

سً − ٢ سَ − ٢ س = ٠

التمارين ٧ ـ ٣

في التمارين ١ إلى ٩ أوجد الحل العام لكل منظومة معادلات . وحيث تعطى شروطاً ابتدائية أوجد الحل الوحيد

١ . سَ = س + ٢ ص

صَ = ٣ س + ٢ ص

٢ . سَ = س + ٢ ص + ن − ١

صَ = ٣ س + ٢ ص − ٥ ن − ٢

س (٠) = ٠ ، ص (٠) = ٤

٣ . سَ = − ٤ س − ص

صَ = س − ٢ ص

٤ . سَ = س + ص

صَ = ص

س (٠) = ١ ، ص (٠) = ٠

٥ . سَ = ٨ س − ص

صَ = ٤ س + ١٢ ص

٦ . سَ = ٢ س + ص + ٣ $e^{٢ن}$

صَ = − ٤ س + ٢ ص + ن $e^{٢ن}$

٧ . سَ = ٣ س + ٣ ص + ن

صَ = − س − ص + ١

٨ . سَ = ٤ س + ص

صَ = − ٨ س + ٨ ص

س (π / ٤) = ٠ ، ص (π / ٤) = ١

٩ . سَ = ١٢ س − ١٧ ص

صَ = ٤ س − ٤ ص

١٠ . اشرح طريقة حذف يمكن بها ايجاد الحل العام للمعادلات الثلاث التالية ، ذات الرتبة الأولى :

سَ$_{١}$ = أ$_{١١}$ س$_{١}$ + أ$_{٢١}$ س$_{٢}$ + أ$_{٣١}$ س$_{٣}$ + ق$_{١}$

سَ$_{٢}$ = أ$_{١٢}$ س$_{١}$ + أ$_{٢٢}$ س$_{٢}$ + أ$_{٣٢}$ س$_{٣}$ + ق$_{٢}$

سَ$_{٣}$ = أ$_{١٣}$ س$_{١}$ + أ$_{٢٣}$ س$_{٢}$ + أ$_{٣٣}$ س$_{٣}$ + ق$_{٣}$

في التمرينين ١١ ، ١٢ استعمل الطريقة التي استنتجتها بالتمرين ١٠ لإيجاد الحل العام لكل منظومة :

١١. $س_١ = س_١$

$سَ_٢ = ٢ س_١ + س_٢ - س_٣$

$سَ_٣ = ٣ س_١ + ٢ س_٢ + س_٣$

١٢. $سَ_١ = س_١ + س_٢ + س_٣$

$سَ_٢ = ٢ س_١ + س_٢ - س_٣$

$سَ_٣ = - ٨ س_١ - ٥ س_٢ - ٣ س_٣$

٧ ـ ٤ المنظومات الخطية ـ نظريتها

نناقش في هذا البند المنظومة الخطية ذات المعادلتين من الرتبة الأولى :

$$سَ = أ_{١١} (ن) س + أ_{٢١} (ن) ص + ق_١$$

$$صَ = أ_{١٢} (ن) س + أ_{٢٢} (ن) ص + ق_٢ \qquad (٧ ـ ٣٢)$$

ومرافقتها المنظومة المتجانسة (حيث $ق_١ = ق_٢ = ٠$):

$$سَ = أ_{١١} (ن) س + أ_{٢٢} (ن) ص$$

$$صَ = أ_{١٢} (ن) س + أ_{٢٢} (ن) ص \qquad (٧ ـ ٣٣)$$

ويؤكد نقاشنا هنا على وجوه الشبه بين هذه المنظومات ومعادلات الرتبة الثانية الخطية التي درسناها في البند (٣ ـ ٢). وينبغي الا نستغرب لوجود تقابل بين النظريتين. لا سيما وقد بينا في البندين (٧ ـ ٢) و(٧ ـ ٣) ان أي معادلة خطية بالرتبة الثانية يمكن دائماً ان تحول الى منظومة من النوع (٧ ـ ٣٢)، وبالعكس (اذا كانت المعاملات $أ_{ري}$ ثابتة).

ونعني بحل منظومة مثل (٧ ـ ٣٢) و(٧ ـ ٣٣) ايجاد اقترانين { س (ن) ، ص (ن)} لكل منهما مشتقة أولى ويحققان المعادلتين المعطاتين. وهذا انما تعبير شكلي عما كنا في الواقع نفترضه. والنظرية التالية تؤكد على موجودية الحل للمنظومة (٧ ـ ٣٢) ووحدانيته. اما برهانها فيجده القاريء في البند (١١ ـ ٢) من الطبعة المطولة لهذا الكتاب.

النظرية ٧ ـ ٢ اذا كانت الاقترانات $أ_{١١}$ (ن) ، $أ_{٢١}$ (ن) ، $أ_{١٢}$ (ن) ، $أ_{٢٢}$ (ن) ، $ق_{١}$ (ن) $ق_{٢}$ (ن) متصلة، فهنالك حل واحد بالضبط { س (ن) ، ص (ن) } يحقق س ($ن_{.}$) = $س_{.}$ ، ص ($ن_{.}$) = $ص_{.}$ ، حيث $ن_{.}$ ، $ص_{.}$ أي أعداد معطاة.

ويكون زوج الاقترانات { $س_{٣}$ (ن) ، $ص_{٣}$ (ن) } تجميعاً خطياً للزوجين { $س_{١}$ (ن) ، $ص_{١}$ (ن) } و { $س_{٢}$ (ن) ، $ص_{٢}$ (ن) } اذا وجد ثابتان $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ بهما تتحقق المعادلتان:

$$س_{٣} (ن) = حـ_{١} س_{١} (ن) + حـ_{٢} س_{٢} (ن)$$

(٧ ـ ٣٤) ....

$$ص_{٣} (ن) = حـ_{١} ص_{١} (ن) + حـ_{٢} ص_{٢} (ن)$$

والنظرية التالية. هي في حقل المنظومات، نظيرة للنظرية ٣ ـ ٢ في حقل المعادلات وبرهانها سهل نتركه للتمرين.

النظرية ٧ ـ ٣ اذا كان { $س_{١}$ (ن) ، $ص_{١}$ (ن) } و { $س_{٢}$ (ن) ، $ص_{٢}$ (ن) } حلين للمعادلتين (٧ ـ ٣٣) فأي تجميع خطي لهما هو أيضاً حل للمنظومة (٧ ـ ٣٣).

المثال ٧ ـ ٤ ـ ١ أنظر في المنظومة

$$سَ = - س + ٦ ص$$

(٧ ـ ٣٥) ....

$$صَ = س - ٢ ص$$

فمن السهل ان نتحقق ان { $- ٢ e^{-٤ن}$ ، $e^{-٤ن}$ } و { $٣ e^{ن}$ ، $e^{ن}$ } حلان للمنظومة (٧ ـ ٣٥)، فحسب النظرية ٧ ـ ٣ يكون

$$\{ -٢ حـ_{١} e^{-٤ن} + ٣ حـ_{٢} e^{ن} ، حـ_{١} e^{-٤ن} + حـ_{٢} e^{ن} \}$$

حلاً آخر للمنظومة مهما يكن الثابتان $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$. ونقول ان زوجي الاقترانات

{ $س_{١}(ن)$ ، $ص_{١}(ن)$ } و { $س_{٢}(ن)$ ، $ص_{٢}(ن)$ } مستقلان خطياً اذا كان تحقُّق المعادلتين $حـ_{١}\, س_{١}(ن) + حـ_{٢}\, س_{٢}(ن) = ٠$

$$ \qquad \text{(٧ - ٣٦)} $$

$$حـ_{١}\, ص_{١}(ن) + حـ_{٢}\, ص_{٢}(ن) = ٠$$

لجميع قيم ن، يستلزم ان يكون $حـ_{١} = حـ_{٢}$.

وفي المثال ٧ - ٤ - ١ نجد ان زوجي الحلول مستقلان خطياً لأن $حـ_{١}\, e^{-٤ن} + حـ_{٢}\, e^{ن}$ يساوي صفراً مع جميع قيم ن، فقط اذا كان $حـ_{١} = حـ_{٢} = ٠$

واذا أعطينا أي حلين { $س_{١}(ن)$ ، $ص_{١}(ن)$ } و { $س_{٢}(ن)$ ، $ص_{٢}(ن)$ } فان رنسكية الحلين تعرَّف بالمحددة:

$$ر(ن) = \begin{vmatrix} س_{١}(ن) & ص_{١}(ن) \\ س_{٢}(ن) & ص_{٢}(ن) \end{vmatrix} = س_{١}(ن)\, ص_{٢}(ن) - س_{٢}(ن)\, ص_{١}(ن) \qquad \text{(٧ - ٣٧)}$$

والآن نستطيع ان نثبت النظرية التالية:

النظرية ٧ - ٤ اذا كان $ر(ن) = ٠$ لكل ن، كان (٧ - ٣٤) هو الحل العام للمنظومة المتجانسة (٧ - ٣٣)، بمعنى انه إذا أعطينا أي حل ($س^{*}$ ، $ص^{*}$) للمنظومة (٧ - ٣٣) فهناك ثابتان $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ يجعلان

$$س^{*} = حـ_{١}\, س_{١} + حـ_{٢}\, س_{٢} \qquad \text{(٧ - ٣٨)}$$

$$، \quad ص^{*} = حـ_{١}\, ص_{١} + حـ_{٢}\, ص_{٢}$$

البرهان: إفرض أن $ن_{.}$ معروف وانظر في منظومة المعادلتين الخطيتين

$$حـ_١ \, س_١ (ن_٠) + حـ_٢ \, س_٢ (ن_٠) = س^* (ن_٠)$$

$$حـ_١ \, ص_١ (ن_٠) + حـ_٢ \, ص_٢ (ن_٠) = ص^* (ن_٠) \qquad \text{(٧ - ٣٩)}$$

حيث $حـ_١$ ، $حـ_٢$ قيمتان مجهولتان. فان $ر(ن_٠)$ هي محددة هذه المنظومة، وهي غير الصفر فرضاً، فإذن هنالك زوج وحيد من الثوابت $\{حـ_١ ، حـ_٢\}$ يحقق (٧ - ٣٩) وحسب النظرية ٧ - ٣ يكون

$$\{حـ_١ \, س_١ (ن) + حـ_٢ \, س_٢ (ن) ، حـ_١ \, ص_١ (ن) + حـ_٢ \, ص_٢ (ن)\}$$

هو حل للمنظومة (٧ - ٣٣) ولكن هذا الحل، حسب (٧ - ٣٩)، يحقق الشروط الابتدائية عند $ن_٠$ ، والتي يحققها الحل $\{س^* (ن) ، ص^* (ن)\}$ فحسب مبدأ الوحدانية في النظرية ٧ - ٢ يجب ان يتطابق هذان الحلان لكل قيم ن. وهكذا فقد تم البرهان.

المثال ٧ - ٤ - ٢ في المثال ٧ - ٤ - ١ ان الرنسكية ر(ن) هي

$$ر(ن) = \begin{vmatrix} -٢ e^{-٤ن} & e^{-٤ن} \\ ٣ e^{ن} & e^{ن} \end{vmatrix} = -٢ e^{-٣ن} - ٣ e^{-٣ن} = -٥ e^{-٣ن} \neq ٠$$

واذن فلا نحتاج ان نبحث عن حل آخر عام للمنظومة (٧ - ٣٥).

ولما كانت النظرية ٧ - ٤ تشترط ان الرنسكية ر(ن) لا تكون صفراً، فيحسن ان ننظر بمزيد من الإمعان في خصائص الرنسكيات:

ليكن $\{س_١ ، ص_١\}$ ، $\{س_٢ ، ص_٢\}$ حلين للمنظومة المتجانسة (٧ - ٣٣).

فلأن $ر(ن) = س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١$ ، يكون:

$$رَ(ن) = س_١ صَ_٢ + سَ_١ ص_٢ - س_٢ صَ_١ - سَ_٢ ص_١$$

$$= س_١ (أ_{١٢} س_٢ + أ_{٢٢} ص_٢) + ص_٢ (أ_{١١} س_١ + أ_{٢١} ص_١) - س_٢ (أ_{١٢} س_١ + أ_{٢٢} ص_١) - ص_١ (أ_{١١} س_٢ + أ_{٢١} ص_١)$$

فنفك الأقواس ونختصر الحدود المتشابهة، فينتج:

$$رَ = أ_{١١} س_١ ص_٢ + أ_{٢٢} س_١ ص_٢ - أ_{١١} س_٢ ص_١ - أ_{٢٢} س_٢ ص_١$$

$$= (أ_{١١} + أ_{٢٢}) (س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١) = أ_{١١} + أ_{٢٢} ر$$

فيكون

$$ر (ن) = ر (ن_.) سا [\int_{ن_.}^{ن} [أ_{١١} (ي) + أ_{٢٢} (ي)] د ي]$$

اذن فقد بانت صحة النظرية التالية:

النظرية ٧ ـ ٥ اذا كان $\{ س_١ ، ص_١ \}$ ، $\{ س_٢ ، ص_٢ \}$ حلين للمنظومة المتجانسة (٧ ـ ٣٣) فان الرنسكية ر (ن) اما ان تكون صفراً دائماً أو ألا تكون صفراً أبداً في أي فترة (لأن سا س ≠ ٠ لأي س).

نحن الآن مهيأون لأعطاء نص النظرية التي تربط بين الاستقلال الخطي وعدم تلاشي الرنسكية (أنظر النتيجة ٣ ـ ٣).

النظرية ٧ ـ ٦ يكون الحلان

$$\{ س_١ (ن) ، ص_١ (ن) \} \text{ و } \{ س_٢ (ن) ، ص_٢ (ن) \}$$

مستقلين خطياً اذا ، وفقط إذا كان ر (ن) ≠ ٠

البرهان: افرض ان الحلين مستقلان خطياً وان ر (ن) = ٠ فيكون

$$س_١ ص_٢ = س_٢ ص_١ ،$$

أي ان

$$س_١ / س_٢ = ص_١ / ص_٢ = حـ ،$$

حيث حـ ثابت ما. فيكون

$$س_١ = حـ س_٢ ، ص_١ = حـ ص_٢ ،$$

ويكون الحلان متناسبين، اي غير مستقلين. وهذا يناقض ما فرضناه. فاذن

ر (ن) $\neq$ ٠

وبالعكس،

ليكن ر (ن) $\neq$ ٠

فاذا كان الحلان متناسبين كان هنالك عددان حـ$_1$ ، حـ$_2$ ليسا كلاهما صفرين، ويحققان العلاقتين:

حـ$_1$ س$_1$ + حـ$_2$ س$_2$ = ٠ ، حـ$_1$ ص$_1$ + حـ$_2$ ص$_2$ = ٠

فعلى فرض ان حـ$_1$ $\neq$ ٠ يكون س$_1$ = حـ س$_2$ ، ص$_1$ = حـ ص$_2$ ، حيث حـ = ـحـ$_2$ /حـ$_1$ ولكن هذا يجعل

ر (ن) = س$_1$ ص$_2$ − س$_2$ ص$_1$ = حـ س$_2$ ص$_2$ − حـ س$_2$ ص$_2$ = ٠

وهذا أيضاً مخالف للفرض.

اذن فلا بد ان يكون الحلان مستقلين خطياً.

ويمكن تلخيص محتوى النظريات الأربع السابقة في العبارة التالية:

اذا كان

{ س$_1$ ، ص$_1$ } و { س$_2$ ، ص$_2$ }

حلين للمنظومة الخطية:

سَ = أ$_{11}$ س + أ$_{21}$ ص

(٧ ـ ٤١) ....

صَ = أ$_{12}$ س + أ$_{22}$ ص

يكون { حـ$_1$ س$_1$ + حـ$_2$ س$_2$ ، حـ$_1$ ص$_1$ + حـ$_2$ ص$_2$ } الحل العام للمنظومة (٧ـ ٤١) بشرط ان تكون ر (ن) $\neq$ ٠ أي بشرط ان يكون الحلان { س$_1$ ، ص$_1$ } و { س$_2$ ، ص$_2$ } مستقلين خطياً.

وأخيراً، لننظر في المنظومة (٧ ـ ٣٢) غير المتجانسة. فالمعادلة التالية هي التقابل المباشر للنظرية ٣ ـ ٥ . وبرهانها متروك للطالب، ويسهل ان يجعل على غرار برهان تلك النظرية.

النظرية ٧ ـ ٧ اذا كان { س* ، ص* } هو الحل العام للمنظومة (٧ ـ ٣٢)، وكان { س$_ر$ ، ص$_ر$ } أي حل للمنظومة (٧ ـ ٣٢)، يكون { س* − س$_ر$ ، ص* − ص$_ر$ } هو الحل العام للمعادلة المتجانسة (٧ ـ ٤١) وبعبارة أخرى: ان الحل العام للمنظومة (٧ ـ ٣٢) يمكن ان يكتب بصيغة مجموع الحل العام للمنظومة المتجانسة (٧ ـ ٤١) مع أي حل خاص للمنظومة غير المتجانسة (٧ ـ ٣٢).

المثال ٧ ـ ٤ ـ ٣ انظر في المنظومة

سَ = ٣س + ٣ص + ن

. . . . (٧ ـ ٤٢)

صَ = −س − ص + ١

ان بالإمكان حل هذه المنظومة بطرق البند السابق. فنلاحظ هنا ان

{ ١ ، −١ } و { −٣ e^{٢ن} ، e^{٢ن} }

حلان للمنظومة المتجانسة

سَ = ٣س + ٣ص ، صَ = −س − ص

وان

$$\left\{ -\frac{١}{٤}(ن^{٢} + ٩ن + ٣) ، \frac{١}{٤}(ن^{٢} + ٧ن) \right\}$$

حل خاص للمنظومة (٧ ـ ٤٢). فالحل العام للمنظومة (٧ ـ ٤٢) اذن هو:

$$\{ س(ن) ، ص(ن) \} = \{ حـ_١ - ٣ حـ_٢ e^{٢ن} - \frac{١}{٤}(ن^٢ + ٩ن + ٣) ،$$

$$- حـ_١ + حـ_٢ e^{٢ن} + \frac{١}{٤}(ن^٢ + ٧ن) \}$$

وننهي هذا البنـد، كما في الفصـل ٣، بالإشـارة الى ان نظـريـات هذا البند يسهل تعميمها بحيث تسري على منظومات من ثلاث معادلات وأكثر.

التمارين ٧ ـ ٤

١ . أ) بيِّن أن $\{ e^{-٣ن} ، -e^{-٣ن} \}$ ، $\{ (١ - ن) e^{-٣ن} ، ن e^{-٣ن} \}$ حلان للمنظومة:

$$سَ = - ٤س - ص ، صَ = س - ٢ ص$$

ب) احسب الرنسكية وبيِّن ان الحلين مستقلان خطياً.

جـ) اكتب الحل العام للمنظومة.

٢ . أ) بيِّن أن $\{ e^{٢ن}$ جتا ٢ن ، $-٢ e^{٢ن}$ جا ٢ن $\}$ و$\{ e^{٢ن}$ جا ٢ن ، $٢ e^{٢ن}$ جتا ٢ن$\}$ حلان للمنظومة:

$$سَ = ٢س + ص ، صَ = -٤س + ٢ص$$

ب) إحسب رنسكية هذين الحلين، وبين انهما مستقلان خطياً.

جـ) بين أن $\{ \frac{١}{٤} ن e^{٢ن} ، - \frac{١١}{٤} e^{٢ن} \}$ حل للمنظومة غير المتجانسة:

$$سَ = ٢س + ص + ٣ e^{٢ن} ، صَ = - ٤س + ٢ص + ن e^{٢ن}$$

د) استناداً الى (أ) و (حـ) اكتب الحل العام للمنظومة غير المتجانسة في (جـ).

٣. أ) بيِّن أن { جا $ن^٢$ ، ٢ن جتا $ن^٢$ } و { جتا $ن^٢$ ، -٢ ن جا $ن^٢$ } حلان للمنظومة :

$$سَ = ص ، صَ = -٤ ن^٢ س + \frac{١}{ن} ص$$

ب) بيِّن أن الحلين مستقلان خطياً.

جـ) بيِّن أن ر (٠) = ٠

د) فسر التناقض الظاهري مع النظرية ٧ ـ ٦ .

٤. أ) بيِّن أن { جا لي $ن^٢$ ، (٢/ن) جتا لي $ن^٢$ } و { جتا لي $ن^٢$ - (٢/ن) جا لي $ن^٢$ }

حلان مستقلان خطياً للمنظومة

$$سَ = ص ، صَ = - \frac{٤}{ن^٢} س - \frac{١}{ن} ص$$

ب) إحسب الرنسكية ر (ن).

٥. أثبت النظرية ٧ ـ ٣ .

٦. أثبت النظرية ٧ ـ ٧ .

٧ ـ ٥ حل المعادلات الخطية

المتجانسة، ذات المعاملات الثابتة :

طريقة المحدّدات

رأينا في البند (٧ ـ ٣) ان طريقة الحذف يمكن ان تستعمل لحل منظومات المعادلات الخطيـة ذات المعـامـلات الثـابتة. ولكن لأن العمليات الحسابية قد تتعقد، سنبين في هذا

البنـد طريقـة أجـدى للحصـول على حلول للمنظـومـات المتجانسة. واما غير المتجانسة فنعالجها في التمارين ٩ إلى ١٤ أنظر في المنظومة المتجانسة:

$$س' = أ_{١١} س + أ_{٢١} ص$$

(٧ - ٤٣)

$$ص' = أ_{١٢} س + أ_{٢٢} ص$$

حيث $أ_{ري}$ ثوابت: لقـد كانت وسيلتنـا الـرئيسيـة لحل المعـادلات الخطيـة المتجـانسة ذات المعاملات الثابتة تتضمن الحصول على معادلة مساعدة، وذلك بأن «حزرنا» بأن الحل من النوع $ص = e^{\lambda س}$.

فبمثـل طريقـة البنـد (٣ ـ ٤) ، نحـزر هنا بأن هنالك حلاً للمنظومة (٧ ـ ٤٣) من النوع $\{\propto e^{\lambda ن}، \beta e^{\lambda ن}\}$ حيث $\propto$ ، β ، λ ثابتات ولكن يلزم تعيينها.

فنعوض $س(ن) = \propto e^{\lambda ن}$ ، $ص(ن) = \beta e^{\lambda ن}$ ، في (٧ ـ ٤٣)، فينتج ما يلي:

$$س' = \propto \lambda e^{\lambda ن} = أ_{١١} \propto e^{\lambda ن} + أ_{٢١} \beta e^{\lambda ن}$$

(٧ ـ ٤٤) ....

$$ص' = \beta \lambda e^{\lambda ن} = أ_{١٢} \propto e^{\lambda ن} + أ_{٢٢} \beta e^{\lambda ن}$$

فبعد القسمة على $e^{\lambda ن}$ نحصل على المنظومة الخطية:

$$(أ_{١١} - \lambda) \propto + أ_{٢١} \beta = ٠$$

(٧ ـ ٤٥) ....

$$أ_{١٢} \propto + (أ_{٢٢} - \lambda) \beta = ٠$$

ونـريـد ن نجـد قيـماً للثابت λ يكون معها للمنظومة (٧ ـ ٤٥) حل هو ($\propto$ ، β) على الا يكون $\propto$ ، β كلاهما صفراً. فحسب نظرية المحددات (انظر الملحق ٤)، يتحقق هذا الحل كلما كانت محددة المنظومة صفراً أي أن

$$\text{ح} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} - \lambda & \text{أ}_{\text{٢١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} - \lambda \end{vmatrix} = (\text{أ}_{\text{١١}} - \lambda)(\text{أ}_{\text{٢٢}} - \lambda) - \text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{أ}_{\text{٢١}} = \text{٠}$$

. . . . (٧ ـ ٤٦)

نحل هذه المحددة فنحصل على المعادلة التر بيعية :

$$\lambda^{\text{٢}} - (\text{أ}_{\text{١١}} + \text{أ}_{\text{٢٢}})\,\lambda + (\text{أ}_{\text{١١}}\,\text{أ}_{\text{٢٢}} - \text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{أ}_{\text{٢١}}) = \text{٠}$$

. . . . (٧ ـ ٤٧)

ونعـرف هذه بالمعـادلـة المسـاعـدة للمنظـومـة (٧ ـ ٤٣) . وليس صدفـة اننا نستعمل هذا المصطلح هنا، كما سنبين :

إفرض اننا فاضلنا أولى معادلتي (٧ ـ ٤٣) وحذفنا الدالة ص (ن) ، فينتج :

$$\text{سً} = \text{أ}_{\text{١١}}\,\text{سَ} + \text{أ}_{\text{٢١}}\,(\text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{س} + \text{أ}_{\text{٢٢}}\,\text{ص})$$

. . . . (٧ ـ ٤٨)

فإذن :

$$\text{سً} - \text{أ}_{\text{١١}}\,\text{سَ} - \text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{س} = \text{أ}_{\text{٢٢}}\,\text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{ص} = \text{أ}_{\text{٢٢}}\,(\text{سَ} - \text{أ}_{\text{١١}}\,\text{س})$$

نجمع الحدود المتشابهة، فنحصل على المعادلة المتجانسة :

$$\text{سً} - (\text{أ}_{\text{١١}} + \text{أ}_{\text{٢٢}})\,\text{سَ} + (\text{أ}_{\text{١١}}\,\text{أ}_{\text{٢٢}} - \text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{أ}_{\text{١٢}})\,\text{س} = \text{٠}$$

. . . . (٧ ـ ٤٩)

والمعادلة المساعدة للمعادلة (٧ ـ ٤٩) هي نفسها المعادلة (٧ ـ ٤٧) .

اذن فالخطوات الجبر ية التي تلزم للحصول على (٧ ـ ٤٩) يمكن توفيرها بوضع المحددة

ح = ٠ .

ويلاحظ القاريء ان المنظومة (٧ ـ ٢٥) غير المتجانسة تفضي الى المعادلة (٧ ـ ٢٧) غير المتجانسة. ذات الرتبة الثانية، ومعادلتها المساعدة هي (٧ ـ ٤٧) .

وكما في الفصل ٣، هناك ثلاث حالات للدراسة. حسب كون الجذرين $\lambda_{\text{١}}$، $\lambda_{\text{٢}}$، في المعـادلـة المسـاعدة، حقيقيين مختلفين، أو حقيقيين متساويين، او مركبين مترافقين.

وسنعالج هذه الحالات الثلاث، كلا على حدة.

الحالة ١ : الجذران حقيقيان مختلفان : اذا كان $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ عددين حقيقيين مختلفين ، فلدينا مقابلهما حلان للمنظومة (٧ ـ ٤٣) هما

$\{ \alpha_{١} e^{\lambda_{١} ن} ، \beta_{١} e^{\lambda_{١} ن} \}$ و $\{ \alpha_{٢} e^{\lambda_{٢} ن} ، \beta_{٢} e^{\lambda_{٢} ن} \}$ على التوالي .

فلأيجاد الثابتين $\alpha_{١}$ ، $\beta_{١}$ ، على الا يكونا كلاهما صفراً ، عوض عن λ في المنظومة (٧ ـ ٤٥) بالقيمة $\lambda_{١}$. ويكرر هذا الأجراء لايجاد $\alpha_{٢}$ ، $\beta_{٢}$ ، $\lambda_{٢}$.

ونلاحظ ان هذه الثوابت ليست وحيدة ، والواقع أنه لكل $\lambda_{١}$ أو $\lambda_{٢}$ هنالك عدد لا نهاية له من الأزواج ، $\{ \alpha ، \beta \}$ كلها تحقق (٧ ـ ٤٥) . ولكي نرى هذا يكفي ان نلاحظ انه اذا كان $\{ \alpha ، \beta \}$ حلاً كان $\{ حـ \alpha ، حـ \beta \}$ حلاً أيضاً ، لكل قيم حـ الحقيقية .

وأخيراً ان ازواج الحلول التي ذكرت مستقلة خطياً ، إذ لو لم تكن مستقلة لأمكن وجود عدد حـ بحيث يكون

$$\alpha_{٢} e^{\lambda_{٢} ن} = حـ \, \alpha_{١} e^{\lambda_{١} ن} ، \quad \beta_{٢} e^{\lambda_{٢} ن} = حـ \, \beta_{١} e^{\lambda_{١} ن} .$$

وواضح ان هذا مستحيل لأن $\lambda_{١} \neq \lambda_{٢}$. واذن فقد برهنا النظرية التالية :

النظرية ٧ ـ ٨ اذا كان $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ جذرين حقيقيين مختلفين للمعادلة (٧ ـ ٤٧) ، كان

$$\{ \alpha_{١} e^{\lambda_{١} ن} ، \beta_{١} e^{\lambda_{١} ن} \} \text{ و } \{ \alpha_{٢} e^{\lambda_{٢} ن} ، \beta_{٢} e^{\lambda_{٢} ن} \}$$

حلين للمنظومة (٧ ـ ٤٣) مستقلين خطياً ، وفيهما الزوجان

$$\{ \alpha_{١} ، \beta_{١} \} ، \{ \alpha_{٢} ، \beta_{٢} \}$$

حلان للمنظومة (٧ ـ ٤٥) ، حيث $\lambda = \lambda_{١}$ ، $\lambda = \lambda_{٢}$ على التوالي .

المثال ٧ ـ ٥ ـ ١ خذ المنظومة التالية (أنظر المثالين ٧ ـ ٤ ـ ١ ، ٧ ـ ٤ ـ ٢) :

$\dot{س} = -س + ٦ ص$

$$\dot{ص} = س - ٢ ص \qquad \text{(٧ ـ ٥٠)}$$

هنا $أ_{١١} = -١$ ، $أ_{٢١} = ٦$ ، $أ_{١٢} = ١$ ، $أ_{٢٢} = -٢$ ،

فالمعادلة (٧ ـ ٤٦) تصير كما يلي:

$$ح = \begin{vmatrix} -١ - \lambda & ٦ \\ ١ & -٢ - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + ٢)(\lambda + ١) - ٦ = \lambda^{٢} + ٣\lambda - ٤ = ٠$$

وجذراها: $\lambda_{١} = -٤$ ، $\lambda_{٢} = ١$.

فمع $\lambda_{١} = -٤$ ، تعطي المنظومة (٧ ـ ٤٥) المعادلتين:

$$٣ \propto_{١} + ٦ \beta_{١} = ٠$$

$$\propto_{١} + ٢ \beta_{١} = ٠$$

ولأن المعادلة الأولى ثلاثة امثال الثانية، تكون $\propto_{١} = -٢ \beta_{١}$ ، فيكون $\{ -٢ ، ١ \}$ حلاً.

فالزوج الأول من الحلول هو اذن $\{ -٢ e^{-٤ن} ، e^{-٤ن} \}$.

وبالمثل $\lambda_{٢} = ١$ تعطي المعادلتين:

$$-٢ \propto_{٢} + ٦ \beta_{٢} = ٠$$

$$\propto_{٢} - ٣ \beta_{٢} = ٠$$

ولهما حل هو $\propto_{٢} = ٣$ ، $\beta_{٢} = ١$. فالحل الثاني المستقل خطياً عن الحل الأول هو الزوج المرتب $\{ ٣ e^{ن} ، e^{ن} \}$ فحسب النظرية ٧ ـ ٤ يكون الحل العام:

$$\{ س(ن) ، ص(ن) \} = \{ -٢ حـ_{١} e^{-٤ن} + ٣ حـ_{٢} e^{ن} ، حـ_{١} e^{-٤ن} + حـ_{٢} e^{ن} \}$$

الحالة ٢ الجذران متساويان: عندما يكون $\lambda_{١} = \lambda_{٢}$ يكون واضحاً ان أحد الحلين هو

$\{ \propto_1 e^{\lambda_1 n} ، \beta_1 e^{\lambda_1 n} \}$

واما الحل الثاني الذي تعطيه النظرية ٧ ـ ٨ ، أي $(\propto_2 e^{\lambda_2 n} ، \beta_2 e^{\lambda_2 n} \}$ فليس مستقلاً خطياً عن الأول الا اذا كان $أ_{11} = أ_{22}$ ، $أ_{21} = أ_{12} = 0$.

وفي الحالة الثانية تكون لدينا المنظومة الفردية (uncoupled) $سَ = أ_{11}$ س ، صَ = $أ_{22}$ ص. وجذراها المستقلان خطياً:

$\{ \propto_1 e^{\lambda_1 n} ، 0 \}$ و $\{ 0 ، \beta_2 e^{\lambda_1 n} \}$ ، $\lambda_1 = \lambda_2 = أ_{11} = أ_{22}$.

(وتسمى المنظومة سَ = $أ_{11}$ س ، صَ = $أ_{22}$ ص بالفردية لأن كلاً من معادلتيها تحتوي على دالة واحدة فقط) .

وحسب ما لقيناه في الفصل ٣، قد نتوقع ان الحل الثاني المستقل خطيا سيكون بالشكل:

$\{ \propto_2 n e^{\lambda_1 n} ، \beta_2 n e^{\lambda_1 n} \}$

ولكن هذا غير صحيح، فالحل الثاني المستقل خطياً انما هو بالشكل:

$\{ س (ن) ، ص (ن) \} = \{ (\propto_2 + \propto_3 n) e^{\lambda_1 n} ، (\beta_2 + \beta_3 n) e^{\lambda_1 n} \}$

(٧ ـ ٥١) ....

ولحساب الثوابت $\propto_2$ ، $\propto_3$ ، β_2 ، β_3 يلزم ان نعوض في المنظومة الأصلية (٧ ـ ٤٣) . ولنوضح ذلك بمثال:

المثال ٧ ـ ٥ ـ ٢ أنظر في المنظومة

سَ = − ٤س − ص

(٧ ـ ٥٢) ....

صَ = س − ٢ ص

هنا تكون المعادلة (٧ ـ ٤٦) :

$$ح = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda+2)+1 = \lambda^{2}+6\lambda+9 = 0$$

وهذه لها الجذر المكرر:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

فمن المنظومة (٧ ـ ٤٥)، تعطينا $\lambda = -3$ المعادلتين $-\propto_1 - \beta_1 = 0$ ، $\propto_1 + \beta_1 = 0$

ولها حل هو $\propto_1 = 1$ ، $\beta_1 = -1$ وهو غير عاطل ويفضي الى الحل $\{ e^{-3ن} , -e^{-3ن} \}$

فلنحاول الآن ان نجد حلاً بالشكل الذي تعطيه المعادلة (٧ ـ ٥١)، وهو:

$$\{ (\propto_2 + \propto_3 ن) e^{-3ن} , (\beta_2 + \beta_3 ن) e^{-3ن} \} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧ - ٥٣)$$

نعوض الزوج في المنظومة (٧ ـ ٥٢) فينتج:

$$e^{-3ن} (\propto_3 - 3\propto_2 - 3\propto_3 ن) = -4(\propto_2 + \propto_3 ن) e^{-3ن} - (\beta_2 + \beta_3 ن) e^{-3ن}$$

$$e^{-3ن} (\beta_3 - 3\beta_2 - 3\beta_3 ن) = (\propto_2 + \propto_3 ن) e^{-3ن} - 2(\beta_2 + \beta_3 ن) e^{-3ن}$$

فنساوي بين الحدود الثابتة، وبين مضاعفات ن، ونقسم على $e^{-3ن}$ ، فنحصل على المنظومة التالية من المعادلات المتناسبة خطياً:

$$\propto_3 - 3\propto_2 = -4\propto_2 - \beta_2$$
$$-3\propto_3 = -4\propto_3 - \beta_3$$
$$\beta_3 - 3\beta_2 = \propto_2 - 2\beta_2$$
$$-3\beta_3 = \propto_3 - 2\beta_3$$

فأحد الحلول هو $\propto_2 = 1$ ، $\beta_2 = -2$ ، $\propto_3 = 1$ ، $\beta_3 = -1$

فالزوج $\{ (1 + ن) e^{-3ن} , (-2 - ن) e^{-3ن} \}$ حل ثانٍ للمنظومة (٧ ـ ٥٢) ويسهل

التحقق من ان الزوجين السابقين مستقلان خطياً لأن | ر (ن) | = ١ ونلخص هذه النتائج بالنظرية التالية :

النظريـة ٧ ـ ٩ اذا كان للمعـادلـة (٧ ـ ٤٧) جذران حقيقيـان متساويان، $\lambda_١ = \lambda_٢$.

فهناك إذن الثوابت $\alpha_١$ ، $\alpha_٢$ ، $\alpha_٣$ ، $\beta_١$ ، $\beta_٢$ ، $\beta_٣$ حيث يكون الزوجان

$$\{س_١(ن) ، ص_١(ن)\} = \{\alpha_١ e^{\lambda_١ ن} ، \beta_١ e^{\lambda_١ ن}\}$$

(٧ ـ ٥٤) ....

$$و \{س_٢(ن) ، ص_٢(ن)\} = \{(\alpha_٢ + \alpha_٣ ن) e^{\lambda_١ ن} ، (\beta_٢ + \beta_٣ ن) e^{\lambda_١ ن}\}$$

حلين مستقلين خطياً للمنظومة (٧ ـ ٤٣).

والثـابتـان $\alpha_١$ ، $\beta_١$ هما حلٌّ غير عاطـل للمنظومة المتجانسة في (٧ ـ ٤٥). واما الثوابت الأخرى فتحسب بتعويض المعادلة الثانية من (٧ ـ ٥٤) في المنظومة (٧ ـ ٤٣).

ملاحظـة : في عمليـة التعـويض نحصـل دائـماً على منظـومة متجانسة من اربع معادلات بالمجاهيل الأربعة : $\alpha_٢$، $\beta_٢$ ، $\alpha_٣$ ، $\beta_٣$. فلهذه المنظومة حلول غير عاطلة بدليل ان محددتها صفر. وبرهان ذلك في التمرين ٨.

الحالة الثالثة : الجذران مركبان مترافقان :

ليكن $\lambda_١$ = أ + i ب ، $\lambda_٢$ = أ − i ب ، حيث أ ، ب حقيقيان، ب ≠ ٠

فيكون زوجا الحلول $\{\alpha_١ e^{(أ+iب)ن} ، \beta_١ e^{(أ+iب)ن}\}$

و $\{\alpha_٢ e^{(أ-iب)ن} ، \beta_٢ e^{(أ-iب)ن}\}$ مستقلين خطياً.

الا ان الثوابت $\alpha_١$ ، $\beta_١$ ، $\alpha_٢$ ، $\beta_٢$ التي نحصل عليها من المنظومة (٧ ـ ٤٥) هي أعداد مركبة. فلكي نحصل على ازواج من الحلول الحقيقية، نعمل ما يلي:

نفرض $\alpha_١$ = ك$_١$ + i ك$_٢$ ، $\beta_١$ = ل$_١$ + i ل$_٢$ ، ونطبق قاعدة أويلر $e^{i\theta}$ = جتا θ + i جا θ على الزوج الأول من الحلول المركبة، فينتج :

$س (ن) = (ك_١ + i ك_٢) e^{أن} (جتا ب ن + i جا ب ن)$

(٧ ـ ٥٥) ....

$ص (ن) = (ل_١ + i ل_٢) e^{أن} (جتا ب ن + i جا ب ن)$

نضرب، ونذكر ان $i^٢ = -١$ ، فنحصل على المعادلتين:

$س (ن) = e^{أن} [(ك_١ جتا ب ن - ك_٢ جا ب ن) + i (ك_١ جا ب ن + ك_٢ جتا ب ن)]$

(٧ ـ ٥٦) ....

$ص (ن) = e^{أن} [(ل_١ جتا ب ن + ل_٢ جا ب ن) + i (ل_١ جا ب ن + ل_٢ جتا ب ن)]$

ولكن بما ان معاملات المنظومة (٧ ـ ٤٣) حقيقية، فالسبيل الوحيد لأن تكون { س ، ص } حلاً هو ان تتلاشى الحدود الحقيقية، وكذلك الحدود التخيلية. واذن فالاقسام الحقيقية من س ، ص تكون زوجاً من حلول (٧ ـ ٤٣)، والأقسام التخيلية تكون زوجا آخر. أي أن:

$\{ س_١ (ن) ، ص_١ (ن) \} = \{ e^{أن} (ك_١ جتا ب ن - ك_٢ حا ب ن) ، e^{أن} (ل_١ جتا ب ن - ل_٢ جا ب ن) \}$

(٧ ـ ٥٧) ....

$\{ س_٢ (ن) ، ص_٢ (ن) \} = \{ e^{أن} (ك_١ جا ب ن + ك_٢ جتا ب ن)، e^{أن} (ل_١ جا ب ن + ل_٢ جتا ب ن) \}$

ويسهل حساب رنسكية ازواج الحلول، فهي:

$ر (ن) = e^{٢أن} (ك_١ ل_٢ - ك_٢ ل_١)$

ولنبين ان الزوجين (٧ ـ ٥٧) مستقلان خطياً:

فلنفرض خلاف ذلك. فتكون ر (ن) = ٠ وهذا يعني ان $ك_١ ل_٢ = ك_٢ ل_١$. وهو يتضمن $ل_٢ \alpha_١ = ك_٢ \beta_١$ (حسب تعريف $\alpha_١$ ، $\beta_١$). ولكن لا $\alpha_١$ ولا $\beta_١$ تساوي صفراً، اذ لو كانت اي منهما صفراً لكانت الأخرى كذلك ولكان زوج الحلول في (٧ ـ ٥٥)

عاطلاً.

وكذلك $ك_٢$ ليست صفراً، اذ لو كانت لكانت $ل_٢$ صفراً، ولكانت أولى معادلتي (٧ ـ ٤٥) تمنع $\lambda_١$ من أن تكون مركبة. نضرب هذه المعادلة في $ك_٢$، ونستعمل المتطابقة $ل_٢ \propto_١ = ك_٢ \beta_١$، ونقسم على $\propto_١$ فينتج:

$$(أ_{١١} - \lambda_١)\, ك_٢ + أ_{٢١}\, \beta_٢ = ٠$$

فهنا أيضاً ينتج ان $\lambda_١$ ليست مركبة.

اذن يستحيل ان تكون ر (ن) صفراً. واذن فقد أثبتنا النظرية التالية:

النظرية ٧ ـ ١٠ اذا كان للمعادلة (٧ ـ ٤٧) جذران مركبان: $\lambda_١ = أ + \mathbf{i}\, ب$ ، $\lambda_٢ = أ - \mathbf{i}\, ب$ ، يكون (٧ ـ ٥٧) حلين مستقلين خطياً للمنظومة (٧ ـ ٤٣).

المثال ٧ ـ ٥ ـ ٣ أنظر في المنظومة

$$سَ = ٤س + ص$$

(٧ ـ ٥٨) ....

$$صَ = - ٨س + ٨ص$$

$$هنا ح = \begin{vmatrix} ٤ - \lambda & ١ \\ -٨ & ٨ - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^٢ - ١٢\lambda + ٤٠ = ٠$$

فالجذران: $\lambda_١ = ٦ + ٢\,\mathbf{i}$ ، $\lambda_٢ = ٦ - ٢\,\mathbf{i}$. فحسب النظرية (٧ ـ ١٠) يكون الحلان المستقلان خطياً:

$\{ س_١ (ن) ، ص_١ (ن) \} = \{ e^{٦ن} (ك_١ \text{ جتا } ٢ن - ك_٢ \text{ جا } ٢ن) ، e^{٦ن} (ل_١ \text{ جتا } ٢ن - ل_٢ \text{ جا } ٢ن) \}$

$\{ س_٢ (ن) ، ص_٢ (ن) \} = \{ e^{٦ن} (ك_١ \text{ جا } ٢ن + ك_٢ \text{ جتا } ٢ن) ، e^{٦ن} (ل_١ \text{ جا } ٢ن + ل_٢ \text{ جتا } ٢ن) \}$

نعوض المعادلة الأولى في (٧ ـ ٥٨)، فنحصل بعد عمليات جبرية كثيرة على المنظومة:

$$(\text{٢ ك}_1 - \text{٢ ك}_2 - \text{ك}_1)\ \text{جتا ٢ن} - (\text{٢ ك}_1 + \text{٢ ك}_2 - \text{ل}_1)\ \text{جا ٢ن} = ٠$$

$$(\text{٨ ك}_1 - \text{٢ ل}_1 - \text{٢ ل}_2)\ \text{جتا ٢ن} - (\text{٨ ك}_1 + \text{٢ ل}_1 - \text{٢ ل}_2)\ \text{جا ٢ن} = ٠$$

ولأن ن اعتباطية والاقترانين جا ٢ن ، جتا ٢ن مستقلان خطياً فان الحدود التي داخل الاقواس لا بد ان تتلاشى. فمن القيم التي تحقق ذلك:

$$\text{ك}_1 = ١ ،\ \text{ك}_2 = \frac{١}{٢} ،\ \text{ل}_1 = ١ ،\ \text{ل}_2 = ٣$$

فالزوجان

$$\{ e^{\text{٦ن}}(\text{جتا ٢ن} - \frac{١}{٢}\ \text{جا ٢ن}) ،\ e^{\text{٦ن}}(\text{جتا ٢ن} - \text{٣ جا ٢ن}) \}$$

$$\{ e^{\text{٦ن}}(\text{جا ٢ن} + \frac{١}{٢}\ \text{جتا ٢ن}) ،\ e^{\text{٦ن}}(\text{جا ٢ن} + \text{٣ جتا ٢ن}) \}$$

حلان للمنظومة (٧ ـ ٥٨) مستقلان خطياً.

والحل العام لهذه المنظومة هو تجميع خطي لهذين الحلين.

المثال ٧ ـ ٥ ـ ٤ معظم الأنظمة البيولوجية يضبطها انتاج الأنزيمات او الهرمونات التي تنشط أو تعوق إفراز بعض المركبات. فالجلوكاجوت، الهرمون البنكرياسي، مثلاً ينشط انطلاق الجلوكوز من الكبد الى الدم. وارتفاع كمية الجلوكوز في الدم يعوق إفراز الجلوكاجون ولكن يعمل على زيادة افراز هرمون الأنسولين والأنسولين بدوره يساعد على ازالة الجلوكوز من الدم وعلى تحويله الى جليكوجين في الألياف العضلية فليكن ج و أ

مقدار إنحراف الجلوكوز والأنسولين، على التوالي، في بلازما الدم، عن مستواهما الطبيعي (حالة الصوم) فيتكون لدينا المنظومة

$$\frac{د ج}{د ن} = - هـ_{١١} ج - هـ_{٢١} أ$$

(٧ - ٥٩) ....

$$\frac{د أ}{د ن} = هـ_{١٢} ج - هـ_{٢٢} أ$$

حيث الثوابت $هـ_{در}$ ثوابت نموذجية موجبة يعين بعضها بالتجربة . والمعروف ان المنظومة (٧ - ٥٩) تسلك مثل حركة تموجية مخففة جداً، لأن حقن الجلوكوز مباشرة في الدم يفضي الى نقص جلوكوز الدم الى مستوى دون مستوى الصوم، في حوالي ساعة ونصف، ثم يعقب ذلك إرتفاع فوق مستوى الصوم في حوالي ثلاث ساعات . وإذن فإن المعادلة المساعدة للمنظومة (٧ - ٥٩) يجب ان يكون لها جذران مركبان مترافقان لأن الجذور المركبة وحدها هي التي تؤدي الى مسلك متأرجح . والمعادلة هي :

$$ح = \begin{vmatrix} -هـ_{١١} - \lambda & - هـ_{٢١} \\ هـ_{١٢} & -هـ_{٢٢} - \lambda \end{vmatrix} = (هـ_{١١} + \lambda)(هـ_{٢٢} + \lambda) + هـ_{٢١} هـ_{١٢}$$

$$= \lambda^{٢} + (ك_{١١} + ك_{٢٢}) \lambda + (ك_{١١} ك_{٢٢} + ك_{٢١} ك_{١٢}) = ٠ \quad .... \quad (٧ - ٦٠)$$

وجذراها

$أ \pm i ب$ ، حيث $أ = (هـ_{١١} + هـ_{٢٢})/٢$ ، $ب = \sqrt{هـ_{٢١} هـ_{١٢} - (هـ_{١١} - هـ_{٢٢})^{٢}/٤}$

وحسب النظرية (٧ - ١٠)، ينتج الحلاّن :

$$\{ج_{١}، أ_{١}\} = \{e^{-أن}(ك_{١} جتا ب ن - ك_{٢} جا ب ن)، e^{-أن}(ل_{١} جتا ب ن - ل_{٢} جا ب ن)\}$$

(٧ - ٦١) ....

$\{ ج_2 ، أ_2 \} = \{ e^{-أن} (ك_1 \text{ جا ب ن} ، ك_2 \text{ جتا ب ن}) ، e^{-أن} (ل_1 \text{ جا ب ن} + ل_2 \text{ جتا ب ن}) \}$

ولأن فترة التأرجـح حوالي ثلاث ساعـات، يمكن ان نجعـل ب = $2\pi / 3$ ، مع قياس الزمن بالساعات.

نعوض أولى معادلتي (٧ ـ ٦١) في (٧ ـ ٥٩)، فنحصل على المعادلتين:

$(-أ ك_1 - ب ك_2 + هـ_{11} ك_1 + هـ_{21} ل_1) \text{ جتا ب ن} + (أ ك_2 - ب ك_1 - هـ_{11} ك_2 - هـ_{21} ل_2) \text{ جا ب ن} = 0$

$(-أ ل_1 - ب ل_2 - هـ_{12} ك_1 + هـ_{22} ل_1) \text{ جتا ب ن} + (أ ل_2 - ب ل_1 + هـ_{12} ك_2 - هـ_{22} ل_2) \text{ جا ب ن} = 0$

ويجب ان تصـح هاتـان المعـادلتـان لكـل قيم ن . واذن فالحـدود بين كل قوتـين يجب ان تتلاشى . ومن القيم التي تحقق ذلك:

$ك_1 = 1 ، ك_2 = 0 ، ل_1 = (هـ_{22} - هـ_{11}) / 2 هـ_{21} ، ل_2 = -ب / هـ_{21}$

فالحل العام للمنظومة (٧ ـ ٥٩) هي الزوج $\{ ج(ن) ، أ(ن) \}$ حيث :

$$ج(ن) = e^{-أن} [حـ_1 \text{ جتا ب ن} + حـ_2 \text{ جا ب ن}] \quad \text{.......} \quad (٧ ـ ٦٢)$$

$$أ(ن) = e^{-أن} [\frac{هـ_{22} - هـ_{11}}{2 هـ_{21}} (حـ_1 \text{ جتا ب ن} + حـ_2 \text{ جا ب ن}) + \frac{ب}{هـ_{21}} (حـ_1 \text{ جا ب ن} - حـ_2 \text{ جتا ب ن})]$$

ولنفرض ان حقن الجلوكوز تمَّ في وقت كان فيه الانسولين والجلوكوز في البلازما على مستـوى الصـوم، وان الجلوكـوز انتشـر كله في الـدم قبـل (ن = ٠) عنـدمـا بدأ مستـوى

الانسولين بالأرتفاع . فيكون ج (٠) = ج. مساوياً نسبة حجم الجلوكوز المحقون الى حجم الدم، ويكون أ (٠) = ٠ ولأن ج (ن) يكون في نهايته العظمى عند ن = ٠ ، ينتج أن

$\text{ح}_{١} = \text{ج}_{٠}$ وان $\text{ح}_{٢} = ٠$ فاذن

$$\text{ج}(\text{ن}) = \text{ج}_{٠}\, e^{-\text{أن}}\ \text{جتا ب ن} \qquad \text{. . . . .} \quad (٧ - ٦٣)$$

ولكن

$$٠ = \text{أ}(٠) = \frac{\text{هـ}_{٢٢} - \text{هـ}_{١١}}{٢\,\text{هـ}_{٢١}}\ \text{ج}_{٠}$$

فتكون

$$\text{هـ}_{١١} = \text{هـ}_{٢٢} \text{ ، } \text{ب} = \sqrt{\text{ك}_{٢١}\,\text{ك}_{١٢}} = ٢\pi/٣ \text{ ،}$$

ويكون

$$\text{ج}(\text{ن}) = \text{ج}_{٠}\,\frac{\text{ب}}{\text{ك}_{٢١}}\, e^{-\text{أن}}\ \text{جا ب ن} \qquad \text{. . . . .} \quad (٧ - ٦٤)$$

فاذا عرف أدنى مستوى وهوج $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ (> ٠)، فمن (٧ - ٦٣) يكون

$$e^{٣\text{أ}/٢} = \left|\text{ج}\left(\frac{٣}{٢}\right)\right| / \text{ج}_{٠}$$

فيكون

$$\text{هـ}_{١١} = \text{أ} = \frac{٢}{٣}\ \text{لي}\ \frac{\left|\text{ج}\left(\frac{٣}{٢}\right)\right|}{\text{ج}_{٠}}$$

فاذا عينا انسولين البلازما في أي وقت $\text{ن}_{.} > ٠$ نستطيع ان نعين الثابتين $\text{هـ}_{٢١}$ ، $\text{هـ}_{١٢}$.

التمارين ٧ ـ ٥

في التمارين ١ إلى ٧ استعمل طريقة المحددات في ايجاد حلين مستقلين خطيا لكل منظومة معطاة.

١ . سَ = ٤س − ٣ص

صَ = ٥س − ٤ص

٢ . سَ = ٧س + ٦ص

صَ = ٢س + ٦ص

٣ . سَ = −س + ص

صَ = −٥س + ٣ ص

٤ . سَ = س + ص

صَ = −س + ٣ص

٥ . سَ = −٤س − ص

صَ = س − ٢ص

٦ . سَ = ٤س − ٢ص

صَ = ٥س + ٢ص

٧ . سَ = ٤س − ٣ص

صَ = ٨س − ٦ص

٨ . استخرج المنظومة التالية من المعادلات الخطية المتجانسة، بتعويض المعادلة الثانية للزوج (٧ ـ ٥٤) في المنظومة (٧ ـ ٤٣):

$(\lambda - \text{أ}_{11})\propto_2 + \propto_3 - \text{أ} + \text{أ}_{21}\beta_2 = ٠$

$(\lambda - \text{أ}_{11})\propto_3 - \text{أ}_{21}\beta_3 = ٠$

(٧ ـ ٦٥) ....

$-\text{أ}_{21}\propto_2 + (\lambda - \text{أ}_{22})\beta_2 + \beta_3 = ٠$

$-\text{أ}_{21}\propto_3 + (\lambda - \text{أ}_{22})\beta_3 = ٠$

أ) بيِّن انه بما ان $\lambda_1 = \lambda_2 = (\text{أ}_{11} + \text{أ}_{22})/٢$ ، فان المعادلتين الثانية والرابعة من (٧ ـ ٦٥) متطابقتان .

ب) اثبت انه اذا كان بين معادلتين في اي منظومة خطية نسبة ثابتة كانت محددة المنظومة صفراً .

جـ) استنتج من (أ) و(ب) ان محددة المنظومة (٧ ـ ٦٥) صفر، ومن ثم ان (٧ ـ ٦٥) لها حلول غير عاطلة .

٩ . انظر في المعادلتين اللامتجانستين

$\acute{\text{س}} = \text{أ}_{11}\text{س} + \text{أ}_{21}\text{ص} + \text{ق}_1$

(٧ ـ ٦٦) ....

$\acute{\text{ص}} = \text{أ}_{12}\text{س} + \text{أ}_{22}\text{ص} + \text{ق}_2$

وافرض ان $\{\text{س}_1 ، \text{ص}_1\}$ و $\{\text{س}_2 ، \text{ص}_2\}$ حلان مستقلان خطيان للمنظومة المتجانسة (٧ ـ ٤٣) . ثم بيِّن أن

$\text{س}_د(\text{ن}) = \text{ع}_1(\text{ن})\,\text{س}_1(\text{ن}) + \text{ع}_2(\text{ن})\,\text{س}_2(\text{ن})$

$\text{ص}_د(\text{ن}) = \text{ع}_1(\text{ن})\,\text{ص}_1(\text{ن}) + \text{ع}_2(\text{ن})\,\text{ص}_2(\text{ن})$

هو حل خاص للمنظومة (٧ ـ ٦٦) بشرط ان تحقق ع_1 ، ع_2 المعادلتين :

$ع_1 س_1 + عَ_2 س_2 = ق_1$

$عَ_1 ص_1 + عَ_2 ص_2 = ق_2$

تدعى هذه الطـريقـة لايجـاد حل خاص للمنظـومـة (٧ ـ ٦٥) اللامتجانسة بطريقة تغيير الثوابت في المنظومات لاحظ التطابق الكبير بين هذه الطريقة وطريقة الند (٣ ـ ٧).

في التمارين (١٠) إلى (١٤) استعمل طريقة تغيير الثوابت لايجاد حل خاص لكل منظومة لامتجانسة معطاة:

١٠ . $سَ = ٢س + ص + ٣ e^{٢ن}$

$صَ = -٤س + ٢ص + ن e^{٢ن}$

١١ . $سَ = ٣س + ٣ص + ن$

$صَ = -س - ص + ١$

١٢ . $سَ = -٢س + ص$

$صَ = -٣س + ٢ص + ٢ جا ن$

١٣ . $سَ = -س + ص + جتا ن$

$صَ = -٥س + ٣ص$

١٤ . $سَ = ٣س - ٢ص + ن$

$صَ = ٢س - ٢ص + ٣ e^{ن}$

١٥ . في تجربة لدراسة دورة الكولستر ول في الجسم البشري، أعطيت حقنة في الوريد من الكـولسـتر ول المشـع (C^{14} - 4 --) وقيس مجمـوع كولستر ول البلازما والمشع . فتبينَّ ان دورة الكـولسـتر ول تعمـل على شكـل منظومة ذات حجرتين . فالحجرة التي تحتوي على الأعضاء والدم تجري الدورة فيها بسرعة، في حين انها في الحجرة الثانية أبطأ بكثير . افرض ان الجسم يأخذ الكولستر ول ويفرزه من خلال الحجرة الأولى . وليكن س (ن) و ص (ن)

يشيران الى انحراف مستوى الكولستر ول عن المستوى العادي في كل حجرة. ولنفرض معامل التحويل اليومي من الحجرة . س . هو ١٣٤, ٠ وان من هذا ٠٣٦, ٠ هوما يدخل الى الحجرة ص، وان معامل التحويل من ص هو ٠٠٢, ٠.

أ) عبِّر عن هذه المسألة بصيغة منظومة من معادلات تفاضلية متجانسة.

ب) استخرج الحل العام لهذه المنظومة.

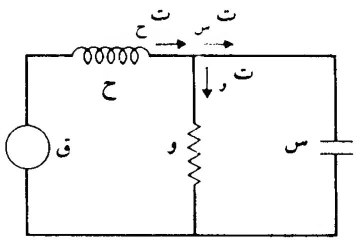
٧ ـ ٦ الدوائر الكهربائية المتعددة القوى

سنستخدم المفاهيم التي وضعناها في البندين (٢ ـ ٨) و(٤ ـ ٧)، لدراسة الشبكات الكهربائية التي تشمل على دائرتين مزدوجتين أو اكثر. والمبدآن الأساسيان اللذان يحكمان هذه الشبكات هما قانونا كرتشوف اللذان سبق ان درسناهما.

١. المجموع الجبري لانخفاضات الفولتية حول الدائرة المغلقة صفر.

٢. المجموع الجبري للتيارات التي تجري الى أي مفرق في الشبكة صفر.

أنظر في الدورة في الشكل (٧ ـ ٣): فيها عروتان.



الشكل ٧ ـ ٣

فحسب قانون الفولتية لكرتشوف يكون:

$$ح \frac{د ت_ح}{د ن} + و ت_و = ق \qquad \text{(٧ ـ ٦٧)}$$

$$\frac{ش_س}{س} - و ت_و = ٠ \qquad \text{(٧ ـ ٦٨)}$$

ولأن ت = $\frac{د س}{د ن}$، يمكن ان نكتب المعادلة الثانية بالصيغة:

$$\frac{ت_س}{س} - و \frac{د ت_و}{د ن} = ٠ \qquad \text{(٧ ـ ٦٩)}$$

وحسب قانون التيار، لكرتشوف يكون:

$$ت_ح = ت_س + ت_و \qquad \text{(٧ ـ ٧٠)}$$

فاذا عوضنا هذا في المعادلة (٧ ـ ٦٩) ينجم منها ومن (٧ ـ ٦٧) مجموعة لامتجانسة من معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى هي:

$$\frac{د ت_ح}{د ن} = - \frac{و}{ح} ت_و + \frac{ق}{ح}$$

$$\text{(٧ ـ ٧١)}$$

$$\frac{د ت_و}{ن} = \frac{ت_ح}{و س} + \frac{ت_و}{و س}$$

والمعادلة المساعدة لهذه المنظومة هي

$$ح = \begin{vmatrix} -\lambda & -و/ح \\ ١/و س & -\lambda - ١/و س \end{vmatrix} = \lambda (\lambda + ١/و س) + ١/ح س$$

$$= \lambda^٢ + \lambda/و س + ١/ح س = ٠ \qquad \text{(٧ ـ ٧٢)}$$

وجذرا (٧ ـ ٧٢) هما $(-ح \pm \sqrt{ح^{٢} - ٤ و^{٢} ح س}) / ٢ وح س$

فاذا كان ح > ٤ و^{٢} س كان الجذران عددين سالبين مختلفين :

$\lambda_{١} ، \lambda_{٢}$ (لأن $\sqrt{ح^{٢} - ٤ و^{٢} ح س} < \sqrt{ح^{٢}} = ح$)

ويكون الزوجان :

$$\{ت_{ح١} ، ت_{و١}\} = \{\propto_{١} e^{\lambda_{١} ن} ، \beta_{١} e^{\lambda_{١} ن}\}$$

$$\{ت_{ح١} ، ت_{و٢}\} = \{\propto_{٢} e^{\lambda_{٢} ن} ، \beta_{٢} e^{\lambda_{٢} ن}\} \qquad \text{(٧ ـ ٧٣)}$$

هما الحلان للمنظومة المتجانسة

$$\frac{د ت_{ح}}{د ن} = -\frac{و}{ح} ت_{و}$$

$$\frac{د ت_{و}}{د ن} = \frac{ت_{ح}}{وس} - \frac{ت_{و}}{وس} \qquad \text{(٧ ـ ٧٤)}$$

والمعاملان $\propto_{ر}$ ، $\beta_{ر}$ يحققان معادلتي (٧ ـ ٤٥)، ولذا تصير المعادلة الأولى :

$$\lambda_{ر} \propto_{ر} - (و / ح) \beta_{ر} = ٠ ، ر = ١ ، ٢ \qquad \text{(٧ ـ ٧٥)}$$

وهذا يقتضي ان يكون $\propto_{ر} = - و \beta_{ر} / ح \lambda_{ر}$

فالحل العام للمنظومة المتجانسة (٧ ـ ٧٤) هو:

$$\{و (ك_{١} e^{\lambda_{١} ن} + ك_{٢} e^{\lambda_{٢} ن}) ، -ح (ك_{١} \lambda_{١} e^{\lambda_{١} ن} - ك_{٢} \lambda_{٢} e^{\lambda_{٢} ن})\}$$

ولإيجاد الحل العام للمنظومة (٧ ـ ٧١) يلزم ان نجد لها حلاً خاصاً. فلنفرض ان ق ثابتة (أي انها بطارية أو محول)، فيكون الزوج { ق/و ، ق/و } حلاً خاصاً لهذه المنظومة ،

ويسهل تبين ذلك.

فالحل العام للمنظومة (٧ ـ ٧١) اللامتجانسة هو:

$$\{\text{ت}_{\text{ح}} ،\ \text{ت}_{\text{و}}\} = \{\text{و}(\text{ك}_١ e^{\lambda_١ \text{ن}} + \text{ك}_٢ e^{\lambda_٢ \text{ن}}) + \frac{\text{ق}}{\text{و}} ،$$

$$-\text{ح}(\text{ك}_١ \lambda_١ e^{\lambda_١ \text{ن}} + \text{ك}_٢ \lambda_٢ e^{\lambda_٢ \text{ن}}) + \frac{\text{ق}}{\text{و}}\}$$

ومن هذه المعادلة يتبين بوضوح أنه بمرور الوقت يقترب $\text{ت}_{\text{ح}}$ ، $\text{ت}_{\text{و}}$ من ق/و لأن $\lambda_١$ ، $\lambda_١ < ٠$ وإذن فإن $\text{ت}_{\text{س}}$ تقترب من الصفر، حسب (٧ ـ ٧٠).

واذا كان ح = ٤ و^٢ س يكون لدينا الجذر المكرر $\lambda_١ = -١/٢$ وس، فحسب النظرية (٧ ـ ٩) يكون للمعادلة المتجانسة الجذران:

$$\{\text{ت}_{\text{ح}١} ،\ \text{ت}_{\text{و}١}\} = \{\propto_١ e^{\lambda_١ \text{ن}} ،\ \beta_١ e^{\lambda_١ \text{ن}}\}$$

$$\{\text{ت}_{\text{ح}٢} ،\ \text{ت}_{\text{ب}}\} = \{(\propto_٢ \text{ن} + \propto_٣) e^{\lambda_١ \text{ن}} ،\ (\beta_٢ \text{ن} + \beta_٣) e^{\lambda_١ \text{ن}}\}$$

والمعاملان $\propto_١$ ، $\beta_١$ يحققان المعادلة (٧ ـ ٧٥)، لذا فان $\propto_١ = \beta_١ / ٢$.

ولإيجاد المعاملات الأربعة الأخرى: $\propto_٢$ ، $\propto_٣$ ، $\beta_٢$ ، $\beta_٣$ نعوض $\{\text{ت}_{\text{ح}٢} ،\ \text{ت}_{\text{و}٢}\}$ في المنظومة (٧ ـ ٧٤). فبعد عمليات جبرية نجد ان $\propto_٢ = \beta_٢/٢$ ، $\beta_٢$

$$+\ \lambda_١ (٢ \propto_٣ - \beta_٣) = ٠$$

فاذا أخــذنـا $\propto_٢ = \frac{١}{٢}$ ، $\propto_٣ = ٢$ وس ، $\beta_٢ = ١$ ، $\beta_٣ = ٢$ وس فهــي تحقـق المعادلتين ويكون الحل العام للمنظومة (٧ ـ ٧١):

$$\{\text{ت}_{\text{ح}} ،\ \text{ت}_{\text{و}}\} = \{\frac{١}{٢} e^{\lambda_١ \text{ن}} [\text{ك}_١ + \text{ك}_٢ (\text{ن} + ٤\ \text{وس})] + \frac{\text{ق}}{\text{و}} ،$$

$$e^{\lambda_١ \text{ن}} [\text{ك}_١ + \text{ك}_٢ (\text{ن} + ٢\ \text{وس})] + \frac{\text{ق}}{\text{و}}\}$$

فمع مرور الزمن، هنا أيضاً يقترب $ت_ح$ ، $ت_و$ من ق/و ويقترب $ت_س$ من الصفر

وأخيراً. اذا كان ح < ٤ $و^٢$ س، كان $\lambda_١$ ، $\lambda_٢$ مركبين مترافقين وكان حلا المعادلة المتجانسة (٧ ـ ٧٤) هما:

{ $ت_{ح١}$ ، $ت_{و١}$ } = { $e^{أن}$ ($ك_١$ جتا ب ن - $ك_٢$ جا ب ن)، $e^{أن}$ ($ل_١$ جتا ب ن - $ل_٢$ جا ب ن) }

{ $ت_{ح٢}$ ، $ت_{و٢}$ } = { $e^{أن}$ ($ك_١$ جا ب ن + $ك_٢$ جتا ب ن) ، $e^{أن}$ ($ل_١$ جا ب ن + $ل_٢$ جتا ب ن) }

حيث أ = -١/٢ وس < ٠ ، ب = $\sqrt{٤ و^٢ ح س - ح^٢}$ / ٢ وح س.

وحسب (٧ ـ ٧٠) تفضي هاتان المعادلتان الى تأرجح مكبوح فيه $ت_ح$ ، $ت_و$ يقتربان من ق/و ، $ت_س$ يقترب من الصفر، باقتراب ن من اللانهاية.

المثال ٧ ـ ٦ ـ ١ إفرض ان و = ١٠٠ أوم، ح = ١ هنري، س = $١٠^{-٤}$ فاراد ، ق = ١٠٠ فولت.

فواضح ان ح < ٤ $و^٢$ س. فجذر المعادلة المساعدة هما المركبان المترافقان أ ± i ب.

$$وهنا : أ = - \frac{١}{٢ وس} = - ٥٠ ، ب = \frac{\sqrt{٤ و^٢ ح س - ح^٢}}{٢ وح س} = ٥٠ \sqrt{٣}$$

فحلا المعادلة المتجانسة (٧ ـ ٧٤) هما:

{ $ت_{ح١}$ ، $ت_{و١}$ } = { $e^{-٥٠ن}$ ($ك_١$ جتا ٥٠ $\sqrt{٣}$ن - $ك_٢$ جا ٥٠ $\sqrt{٣}$ن) ، $e^{-٥٠ن}$ ($ل_١$ جتا ٥٠ $\sqrt{٣}$ ن - $ل_٢$ جا ٥٠ $\sqrt{٣}$ ن) }.

{ $ت_{ح٢}$ ، $ت_{و٢}$ } = { $e^{-٥٠ن}$ ($ك_١$ جا ٥٠ $\sqrt{٣}$ن + $ك_٢$ جتا ٥٠ $\sqrt{٣}$ن) ،

$e^{-٥٠ن}$ (ل$_{١}$ جا ٥٠ $\sqrt{٣}$ ن + ل$_{٢}$ جتا ٥٠ $\sqrt{٣}$ ن }

نعوض هاتين المعادلتين في (٧ ـ ٧٤) فتنتج المنظومة المتجانسة التالية:

$$- ٥٠ ك_{١} - ٥٠ \sqrt{٣} ك_{٢} + ١٠٠ ل_{١} = ٠$$

$$- ٥٠ \sqrt{٣} ك_{١} + ٥٠ ك_{٢} - ١٠٠ ل_{٢} = ٠$$

(٧ ـ ٧٦) ....

$$- ١٠٠ ك_{١} + ٥٠ ل_{١} - ٥٠ \sqrt{٣} ل_{٢} = ٠$$

$$١٠٠ ك_{٢} - ٥٠ \sqrt{٣} ل_{١} - ٥٠ ل_{٢} = ٠$$

فاذا اخترنا لتحقيق (٧ ـ ٧٦) القيم أ$_{١}$ = ٢ ، أ$_{٢}$ = ٠ ، ب$_{١}$ = ١ ، ب$_{٢}$ = $-\sqrt{٣}$ يصبح الحل العام بالصيغة:

{ت$_{ح}$ ، ت$_{و}$} = {٢ $e^{-٥٠ن}$ (حـ$_{١}$ جتا ٥٠ $\sqrt{٣}$ن + حـ$_{٢}$ جا ٥٠ $\sqrt{٣}$ ن) + ١ ،

٢ $e^{-٥٠ن}$ [(حـ$_{١}$ - $\sqrt{٣}$ حـ$_{٢}$) جتا ٥٠ $\sqrt{٣}$ ن +

(حـ$_{٢}$ + $\sqrt{٣}$ حـ$_{١}$) جا ٥٠ $\sqrt{٣}$ ن] + ١ }

آخذين بعين الاعتبار ان ق / و = ١ في هذا المثال.

التمارين ٧ ـ ٦

١ . إفرض ان و = ١٠٠ اوم، ح = ٤ هنري، س = ١٠$^{-٤}$ ، فاراد، ق = ١٠٠ فولت (في الشكل ٧ ـ ٣)، وافرض ان التيارين ت$_{و}$ ، ت$_{ح}$ كانا صفراً عند ن = ٠ . أوجد التيارات عند ن = ٠,٠٠١ ثانية.

٢ . في التمرين (١) إفرض ان ح = ١ هنري وان المغطيات الأخرى بقيت كما هي . أوجد التيارات عند ن = ٠,٠٠١ ثانية، ٠,١ ثانية.

٣ . في التمرين (١) افرض ان ح = ٨ هنري وان المعطيات الأخرى بقيت كما هي . أوجد

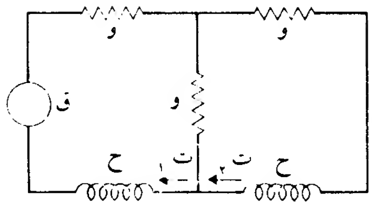
التيارات عند ن = ٠,٠٠١ ثانية. ١, ٠ ثانية.

٤. في التمرين (١) إفرض ان ق = ١٠٠ e^{-1000} ن وان جميع المعطيات الأخرى بقيت كما هي.

أ) حل التمرين ١

ب) حل التمرين ٢

جـ) حل التمرين ٣



الشكل ٧ ـ ٤

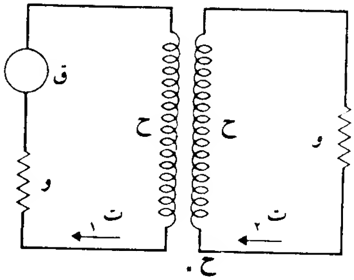
٥. أعد التمرين ٤ باعتبار ق = ١٠٠ جا ٦٠ π ن.

٦. أوجد التيار في الزمن ن في كل عروة في الشبكة (٧ ـ ٤) على فرض ان ق = ١٠٠ فولت، و = ١٠ أوم، ح = ١٠ هنري.

٧. أعد التمرين ٦ بإعتبار ق = ١٠ جا ن.

٨. الشبكة المبينة بالشكل (٧ ـ ٥) تمثل محولاً هوائي الباطن. فاذا كان ق = ١٠ جتا ن، و = ١، ح = ٢، والحث المشترك $ح_*$ = -١ (وهذا يعتمد على نمط لف السلكين). اعتبر ان الحث المشترك حث لكل من الدائرتين.

أوجد التيار في كل من الدائرتين باعتباره صفراً في كليهما عند ن = ٠



الشكل ٧ ـ ٥

٧ ـ ٧ منظومات المعادلات التفاضلية اللاخطية

في المثال (٧ ـ ١ ـ ٤) قابلتنا منظومة من المعادلات التفاضلية اللاخطية . وقد ذكرنا آنئذ انه يكاد يستحيل ان نجد لمثل هذه المنظومة حلاً صريحاً . غير انا ، كما رأينا في تحليل معادلات لوتكا وفولترا ، نستطيع ان نستنتج كثيراً من المعلومات ، من تحليل المعادلات ، دون حساب الحل النهائي .

وفي هذا البند سنعرض مثالا آخر من المنظومات اللاخطية ونناقش بعض خصائص حلها . وما نورده هنا من طرق انما هو مجرد دلالة على بعض الطرق التي بها يمكن ان تعالج المسائل اللاخطية .

يعرض أ . رابوبورت Rapoport في كتابه المعروف* نموذجاً لسباق التسلح بين دولتين : فلنفرض ان س ، ص يمثلان ما تنفقه دولتان على التسلح (وقد يكون هذا بملايين الدولارات او الروبلات مثلاً) ويفترض المؤلف ان كلا من الدولتين المتسابقتين ستتبع نوعاً من الاستراتيجية التالية : تخفض نفقاتها بمعدل يتناسب مع ما تنفقه الآن . ولكنها تزيدها بمعدل يتناسب مع ما تنفقه الدولة الأخرى ، اذا كان ما تنفقه هذه الدولة

* A. Rapoport : Flights, Games and Debates, Michigan, 1960

صغيراً، ويتناسب مع مربع ما تنفقه تلك الدولة، اذا كان ما تنفقه كبيراً.

والمنظومة التالية تعطي النموذج الرياضي لهذه الاستراتيجية:

$$\acute{س} = -أ_{١١} س + أ_{٢١} ص + أ_{٣١} ص^{٢}$$

$$(٧ - ٧٧) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\acute{ص} = أ_{١٢} س - أ_{٢٢} ص + أ_{٣٢} س^{٢}$$

حيث $أ_{١١}$ ، $أ_{٢١}$ ، $أ_{٣١}$ ، $أ_{١٢}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٢}$ ثوابت موجبة.

فأول ما نلاحظه عن المنظومة (٧ ـ ٧٧) انه عندما تكون قيم س، ص صغيرة، تكون المنظومة قريبة من المنظومة الخطية

$$\acute{س} = -أ_{١١} س + أ_{٢١} ص$$

$$(٧ - ٧٨) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\acute{ص} = أ_{١٢} س - أ_{٢٢} ص$$

ولكي ترى ذلك، نلفت الانتباه الى انه اذا كان س ، ص اصغر بكثير من الواحد يصير $س^{٢}$ ، $ص^{٢}$ نسبياً لا شيء.

اذن فقد نلمح خصائص (٧ ـ ٧٧) من تحليل للمنظومة المتجانسة الخطية (٧ ـ ٧٧). ونقول، بلغة المعادلات التفاضلية ان المنظومة (٧ ـ ٧٧) هي صورة مضطربة من المنظومة (٧ ـ ٧٨). ولكن بالطبع، عندما تكون قيمتا س، ص كبيرتين يصبح الحدان المربعان هما الغالبين، ولذا فان حلول (٧ ـ ٧٧) ينتظر ان تختلف كثيراً عن حلول (٧ ـ ٧٨).

ومن ناحية أخرى، لنحاول ان نجد نقط التوازن. وفي مسألة سباق التسلح تفسر

هذه النقاط بأنها النقاط التي عندها يستقر انفاق الدولتين . وتقع نقط التوازن هذه ، وتسمى عادة بالنقط الحرجة في المنظومة ، عندما تتلاشى المشتقتان سَ ، صَ في آن واحد .

فمن نقاط التوازن الظاهرة للعيان س = ص = ٠ حيث لا تنفق أي من الدولتين شيئاً على التسلح . ولكن أجدى من ذلك (وليس أمتع) ان نحسب نقط التوازن عندما يكون كل من سَ ، ص موجباً . فلايجاد هذه النقط ينبغي ان نحل المنظومة اللاخطية :

$$-\text{أ}_{\text{١١}}\,\text{س} + \text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{ص} + \text{أ}_{\text{٣١}}\,\text{ص}^{\text{٢}} = \text{٠}$$

$$\text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{س} + \text{أ}_{\text{٣٢}}\,\text{س}^{\text{٢}} - \text{أ}_{\text{٢٢}}\,\text{ص} = \text{٠} \qquad \text{(٧ ـ ٧٩)}$$

ويمكن حل هذه المنظومة بالتتابع : فالمعادلة الأولى تعطي :

$$\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{أ}_{\text{١١}}}\left(\text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{ص} + \text{أ}_{\text{٣١}}\,\text{ص}^{\text{٢}}\right) \qquad \text{(٧ ـ ٨٠)}$$

نعوض هذا في ثانية (٧ ـ ٧٩) فتنتج المعادلة :

$$\frac{\text{أ}_{\text{١٢}}}{\text{أ}_{\text{١١}}}\left(\text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{ص} + \text{أ}_{\text{٣١}}\,\text{ص}^{\text{٢}}\right) + \frac{\text{أ}_{\text{٣٢}}}{\text{١١}}\left(\text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{ص} + \text{أ}_{\text{٣١}}\,\text{ص}^{\text{٢}}\right)^{\text{٢}} - \text{أ}_{\text{٢٢}}\,\text{ص} = \text{٠}$$

وبعد الضرب والترتيب ينتج :

$$\frac{\text{أ}_{\text{٣٢}}\,\text{أ}^{\text{٢}}_{\text{٣١}}}{\text{أ}^{\text{٢}}_{\text{١١}}}\,\text{ص}^{\text{٤}} + \frac{\text{٢}\,\text{أ}_{\text{٣٢}}\,\text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{أ}_{\text{٣١}}}{\text{أ}^{\text{٢}}_{\text{١١}}}\,\text{ص}^{\text{٣}} + \frac{\text{أ}_{\text{٣٢}}\,\text{أ}^{\text{٢}}_{\text{٢١}} + \text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{أ}_{\text{٣١}}\,\text{أ}_{\text{١١}}}{\text{أ}^{\text{٢}}_{\text{١١}}}\,\text{ص}^{\text{٢}}$$

$$+ \frac{\text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{أ}_{\text{٢١}} - \text{أ}_{\text{٢٢}}\,\text{أ}_{\text{١١}}}{\text{أ}_{\text{١١}}}\,\text{ص} = \text{٠}$$

نقسم على ص (والمفروض انها ليست صفراً) فينتج :

$$\frac{\text{أ}_{٣٢}\,\text{أ}^{٢}_{٣١}}{\text{أ}^{٢}_{١١}}\,\text{ص}^{٣} + \frac{٢\,\text{أ}_{٣٢}\,\text{أ}_{٢١}\,\text{أ}_{٣١}}{\text{أ}^{٢}_{١١}}\,\text{ص}^{٢} + \frac{\text{أ}_{٣٢}\,\text{أ}^{٢}_{٢١} + \text{أ}_{١٢}\,\text{أ}_{٣١}\,\text{أ}_{١١}}{\text{أ}^{٢}_{١١}}\,\text{ص}$$

$$+ \frac{\text{أ}_{١٢}\,\text{أ}_{٢١} - \text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{١١}}{\text{أ}_{١١}} = ٠ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ - ٨١)$$

فالمعادلة (٧ ـ ٨١) لها ثلاثة حلول : $\text{ص}_{١}$ ، $\text{ص}_{٢}$ ، $\text{ص}_{٣}$ منها واحد أو أكثر هو عدد حقيقي موجب فنعوض هذا الحل الحقيقي الموجب ص^{*} في المعادلة (٧ ـ ٨٠) لأيجاد س^{*} . فاذا كان س^{*} موجباً أيضاً نكون قد وجدنا نقطة توازن (س^{*} ، ص^{*}) (ومن المؤسف ان هذه النقاط، في الرياضيات، كشأنها في الحياة، نادرة) .

وتبقى هنالك نقطة أخيرة في تحليل المنظومة (٧ ـ ٧٧)، هي ان نحسب كيف يتغير مستوى الانفاق في ص بتغير مستوى الانفاق في س، اي $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

فحسب قاعدة السلسلة

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \cdot \frac{\text{د ن}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}/\text{د ن}}{\text{د س}/\text{د ن}} \text{ ،}$$

يكون

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{أ}_{٢١}\,\text{س} - \text{أ}_{٢٢}\,\text{ص} + \text{أ}_{٣٢}\,\text{س}^{٢}}{-\text{أ}_{١١} + \text{أ}_{٢١}\,\text{ص} + \text{أ}_{٣١}\,\text{ص}^{٢}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ - ٨٢)$$

والمعادلة (٧ ـ ٨٢) معادلة تفاضلية لا خطية، ولا يمكن ان تحل بأي من طرق الفصل ٢ .

ولكن يمكن ان نستخدمها في حساب التغيرات النسبية في ص مقابل س على

مستويات الأنفاق المختلفة، أي اذا أعطينا ص ، س يمكن ان نحسب د ص/د س (أو د س/د ص اذا أردنا).

وهناك طرق أخرى للحصول على معلومات عن المنظومة اللاخطية من المعادلات التفاضلية. وفي الفصل ٨ سندرس عدداً من الطرق العددية التي يمكن ان تستعمل لايجاد حلول تقريبية للمعادلات والمنظومات التفاضلية اللاخطية. والمعلومات، كما رأينا متوافرة، ولكن الحصول عليها صعب. وهذا هو السبب الأكبر في ان المنظومات الخطية تحظى باهتمام اكثر لأنها كثيراً ما تفضي الى حلول لطيفة سهلة المنال. (ولكن هذا مع الأسف، يبدو أحياناً شبيهاً بعمل الرجل الذي يبحث عن قرشه تحت نور المصباح، لا في الزقاق الضيق الذي اضاعه فيه).

التمارين ٧ ـ ٧

١ . في سنة ١٩٣٤ درس ج . ف . غاوس نموذجاً للتفاعل بين نوعين من البراميسيوم يتصارعان على مصدر محدود للغذاء. فافترض ان المعادلات التي بموجبها يتعين العدد من كل نوع هي مزيج من المعادلة الحركية (نظراً لأن الغذاء محدود) ومن معدل وفيات يتناسب مع عدد النوع المنافس. فوضع هاتين المعادلتين :

$$\frac{د\,س}{د\,ن} = أ_{١}\,س - ب_{١}\,س^{٢} - حـ_{١}\,س\,ص$$

(٧ ـ ٨٣)

$$\frac{د\,ص}{د\,ن} = أ_{٢}\,ص - ب_{٢}\,ص^{٢} - حـ_{٢}\,س\,ص$$

حيث الثوابت $أ_{١}$ ، $ب_{١}$ ، $حـ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $ب_{٢}$ ، $حـ_{٢}$ كلها غير سالبة

أ) إحذف أحد المجهولين واحصل على معادلة لاخطية من الرتبة الثانية.

ب) أوجد لمعادلتي (٧ ـ ٨٣) كل نقط التوازن اللاصفرية.

جـ) أوجد حلاً لمعادلتي (٧ ـ ٨٣) على فرض ان $أ_١ = أ_٢ = ب_١ = ب_٢ = ١$

د) إحسب د ص/د س وأوجد حلاً على فرض ان $أ_١ \doteq أ_٢ = ٠$ ما الوضع الذي تمثله هذه الحالة ؟

٢ . إفرض ان مجتمعاً قد تعرض لوباء الحصبة، وليكن س (ن) و ص (ن) هما على التوالي عدد المعرضين وعدد المصابين في الزمن ن. لقد فرض ن. ت. ج. بيلي (Bailey، سنة ١٩٥٧) لذلك النموذج الرياضي التالي:

$$\frac{د\, س}{د\, ن} = -\beta\, س\, ص + \mu$$

$$\qquad (٧ - ٨٤)$$

$$\frac{د\, ص}{د\, ن} = \beta\, س\, ص - \gamma\, ص$$

حيث μ ثابت يحدده عدد المواليد والمستجدين ممن يتعرضون للأصابة، اما β و γ فهما على التوالي معدل الناجين والوفيات. والمفهوم انه اذا أصيب المرء مرة بالمرض يصبح لديه حصانة ضده.

أ) أوجد النقاط الموجبة $(س_٠ ، ص_٠)$ للتوازن في معادلتي (٧ ـ ٨٤).

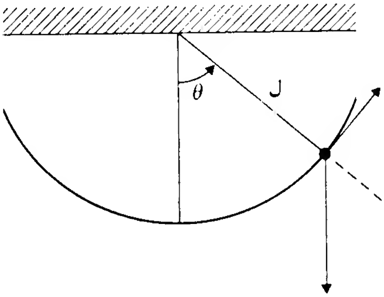
ب) إفرض وجود انحراف صغير عن نقطة التوازن: $س = س_٠ (١ + ي)$ ، $ص = ص_٠ (١ + و)$، حيث ي ، و صغيران نسبياً. عوض هاتين القيمتين في (٧ ـ ٨٤) واستخرج المنظومة:

$$\frac{\gamma}{\mu\beta}\,\frac{د ي}{د ن} = -(ي + و + ي\,و)$$

$$\frac{1}{\gamma}\,\frac{د و}{د ن} = ي\,(1 + و) \qquad \text{.......................} \qquad (٧ ـ ٨٥)$$

حـ) إحذف ي من (٧ ـ ٨٥)، مهملاً ي و (لصغرهما)، وحل المنظومة الخطية الناجمة.

د) على فرض ان فترة الحضانة حوالي أسبوعين، أوجد (بدلالة β ، μ) فترة نوبات الوباء من القمة الى القمة.



الشكل ٧ ـ ٦

٣ . تصور بندولاً مثالياً يتكون من قضيب لا وزن له وطوله ل، أحد طرفيه ثابت والطرف الثاني يحمل جُسيماً ذا وزن موجب. وافرض ان البندول أزيح على الزاوية $\theta_{\circ}$ ثم أفلت (انظر الشكل ٧ ـ ٦). فإنه يتأرجح في مستوى رأسي. فلأن طول القوس الذي يقابل الزاوية θ يقدر بالمعادلة و = ل θ فان السرعة الزاويّة والتسارع هما على الترتيب ل θ' ، ل θ''. والتسارع الزاوي يجب ان يعادل مركبة قوة الجاذبية باتجاه المماس، أي ان

$$ل\,\frac{د^{2}\theta}{د ن^{2}} = -حـ\,جا\theta \;،\; \theta(٠) = \theta_{\circ} \;،\; \theta'(٠) = ٠ \qquad \text{.........} \qquad (٧ ـ ٨٦)$$

وهـذه المعـادلـة التفـاضلية اللاخطية ذات الرتبة الثانية يمكن ان تحول الى المنظومة التالية اللاخطية ذات الرتبة الأولى :

$$\frac{د\theta}{د ن} = \psi$$

$$\frac{د\psi}{د ن} = -\frac{حـ}{ل} حا\theta \qquad \text{(٧ - ٨٧)}$$

حيث $\theta(٠) = \theta_٠$ ، $\psi(٠) = \acute{\theta}(٠) = ٠$

أ) أوجد نقط التوازن (٧ ـ ٨٧) وفسر معناها .

ب) اضرب معادلتي (٧ ـ ٨٧) احداهما بالأخرى وبين ان

$$\psi^٢ = \frac{٢ حـ}{ل}(جتا\theta - جتا\theta_٠) \qquad \text{(٧ - ٨٨)}$$

وارسم هذا المنحنى (متخذاً $\theta = ٠ ، \pi/٤ ، \pi/٢ ، \pi ، ٢\pi$) في المستوى $\theta\ \psi$ (ويسمى عادة مستوى الأدوار) ما معنى هذه المنحنيات ؟

جـ) على اعتبـار ان $\theta_٠$ صغـيرة عوض عن جا θ في (٧ ـ ٨٧) بالقيمـة θ وحـل المعادلة الخطية الناتجة. أوجد الزمن (التقريبي) لتأرجح البندول خطرة كاملة .

د) باستعمال أولى معادلتي (٧ ـ ٨٧) مع (٧ ـ ٨٨)، بيِّن ان الزمن الدقيق لكل خطوة هو:

$$ن = ٤\sqrt{\frac{ل}{٢ حـ}} \int_{٠}^{\theta_٠} \frac{د\theta}{\sqrt{جتا\theta - جتا\theta_٠}}$$

٤ . المعادلة

$$\ddot{س} + \mu (س^{٢} - ١) \dot{س} + س = ٠ ، \mu \neq ٠ \qquad \text{.............. (٧ - ٨٩)}$$

تسمى معادلة فان دربول وتنشأ اثناء دراسة دورات الأنابيب الفراغية المتأرجحة.

أ) بين أن (٧ - ٨٩) يمكن أن يُعبر عنها بالمنظومة

$$\frac{د س}{د ن} = ص - \mu (\frac{س^{٣}}{٣} - س)$$

$$\text{.......................... (٧ - ٩٠)}$$

$$\frac{د ص}{د ن} = - س$$

وأوجد معادلة تعطى د ص/د س في المستوى س ص

ب*) دون ان تحل معادلة د ص/د س التي وجدتها، ضع رسماً لحل لهذه المعادلة في مستوى الأدوار. اذكر ان - د س/د ص هو ميل العمودي على المنحنى.

٧ ـ ٨ استعمال محولات لابلاس في المنظومات

ان طرق محولات لابلاس كبيرة الفائدة في حل منظومات المعادلات التفاضلية ذات الشروط الابتدائية. خذ المنظومة:

$$\frac{د س}{د ن} = أ_{١١} س + أ_{٢١} ص + ق (ن)$$

$$\text{.......................... (٧ - ٩١)}$$

$$\frac{د ص}{د ن} = أ_{١٢} س + أ_{٢٢} ص + ف (ن)$$

مع الشرطين الابتدائيين س (٠) = $\text{س}_{\text{٠}}$ ، ص (٠) = $\text{ص}_{\text{٠}}$.

نحول المعادلتين (٧ ـ ٩١) لابلاسياً، وليكن سه ، صه ، قه ، فه محولات الاقترانات التي تناظرها، فينتج:

$$\text{ز}\,\text{سه} - \text{س}_{\text{٠}} = \text{أ}_{\text{١١}}\,\text{سه} + \text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{صه} + \text{قه}$$

(٧ ـ ٩٢) ....

$$\text{ز}\,\text{صه} - \text{ص}_{\text{٠}} = \text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{سه} + \text{أ}_{\text{٢٢}}\,\text{صه} + \text{فه}$$

نجمع في طرف واحد كل الحدود التي تحتوي على سه ، صه ، فنحصل على منظومة من معادلتين آنيتين هي:

$$(\text{ز} - \text{أ}_{\text{١١}})\,\text{سه} - \text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{صه} = \text{قه} + \text{س}_{\text{٠}}.$$

(٧ ـ ٩٣) ....

$$-\text{أ}_{\text{١٢}}\,\text{سه} + (\text{ز} - \text{أ}_{\text{٢٢}}\,\text{صه}) = \text{فه} + \text{ص}_{\text{٠}}.$$

فاذا كان قه + $\text{س}_{\text{٠}}$ ، ف + $\text{ص}_{\text{٠}}$ لا يطابقان كلاهما الصفر، يمكن ان نحل المعادلتين (٧ ـ ٩٣) آنياً فينتج:

$$\text{سه} = \frac{(\text{ز} - \text{أ}_{\text{٢٢}})\,(\text{ق} + \text{س}_{\text{٠}}) + \text{أ}_{\text{٢١}}\,(\text{فه} + \text{ص}_{\text{٠}})}{\text{ز}^{\text{٢}} - (\text{أ}_{\text{١١}} + \text{أ}_{\text{٢٢}})\,\text{ز} + (\text{أ}_{\text{١١}}\,\text{أ}_{\text{٢٢}} - \text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{أ}_{\text{١٢}})}$$

(٧ ـ ٩٤) ....

$$\text{ص} = \frac{(\text{ز} - \text{أ}_{\text{١١}})\,(\text{فه} + \text{ص}_{\text{٠}}) + \text{أ}_{\text{١٢}}\,(\text{قه} + \text{س}_{\text{٠}})}{\text{ز}^{\text{٢}} - (\text{أ}_{\text{١١}} + \text{أ}_{\text{٢٢}})\,\text{ز} + (\text{أ}_{\text{١١}}\,\text{أ}_{\text{٢٢}} - \text{أ}_{\text{٢١}}\,\text{أ}_{\text{١٢}})}$$

لاحظ ان المقامين في (٧ ـ ٩٤) يطابقان المعادلة المساعدة للمنظومة (٧ ـ ٩١) التي حصلنا عليها في البند (٧ ـ ٥) فيمكن اذن ان نكتب (٧ ـ ٩٤) بالشكل:

$$\text{س}^{\frown} = \frac{(\text{ز} - \text{أ}_{٢٢})(\text{ق}^{\frown} + \text{س}_{.}) + \text{أ}_{٢١}(\text{ف}^{\frown} + \text{ص}_{.})}{(\text{ز} - \lambda_{١})(\text{ز} - \lambda_{٢})}$$

$$\text{ص}^{\frown} = \frac{(\text{ز} - \text{أ}_{١١})(\text{ف}^{\frown} + \text{ص}_{.}) + \text{أ}_{١٢}(\text{ق}^{\frown} + \text{س}_{.})}{(\text{ز} - \lambda_{١})(\text{ز} - \lambda_{٢})} \qquad (٧ - ٩٥)$$

حيث $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ هما الحلان للمعادلة

$$\lambda^{٢} - (\text{أ}_{١١} + \text{أ}_{٢٢})\lambda + (\text{أ}_{١١}\text{أ}_{٢٢} - \text{أ}_{٢١}\text{أ}_{١٢}) = ٠$$

نستطيع الآن ان نجد الحل { س ، ص } للمنظومة (٧ ـ ٩١)، مع الشروط الابتدائية المعطاة، وذلك بأن نعكس (اذا امكن) تحويل المعادلتين (٧ ـ ٩٥).

يتبدى مما تقدم ان محولات لابلاس تمكننا من تحويل منظومات المعادلات التفاضلية ذات القيم الابتدائية الى منظومات معادلات آنية . وواضح ان هذا يمكن ان يعمم حتى يشمل منظومات من ن من المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتبة الأولى والمعاملات الثابتة فتعطينا ن من المعادلات الآنية الخطية.

وكما هو الحال في المعادلة التفاضلية الواحدة (أنظر البند ٦ ـ ٣)، فان طرق محولات لابلاس يقصد بها حل منظومات المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة والشروط الابتدائية . وأي انحراف عن هذه الشروط قد يعقد الأمور ويجعل الحصول على حل متعذراً.

المثال ٧ ـ ٨ ـ ١ انظر في مسألة الشروط الابتدائية التالية:

$$\text{سَ} = \text{س} - \text{ص} + e^{\text{ن}} \text{ ، } \text{س}(٠) = ١$$

$$\text{صَ} = ٢\text{س} + ٣\text{ص} + e^{-\text{ن}} \text{ ، } \text{ص}(٠) = ٠ \qquad (٧ - ٩٦)$$

نستعمل تحويل لابلاس مع خاصية التفاضل فينتج:

$$\text{ز سه} - ١ = \text{سه} - \text{صه} + ١/(\text{ز} - ١)$$

$$\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ ـ ٩٧)$$

$$\text{ز صه} = ٢\text{سه} + ٣\text{صه} + ١/(\text{ز} + ١)$$

والمنظومة (٧ ـ ٩٧) تكتب بالشكل

$$(\text{ز} - ١)\,\text{سه} + \text{صه} = \text{ز}/(\text{ز} - ١)$$

$$\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ ـ ٩٨)$$

$$-\,٢\text{سه} + (\text{ز} - ٣)\,\text{صه} = ١/(\text{ز} + ١)$$

ومن ذلك نجد أن

$$\text{سه} = \frac{\text{ز}^{٢} - ٣\text{ز} - ١}{[(\text{ز} + ١)\,(\text{ز} - ٢)^{٢} + ١]} = \frac{\text{أ}_{١}}{\text{ز} + ١} + \frac{\text{أ}_{٢}\,(\text{ز} - ٢) + \text{أ}_{٣}}{(\text{ز} - ٢)^{٢} + ١}$$

$$\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ ـ ٩٩)$$

$$\text{صه} = \frac{٣\,\text{ز} - ١}{(\text{ز} + ١)\,[(\text{ز} - ٢)^{٢} + ١]} = \frac{\text{ب}_{١}}{\text{ز} + ١} + \frac{\text{ب}_{٢}\,(\text{ز} - ٢) + \text{ب}_{٣}}{(\text{ز} - ٢)^{٢} + ١}$$

فباستعمال طرق النظريتين (٦ ـ ٨) و(٦ ـ ١٠) ينتج ان

$$\text{أ}_{١} = \frac{٣}{١٠}\ ،\ \text{أ}_{٢} = \frac{٧}{١٠}\ ،\ \text{أ}_{٣} = -\frac{١١}{١٠}\ ،$$

$$\text{ب}_{١} = -\frac{٢}{٥}\ ،\ \text{ب}_{٢} = \frac{٢}{٥}\ ،\ \text{ب}_{٣} = \frac{٩}{٥}$$

فلدينا إذن الحل :

$$\{\frac{3}{10} e^{-ن} + \frac{e^{2ن}}{10} (7 \text{ جتا } ن - 11 \text{ جا } ن)،$$

$$-\frac{2}{5} e^{-ن} + \frac{e^{2ن}}{5} (2 \text{ جتا } ن + 9 \text{ جا } ن) \}$$

التمارين ٧ ـ ٨

بطرق محولات لابلاس حل مسائل الشروط الابتدائية التالية، وهي تتكون من منظومات معادلات تفاضلية:

١ . سَ = ص ، س (٠) = ١

صَ = س ، ص (٠) = ٠

٢ . سَ = −٣س + ٤ص ، س (٠) = ٣

صَ = −٢س + ٣ص ، ص (٠) = ٢

٣ . سَ = ٤س − ٢ص ، س (٠) = ٢

صَ = ٥س + ٢ص ، ص (٠) = −٢

٤ . سَ = س − ٢ص ، س (٠) = ١

صَ = ٤س + ٥ص ، ص (٠) = −٢

٥ . سَ = −٣س + ٤ص + جتا ن ، س (٠) = ٠

صَ = −٢س + ٣ص + ن ، ص (٠) = ١

٦ . سَ = ٤س − ٢ص + $e^{ن}$ ، س (٠) = ١

صَ = ٥س + ٢ص − ن ، ص (٠) = ٠

٧ . $\acute{س} = س - ٢ص + ن^{٢}$ ، $س(٠) = ١$

$\acute{ص} = ٤س + ٥ص - e^{ن}$ ، $ص(٠) = -١$

---

٧ ـ ٩ : منظومات معادلات الفروق الخطية

نعطي في هذا البنـد وصفـاً موجـزاً لمنظومات معادلات الفروق الخطية . ويتضح من التطابق بين الفصلين ٣ ، ٤ ، انه لا بد من وجود مقابل من معادلات فروق لكل ما ورد في هذا الفصل عن منظومات المعادلات التفاضلية . وهذا هو الواقع . ولكن طلباً للاختصار، سنناقش هنا منظومات من معادلتي فروق، خطيتين، من الرتبة الأولى، وبمعاملات ثابتة مع حلها بطريقة الحذف .

ويسهل ان نتبين ان أي معادلة فروق خطية من الرتبة الثانية، أو أعلى، يمكن ان تحل الى منظومة من معادلات الرتبة الأولى (انظر التمرين ١)، كما رأينا ذلك في البند (٧ ـ ٢) عن المعادلات التفاضلية . واذن فيكفي ان نناقش منظومات معادلات الرتبة الأولى فقط .

وأعم شكل لمنظومة معادلتين خطيتين من الرتبة الأولى هو:

$$س_{ن+١} = أ_{١١،ن} س_{ن} + أ_{٢١،ن} ص_{ن} + ق_{ن}$$

$$\text{(٧ ـ ١٠٠)}$$

$$ص_{ن+١} = أ_{١٢،ن} س_{ن} + أ_{٢٢،ن} ص_{ن} + ف_{ن}$$

والرموز $س_{ن}$ ، $ق_{ن}$ ، $أ_{در،ن}$ تعني ان الحد هو النوني في التسلسل $\{س_{ن}\}$ ، $\{ق_{ن}\}$ ، $\{أ_{در،ن}\}$.

واذا كانت جميع الحدود في المتتاليات $\{أ_{در،ن}\}$ متطابقة، نكتب المنظومة بالصيغة :

$$س_{ن+1} = أ_{11} س_{ن} + أ_{21} ص_{ن} + ق_{ن}$$

. . . . (٧ ـ ١٠١)

$$ص_{ن+1} = أ_{12} س_{ن} + أ_{22} ص_{ن} + ف_{ن}$$

وهـذه منظـومـة خطية ذات معاملات ثابتة . واذا كانت جميع الحدود $ق_{ن}$ ، $ف_{ن}$ أصفاراً، نقول ان المنظومة (٧ ـ ١٠٠) ، [أو ٧ ـ ١٠١] متجانسة، والا فهي لا متجانسة .

ولحل معادلة المعاملات الثابتة نبدأ بالصيغة :

$$س_{ن+2} = أ_{11} س_{ن+1} + أ_{21} ص_{ن+1} + ق_{ن+1}$$ . . . . (٧ ـ ١٠٢)

ثم نأخذ ثانية المعادلتين (٧ ـ ١٠١) ونعوض قيمة $ص_{ن}$ في المعادلة الأولى ، فينتج :

$$س_{ن+2} = أ_{11} س_{ن+1} + أ_{21} [أ_{12} س_{ن} + \frac{أ_{22}}{أ_{21}} (س_{ن+1} - أ_{11} س_{ن} - ق_{ن})$$
$$+ ف_{ن}] + ق_{ن+1}$$

فنرتب الحدود ونجمع المتشابهات ، فينتج :

$$س_{ن+2} - (أ_{11} + أ_{22}) س_{ن+1} + (أ_{11} أ_{22} - أ_{21} أ_{12}) س_{ن} = ق_{ن+1} + أ_{21} ف_{ن} -$$
$$أ_{22} ق_{ن}$$ . . . . (٧ ـ ١٠٣)

وهـذه معـادلـة فروق، خطيـة، من الـرتبـة الثانية، ذات معاملات ثابتة، فيمكن ان تحل حسب طرق الفصـل ٤ . فاذا عرفنـا $س_{ن}$ يمكن بسهـولة ان نعوضه في (٧ ـ ١٠١) فنجد $ص_{ن}$. لاحـظ التطـابق بين هذا الاسلوب والأسلوب الـذي وصفنـاه في البنـد (٧ ـ ٣) لمنظومات المعادلات التفاضلية . وسنشرح هذا الاسلوب بعدد من الأمثلة :

المثال ٧ ـ ٩ ـ ١ خذ المنظومة المتجانسة :

$$س_{ن+1} = 2 س_{ن} + ص_{ن}$$

. . . . (٧ ـ ١٠٤)

$$ص_{ن+1} = س_{ن} + 2 ص_{ن}$$

فحسب الاجراء السابق، يكون :

$$س_{ن+٢} = ٢ س_{ن+١} + ص_{ن+١} = ٢ س_{ن+١} + س_{ن} + ٢ ص_{ن}$$

$$= ٢ س_{ن+١} + س_{ن} + ٢ (س_{ن+١} - ٢ س_{ن}) .$$

فإذن :

$$س_{ن+٢} - ٤ س_{ن+١} + ٣ س_{ن} = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧ ـ ١٠٥)$$

والمعادلة المساعدة لمعادلة الرتبة الثانية (٧ ـ ١٠٥) هي : $\lambda^{٢} - ٤ \lambda + ٣ = ٠$، وجذراها : $\lambda_{١} = ٣$ ، $\lambda_{٢} = ١$. فالحل العام للمتغير $س_{ن}$ هو:

$$س_{ن} = حـ_{١} ٣^{ن} + حـ_{٢} \quad \ldots\ldots \quad (٧-١٠٦)$$

فلأن

$$س_{ن+١} = حـ_{١} ٣^{ن+١} + حـ_{٢} ،$$

ينتج من اولى معادلتي (٧ ـ ١٠٤) أن :

$$ص_{ن} = س_{ن+١} - ٢ س_{ن} = (حـ_{١} ٣^{ن+١} + حـ_{٢}) - ٢ (حـ_{١} ٣^{ن} + حـ_{٢}) = حـ_{١} ٣^{ن} - حـ_{٢}$$

والحل العام للمنظومة (٧ ـ ١٠٤) هو:

$$س_{ن} = حـ_{١} ٣^{ن} + حـ_{٢} ، \quad ص_{ن} = حـ_{١} ٣^{ن} - حـ_{٢}$$

يلاحظ انه اذا اعطيت شروط ابتدائية يسهل نجد الحل الوحيد، فمثلاً اذا كان $س_{٠} = ١$ ، $ص_{٠} = ٢$ ، يكون:

$$س_{٠} = حـ_{١} + حـ_{٢} = ١ ، \quad ص_{٠} = حـ_{١} - حـ_{٢} = ٢ ،$$

فيكون

$$حـ_{١} = \frac{٣}{٢} ، \quad حـ_{٢} = -\frac{١}{٢}$$

ويكون الحل الوحيد لمسألة الشروط الابتدائية :

$$س_ن = \frac{٣}{٢} ٣^ن - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} (٣^{ن+١} - ١)$$

$$ص_ن = \frac{٣}{٢} ٣^ن + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} (٣^{ن+١} + ١)$$

المثال ٧ ـ ١ ـ ٢ : خذ هذه المنظومة المتجانسة :

$$س_{ن+١} = س_ن + ص_ن$$

(٧ ـ ١٠٧) ....

$$ص_{ن+١} = -٤ س_ن + ٥ ص_ن$$

نمضي كما سبق فنجد ان

$$س_{ن+٢} = س_{ن+١} + ص_{ن+١} = س_{ن+١} - ٤ س_ن + ٥ ص_ن$$

$$= س_{ن+١} - ٤ س_ن + ٥ س_{ن+١} - ٥ س_ن$$

فيكون

$$س_{ن+٢} - ٦ س_{ن+١} + ٩ س_ن = ٠$$

والمعادلة المساعدة : $\lambda^٢ - ٦ \lambda + ٩ = ٠$

ولها جذر مكرر $\lambda_١ = \lambda_٢ = ٣$ ، فيكون

$$س_ن = حـ_١ ٣^ن + حـ_٢ ن ٣^ن$$

لكن

$$ص_ن = س_{ن+١} - س_ن = حـ_١ ٣^{ن+١} + حـ_٢ (ن + ١) ٣^{ن+١} - حـ_١ ٣^ن - حـ_٢ ن ٣^ن$$

$$= (٢ حـ_١ + ٣ حـ_٢ + ٢ حـ_٢ ن) ٣^ن$$

فالحل العام :

$$س_ن = ٣^ن (حـ_١ + حـ_٢ ن)$$

$$ص_ن = ٣^ن (٢ حـ_١ + ٣ حـ_٢ + ٢ حـ_٢ ن).$$

المثال ٧ ـ ٩ ـ ٣ خذ هذه المنظومة اللامتجانسة :

$$س_{ن+١} = - س_ن + ٢ ص_ن + ٥^{ن+١}$$
.... (٧ ـ ١٠٨)

$$ص_{ن+١} = -٣ س_ن + ٤ ص_ن + \frac{١}{٢}$$

فبحذف $ص_ن$ نحصل على المعادلة التالية وهي لا متجانسة ومن الرتبة الثانية :

$$س_{ن+٢} - ٣ س_{ن+١} + ٢ س_ن = ١ + ٥^{ن+١}$$

وقد وجدنا حل هذه المعادلة في المثال (٤ ـ ٦ ـ ١) فكان :

$$س_ن = حـ_١ + حـ_٢ ٢^ن - ن + \frac{٥^{ن+١}}{١٢}$$
.... (٧ ـ ١٠٩)

وعندنا $ص_ن = (س_{ن+١} + س_ن - ٥^{ن+١})/٢$ ،

فيكون

$$ص_ن = حـ_١ + ٣ حـ_٢ ٢^{ن-١} - ن - \frac{١}{٢} - \frac{٥^{ن+١}}{٤}$$
.... (٧ ـ ١١٠)

فالحل العام للمنظومة (٧ ـ ١٠٨) تعطيه المعادلتان (٧ـ ١٠٩) و(٧ ـ ١١٠).

المثال ٧ ـ ٩ ـ ٤ يتزاوج الأوز القطبي في أواخر الربيع من كل عام أزواجاً، فتضع الأنثى بالمعدل خمس بيضات يفقد ٢٠ في المئة منها تأكلها احياء أخرى اويفسدها الجو. وصغار الأوز، ومنها ٦٠ في المئة إناث، تنضج بسرعة وتبلغ سن النضج عندما يبدأ موسم الهجرة، فيفتك المرض والصيادون سنوياً بحوالي ٣٠٠٠٠٠ أنثى و ٢٠٠٠٠٠ ذكر. فهل هذا الأوز في خطر الانقراض؟

نفرض ان $س_ن$ عدد الأناث الناضجة، $ص_ن$ عدد الذكور الناضجة، في نهاية السنة ن.

فالنموذج التالي يعين عدد الأوز:

$$س_{ن+1} = ٢,٤ \text{ أقل } (س_ن ، ص_ن) + س_ن - ٣٠٠,٠٠٠$$

(٧ - ١١١) ....

$$ص_{ن+1} = ١,٦ \text{ أقل } (س_ن ، ص_ن) + ص_ن - ٢٠٠,٠٠٠$$

حيث كلمة أقل تشير الى الانثى المفردة، والذكر المفرد(لا ينجبان)

ولأن (٧ - ١١١) لاخطية، نفرض ان $ص_ن \geqslant س_ن$، ونحصل على المنظومة الخطية التالية:

$$س_{ن+1} = س_ن + ٢,٤ ص_ن - ٣٠٠,٠٠٠$$

(٧ - ١١٢) ....

$$ص_{ن+1} = ٢,٦ ص_ن - ٢٠٠,٠٠٠$$

وهذه تحل بالتتابع. فنحل المعادلة الثانية اولاً، وينتج:

$$ص_{ن+1} = (٢,٦)^{ن+1} ص_٠ - ٢٠٠٠٠٠ \sum_{ك=٠}^{ن} (٢,٦)^{ن-ك}$$

$$= (٢,٦)^{ن+1} ص_٠ - ٢٠٠٠٠٠ \left[\frac{(٢,٦)^{ن+1} - ١}{٢,٦ - ١}\right]$$

أي أن

$$ص_{ن+1} = (٢,٦)^{ن+1} (ص_٠ - ١٢٥٠٠٠) + ١٢٥٠٠٠ \quad \text{..... (٧ - ١١٣)}$$

نعوض (٧ - ١١٣) في اولى معادلتي (٧ - ١١٢) فتنتج المعادلة:

$$س_{ن+1} = س_ن + (٢,٦)^ن (٢,٤ ص_٠ - ٣٠٠,٠٠٠) \quad \text{...... (٧ - ١١٤)}$$

فيكون الحل:

$$س_{ن+1} = س_٠ + (٢,٤) ص_٠ - ٣٠٠٠٠٠) \sum_{ك=٠}^{ن} (٢,٦)^ك$$

$$= \frac{٣}{٢}\,(\text{ص}_{٠} - ١٢٥٠٠٠)\,(٢,٦)^{\text{ن}+١} +$$

$$[\text{س}_{٠} + \frac{٣}{٢}\,(\text{ص}_{٠} - ١٢٥٠٠٠)] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٧ - ١١٥)$$

فمن (٧ - ١١٣) و (٧ - ١١٥) يتضـح ان الانقـراض يقـع اذا كان $\text{ص}_{٠} <$ ١٢٥٠٠٠ . ويكون هنالك توازن عند $\text{ص}_{٠} =$ ١٢٥٠٠٠ ، وتفجر سكاني $\text{ص}_{٠} >$ ١٢٥٠٠٠ . وبالطبع لأن المعطيات تستند الى المتوسط، فلا يمكن لأي عدد (مثل $\text{ص}_{٠} =$ ١٢٥٠٠٠) ان يكـون حاسـماً. الا انـه اذا انخفض عدد الذكور انخفاضاً محسوساً دون ١٢٥٠٠٠ لزم بالتأكيد العمل على حماية النوع .

المثال ٧ - ٩ - ٥ النماذج العلب وسائل سهلة وعظيمة الفائدة في وصف انتشار تلوث الهواء . ولانشـاء نمـوذج كهـذه نقسم المنطقـة الجغـرافيـة التي يقـع عليهـا اهتـمامنـا الى عدد من المستطيـلات ، نسمي كلاً منهـا علبة ،وقد تكون هذه العلب غير متساوية . وسنفرض ان تركيز التلوث في داخل كل علبة منتظم (وهذا الفرض لا يكون واقعياً الا اذا كانت العلبة صغيرة جداً. ولكن سيتبـين للقـاريء انـا سنفـترض افتراضات أخرى أكثر بعداً عن الواقعية .

ويطلب ان نعرف المعلومات التالية عن كل علبة :

سرعة التكاثر والتركيز الابتدائي لمادة التلوث ، ومتوسط سرعة الريح واتجاهه ، على فترات منتظمة ، كل ساعة مثلاً ، وسمك الطبقة الهوائية المتأثرة بالتلوث (ويسمى هذا سمك التلوث) .

والقليـل من هذه المعلومـات يتـوافـر لدينـا على الغالب ، ولذا فلا بد من وضع افتراضات تقـريبيـة امـا سرعة الريح واتجاهه فيحددان انتشار التلوث من علبة الى علبة . فتمثل هذا بنقل العلبة في الاتجاه الذي يجري فيه الريح ، والى مسافة تعادل ما قطعه الريح في الفترة الـزمنيـة التي هي قيـد البحث . والنسبـة المئـويـة من العلبـة المنقـولة التي تقع على العلبة

المجاورة تعادل الجزء من مادة التلوث التي انتقلت من العلبة الأولى الى الثانية. اما كمية التلوث في كل علبة فنجدها بضرب التركيز في الحجم (والحجم هو حاصل ضرب المساحة في سمك التلوث).

انظر الآن في الوضع التالي وهو يتكون من ثلاث علب تحتوي في اللحظة ن، على $س_ن$ ، $ص_ن$ ، $ع_ن$ غرامات من ثاني اكسيد الكربون SO_2 ، (انظر الشكل (٧ ـ ٧).
فلدينا المعادلات التالية:

$$س_{ن+1} = أ_{1،ن} س_ن + ب_{1،ن} ص_ن + حـ_{1،ن} ع_ن + ف_ن$$

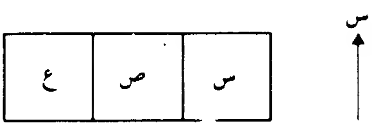
$$ص_{ن+1} = أ_{2،ن} س_ن + ب_{2،ن} ص_ن + حـ_{2،ن} ع_ن + ق_ن \quad \ldots\ldots \quad (٧ ـ ١١٦)$$

$$ع_{ن+1} = أ_{3،ن} س_ن + ب_{3،ن} ص_ن + حـ_{3،ن} ع_ن + ك_ن$$

حيث $أ_{د،ن}$ ، $ب_{د،ن}$ ، $حـ_{د،ن}$ هي معاملات نسبة التحول وتحددها سرعة الريح، $ف_ن$ ، $ق_ن$ ، $ك_ن$ هي كميات SO_2 في كل علبة، في الساعة ن.

لاحظ ان $أ_{1،ن} + أ_{2،ن} + أ_{3،ن} \leqslant 1$ لأن ازاحة العلبة س الى أي جهة غير الغرب تؤدي الى خروج بعضها خارج نطاق العلب الثلاث. وهذا أمر واقعي لأن تلوث الهواء قلما يكون منظومة مغلقة.

والمنظومة (٧ ـ ١١٦) ليس لها في العادة حل مغلق. الا انه اذا أُعطي $س_٠$ ، $ص_٠$ ، $ع_٠$ ومعاملات التحول، والكمية الموجودة في كل علبة، نستطيع ان نحسب بسهولة كمية SO_2 وتركيزه المنتظم، في كل علبة لأي عدد نشاء من وحدات الزمن.



الشكل ٧ ـ ٧

التمارين ٧ ـ ٩

١ . هذه معادلة فروق من الرتبة الثانية:

$س_{ن+2} + أ_ن س_{ن+1} + ب_ن س_ن = ق_ن$ .... (٧ ـ ١١٧)

يبين ان التعويض $ص_ن = س_{ن+1}$ يحول هذه المعادلة الى منظومة من معادلتي فروق من الـدرجـة الأولى.في التـمارين ٢ إلى ٦،حول كل معادلة أومنظومة الى منظومة معادلات من الرتبة الأولى .

٢ . $س_{ن+2} - ٣ س_{ن+1} + ٤ س_ن = ٠$

٣ . $س_{ن+2} - ن س_{ن+1} + ن^{٢} س_ن = ٣^{ن}$

٤ . $س_{ن+3} + س_{ن+2} + س_{ن+1} + س_ن = جا ن$

٥ . $س_{ن+2} + س_{ن+1} س_ن = ٠$

٦ . $س_{ن+2} = ٣ س_{ن+1} - ٤ ص_{ن+1} - ٢ س_ن + ص_ن$

$ص_{ن+2} = -٢ س_{ن+1} + ٥ ص_{ن+1} + س_ن - ٤ ص_ن + ٣^{ن}$

في التـمارين ٧ الى ١٢ حل كل منظـومـة معـادلات فروق، واذا أعطيت شروطـاً ابتـدائية فأوجد حلاً خاصاً

٧ . $س_{ن+1} = -٢ س_ن + ص_ن$

$ص_{ن+1} = ٤ س_ن + ص_ن$

٨ . $س_{ن+1} = -٤ س_ن + ص_ن$

$ص_{ن+1} = -١٠ س_ن + ٢ ص_ن$

٩ . $س_{ن+1} = - س_ن - ٣ ص_ن$

$$ص_{ن+1} = \frac{١}{٣} س_ن + ص_ن$$

١٠ . $س_{ن+1} = س_ن - ص_ن + ن$

$ص_{ن+1} = ٥ س_ن + ص_ن + ١$

١١ . $س_{ن+١} = ٢ س_ن - ص_ن - ١$

$ص_{ن+١} = - س_ن + ٢ ص_ن + ٢$

$س_٠ = ١$ ، $ص_٠ = ٠$

١٢ . $س_{ن+١} = - ص_ن + ٢^ن$

$ص_{ن+١} = - س_ن + ٢^ن$

١٣ . افرض ان التركيز الابتدائي في العلب س ، ص ، ع ، في المثال ٧ـ٩ـ٥ كان ٢×١٠^{-٧} ، ٣×١٠^{-٧} ، $١٠^{-٧}$ غرام في المتر المكعب (غ/$م^٣$) على التوالي . وافرض ان كل علبة ضلعها كيلومتر واحد، وسمك التلوث ٢٠٠ متر ومعدل الانتاج $ف_ن = ق_ن = ك_ن = ١٠٠$ كيلوغرام في الساعة طوال المدة ن . وافرض ان المعطيات التالية عن الريح تسري على العلب الثلاث. اوجد مقدار التركيز في كل علبة بعد ساعة، ساعتين، ثلاث ساعات :

الساعة	٠	١	٢	٣
معدل سرعة الريح كلم / الساعة	٥	٧	١٠	٥
متوسط الاتجاه بالدرجات	°٩٠	°٤٥	°٣٠	°٢٧٠

الفصل الثامن

طرق عددية

في الفصـول السـابقـة ناقشنـا عدة أسـاليب لحل المعادلات التفاضلية، ومعادلات الفـروق. ومن المؤسف أن هذه الطـرق لا تنطبق دائـماً على المعـادلات التي نقـابلهـا في المسائل العملية. أضف الى ذلك أنه حتى اذا انطبقت، فان الجهد الحسابي اللازم لحل منظـومـة من عدة معـادلات آنيـة، من الرتبة الأولى، مثلاً، قد يكون ضخماً جداً. لذلك ابتكـرت وطـوِّرت تقنيـات تمكننـا من ان نحسب، إلى أي حد من الـدقـة نشـاء، الحـل العددي لأي مسألة من هذا القبيل. وفي هذا الفصل سندرس بعض هذه التقنيات.

ولكن قبـل ان نشـرع ببحث أي طريقـة عددية محددة، نؤكد أنه يجب دائماً الانتباه عنـد استخـدام أي اسلوب لأيجاد الحل العددي لأي معادلة. فان دقة أي حل تعتمد، لا على صحـة الطـريقـة العـدديـة المتبعـة فقـط، ولكن أيضـاً على دقـة الحاسبة اليدوية او الكمبيوتر المستخدم للقيام بالعمليات الحسابية المملة. وفي البنود (٨ ـ ١) و(٨ ـ ٢) و(٨ ـ ٥) بحث مفصل عن أنواع الأخطاء التي نتوقع مجابهتها.

٨ ـ ١ : معادلات الرتبة الأولى

في هذا البند، سنفترض ان مسألة القيمة الأبتدائية:

$$\frac{د\ ص}{د\ س} = ق\ (س\ ،\ ص)\ ،\ ص\ (س_٠) = ص_٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٨ - ١)$$

لها حل وحيد هو ص (س). وسنصف فيما يلي ثلاث تقنيات تعطي حلولاً تقريبية للمجهول ص (س) ولكن عند عدد محدود من النقط:

$س_٠\ ،\ س_١ = س_٠ + هـ\ ،\ س_٢ = س_٠ + ٢\ هـ\ ،\ \ldots\ ،\ س_ن = س_٠ + ن\ هـ$ ،

حيث . هـ . عدد حقيقي ما (غير الصفر). والطرق تعطي قيمة ما، $ص_ك$ ، هي تقريب من القيمة الصحيحة ص ($س_ك$) ، ك = ٠ ، ١ ، ... ، ن

ولعل هذه الرموز قد دلت على ان ما نعمله هو ان نقرب المعادلة (٨ ـ ١) من معادلة فروق مناسبة.

طريقة اويلر :

هذه إجراء فجّ غير أنه سهل جداً. وفكرته ان نحصل على $ص_١$ باعتبار أن ق (س ، ص) لا يتغير الا قليلاً في الفترة $س_٠ \leqslant س \leqslant س_١$ الى حد ان الخطأ يكون صغيراً جداً اذا بدلنا ق (س ، ص) بالقيمة الثابتة ق ($س_٠$ ، $ص_٠$) :

نكامل $\frac{د\ ص}{د\ س} = ق\ (س\ ،\ ص)$، من $س_٠$ الى $س_١$ ، فينتج:

$$ص\ (س_١) - ص_٠ = ص\ (س_١) - ص\ (س_٠) = \int_{س_٠}^{س_١} ق\ (س\ ،\ ص)\ د\ س \approx ق\ (س_٠\ ،\ ص_٠)\ (س_١ - س_٠) \quad \ldots\ldots\ldots\ (٨ - ٢)$$

ولأن

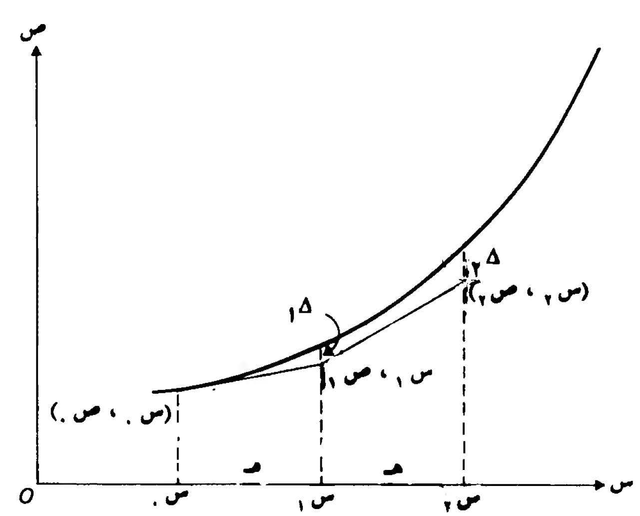
$هـ = س_{١} - س_{.}$ يكون $ص_{١} = ص_{.} + هـ\, ق\,(س_{.} ، ص_{.})$ ..... (٨ - ٣)

ونعيد العملية مع $(س_{١} ، ص_{١})$ لنحصل على $ص_{٢}$، وهكذا فنحصل على معادلة الفرق:

$ص_{ن+١} = ص_{ن} + هـ\, ق\,(س_{ن} ، ص_{ن})$ .... (٨ - ٤)

وينبغي أن نشير الى اننا لا ننوي ان نحل معادلة الفرق هذه بطرق الفصل ٢، وانما سنحلها على مراحل، أي بأن نجد $ص_{١}$ أولاً، ثم نستعمل (٨ - ٤) لأيجاد $ص_{٢}$، وهكذا.

ويبين الشكل (٨ - ١) المعنى الهندسي للمعادلة (٨ - ٤). فالخط المنحني هو الحل المضبوط المجهول للمعادلة (٨ - ١) وقد قاربه الخط المنكسر. اذكر ان $ق\,(س_{.} ، ص_{.})$ هو ميل المماس للمنحنى ص = ص (س) في النقطة $(س_{.} ، ص_{.})$. اما الفروق $\Delta_{ك}$ فهي الأخطاء في المرحلة ك من العملية.



الشكل ٨ - ١

المثال ٨ ـ ١ ـ ١ حل

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ص} + \text{س}^{٢} \text{ ،}\quad \text{ص}(٠) = ١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٥)$$

سنجد ص (١) بالاقتراب من الحل، وذلك بأخذ س = ٠,٠ ، ,٢ ، ,٤ ، ,٦ ، ,٨ ، ثم ١,٠ . هنا هـ = ٠,٢ ، $\text{ق}(\text{س}_{\text{ن}} \text{ ، ص}_{\text{ن}}) = \text{ص}_{\text{ن}} + \text{س}_{\text{ن}}^{٢}$

فطريقة أويلر تعطي

$$\text{ص}_{\text{ن}+١} = \text{ص}_{\text{ن}} + \text{هـ} \cdot \text{ق}(\text{س}_{\text{ن}} \text{ ، ص}_{\text{ن}})$$

فلأن

$$\text{ص}_{٠} = \text{ص}(٠) = ١$$

ينتج أن

$$\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٠} + \text{هـ} \cdot \text{ق}(\text{س}_{٠} \text{ ، ص}_{٠}) = ١ + ٠,٢ \cdot (١ + ٠^{٢}) = ١,٢$$

$$\text{ص}_{٢} = \text{ص}_{١} + \text{هـ} \cdot \text{ق}(\text{س}_{١} \text{ ، ص}_{١}) = ١,٢ + ,٢ \;[١,٢ + (,٢)^{٢}] = ١,٤٤٨$$

≈ ١,٤٥ وهكذا.

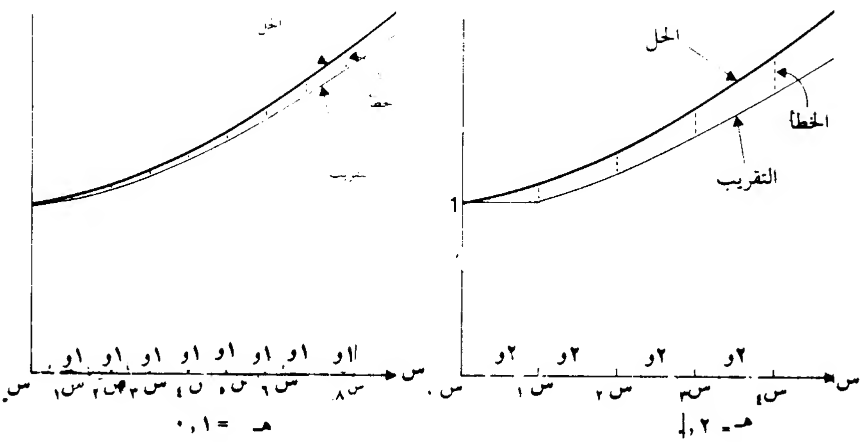
س ن	ص ن	ق (س ن ، ص ن) $= \text{ص}_{\text{ن}} + \text{س}_{\text{ن}}^{٢}$	ص ن+١ $= \text{ص}_{\text{ن}} + \text{هـ} \cdot \text{ق}(\text{س}_{\text{ن}} \text{ ، ص}_{\text{ن}})$
٠,٠	١,٠٠	١,٠٠	١,٢
,٢	١,٢	١,٢٤	١,٤٥
,٤	١,٤٥	١,٦١	١,٧٧
,٦	١,٧٧	٢,١٣	٢,٢٠
,٨	٢,٢٠	٢,٨٤	٢,٧٧
١,٠	٢,٧٧		

ونرتب العمل في مثل الجدول (٨ ـ ١) فالقيمة $ص_٥$ = ٢,٧٧ تناظر $س_٥$ = ١وهي القيمة التقريبية للمطلوب ص (١). فاذا حللنا المعادلة نجد أن :

$$ص = ٣ e^{س} - س^{٢} - ٢س - ٢$$

فيكــون ص (١) = ٣ e - ٥ ≈ ٣,١٥٤ اذن فتقـريب اويلر يبعـد عن الجـواب الـدقيق بحـوالي ١٢ في المئـة . ولا غرابـة في ذلـك ، فقد عاملنا المشتقة كأنها ، في كل فترة من ٠,٢ وحـدة ، ثابتـة والخطأ الـذي ينجم عن هذه الطـريقـة نسميـه خطأ العـزل ، لأن الاقتران المعتزل ق ($س_ن$ ، $ص_ن$) قد استبدل بالاقتران المتصل القيم ق (س ، ص) .

وبديهي اننا اذا صغرنا حجم الخطوة هـ نزيد من صحة الجواب ، لأن الاقتران المتقطـع ق ($س_ن$ ، $ص_ن$) يصبـح أقـرب الى قيم ق (س ، ص) في الفـترة [٠ ، ١] ، والشكـل (٨ ـ ٢) يبـين ذلـك باتخـاذ هـ = ٠,٢ ، ثم هـ = ٠,١ والـواقـع انـه لو اجـرينا الحسـابـات السـابقـة مع هـ = ٠,١ لوجدنا ان ص (١) = ٣,٠٧ . وهذا ادق من السابق بكثير ، والخطأ هنا حوالي ثلاثة في المئة .



الشكل ٨ ـ ٢

وبوجه عام، ان تقصير خطوات التقريب يحسن مستوى الدقة. ولكن لا بد هنا من تحذير. فان تقصير الخطوات يزيد من الحسابيات اللازمة، بالاضافة الى ان كل مرحلة حسابية يرافقها أخطاء تدوير. فعندما أجرينا حسابيات هـ = ٢, مثلاً، دوزنا القيمة المضبوطة ١,٤٤٨ إلى ١,٤٥ (صحيحة لمنزلتين عشريتين)، ثم استعملنا هذه القيمة المدورة لحساب القيم التالية لمدالة ص ن. وليس بالنادر ان يشتمل حل بعض المعادلات التفاضلية المعقدة، بالكمبيوتر، عدة آلاف من العلميات الحسابية، وهذا يعني عدة آلاف من أخطاء التدوير. وفي بعض المسائل (وانظر البند ٨ ـ ٥) يبلغ تراكم اخطاء التدوير حداً يجعل الحل مخطوءاً لدرجة تستدعي رفض النتيجة. ولكن من حسن الحظ ان هذا عادة لا يقع لأن أخطاء التدوير تكونت موجبة وسالبة فيمحو بعضها بعضاً. هذا على فرض (هو في العادة صحيح) ان متوسط اخطاء التدوير صفر. فينبغي ان يكون واضحاً، على كل حال، ان تقصير خطوة التقريب وما يقتضيه من زيادة في الحسابيات، اجراء يجب ان يتبع بحذر. وان لكل مسألة، على العموم، خطواتها المثلى، فكل ما قصر دون ذلك يفضي الى أخطاء اكبر سببه تراكم أخطاء التدوير.

ولنعد الآن الى المثال. فلا بد انه قد إتضح اننا نحتاج الى برنامج يستغل امكانيات الكمبيوتر للحصول على جواب صحيح لثلاث منازل عشرية أو أربع. وفيما يلي برنامج نموذجي باللغة الاساسية (BASIC) لاجراء الحسابيات اللازمة*.

```
10  DEF FNF(X,Y) = X * X + Y
20  INPUT X, Y, H, N
30  FOR K = 0 TO N
35  Z = Y + H * FNF(X,Y)
40  Y = Y + H * (FNF(X,Y) +
FNF(X + H,Z))/2
50  X = X + H
60  NEXT K
70  PRINT Y
80  END
```

١٠ التعريف اقتران ق (س ، ص) = س × س + ص
٢٠ المدخلات س ، ص ، هـ ، ذ
٣٠ ك من ٠ الى ن
٤٠ ص = ص + هـ*(ق (س ، ص) + ق (س + هـ ، ع))/٢
٥٠ س = س + هـ
٦٠ ك التالية
٧٠ إطبع ص
٨٠ إنتهى

* نكتبه بالانكليزية لأن تعريب لغة الكمبيوتر لم ينتشر بعد بالقدر الكافي.

ويمكن تكييف هذا البرنامج مع أي معادلة بالشكل (٨ ـ ١) وذلك بتغيير تعريف الاقتران ق (س ، ص) في السطر ١٠ ، وفي السطر ٢٠ ، حيت تطبع الحاسبة العلامة «؟» يجب ان تدخل القيم $س_٠$ ، $ص_٠$ ، هـ ، ن ، وهو عدد الخطوات، حيث $س_ن = س_٠ +$ ن هـ.

طريقة أويلر المحسَّنة

هي طريقـة أدق من طريقـة أويلر وأنسب للحسـابيـات اليـدوية . وهي مبينة على حقيقـة ظاهـرة بالبـداهـة ، هي ان تحسناً ينجم اذا أخذنا متوسط الميل عند طرفي الفترة ، فأنقصنا بذلك الفرق بين ق (س ، ص) ، ق ($س_ن$ ، $ص_ن$) في كل فقرة من النوع $س_ن \leqslant س < س_{ن+١}$ (انظر الشكل ٨ ـ ٣) . وهذا يعني اننا أخذنا للتكامل في المعادلة (٨ ـ ٢) قيمة تقريبية هي حسب قاعدة شبه المنحرف :

$$\int_{س_٠}^{س_١} ق (س ، ص) د س \approx \frac{هـ}{٢} \{ ق (س_٠ ، ص_٠) + ق (س_١ ، ص (س_١)) \}$$

ولأن ص ($س_١$) غير معروفة نستعيض عنها بالقيمة التي تعطيها طريقة اويلر، ولتكن $ع_١$ ، فبذا يمكن ان نستعيض عن المعادلة (٨ ـ ٢) بالمنظومة :

$$ع_١ = ص_٠ + هـ ق (س_٠ ، ص_٠)$$

$$ص_١ = ص_٠ + \frac{هـ}{٢} \{ ق (س_٠ ، ص_٠) + ق (س_١ ، ع_١) \}$$

وهذا يفضي الى الإجراء العام

$$ع_{ن+١} = ص_ن + هـ ق (س_ن ، ص_ن)$$

(٨ ـ ٧) . . . .

$$ص_{ن+١} = ص_ن + \frac{هـ}{٢} [ق (س_ن ، ص_ن) + ق (س_{ن+١} ، ع_{ن+١})]$$

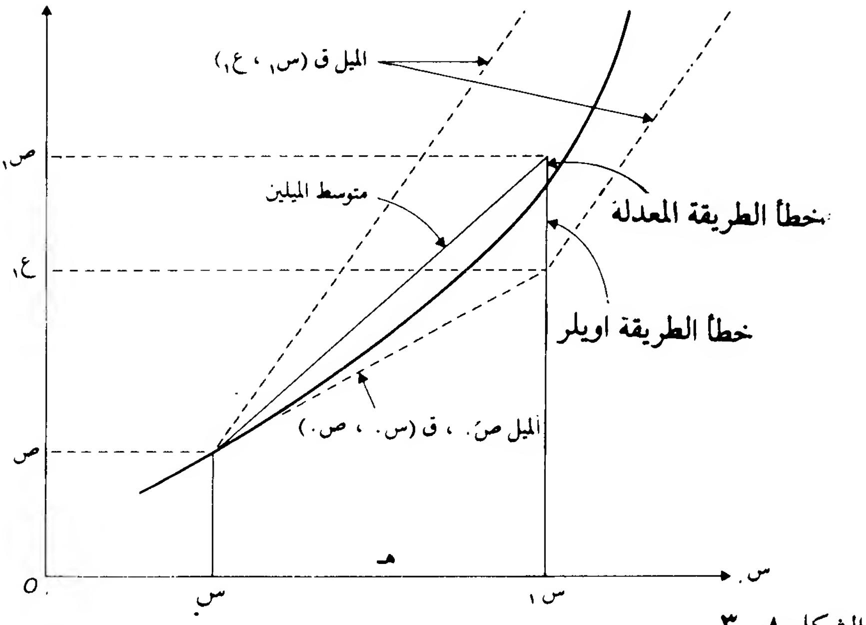
ففي المثال ٨ - ١ - ١ ، بما ان $\text{س}_{٠} = ٠$ ، $\text{ص}_{٠} = ١$، فاذا كان هـ = ٠,٢ ينتج :

$$\text{ع}_{١} = \text{ص}_{٠} + \text{هـ ق}(\text{س}_{٠} ، \text{ص}_{٠}) = ١ + ٠,٢ (١ + ٠^{٢}) = ١,٢$$

$$\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٠} + \frac{\text{هـ}}{٢}[\text{ق}(\text{س}_{٠} ، \text{ص}_{٠}) + \text{ق}(\text{س}_{١} ، \text{ع}_{١})]$$

$$= ١ + ٠,١ [١ + (٠)^{٢} + ١,٢ + ٠,٢^{٢}]$$

$$= ١ + ٠,١ [٢,٢٤] = ١,٢٢٤ \approx ١,٢٢$$



الشكل ٨ - ٣

$$\text{ع}_{٢} = \text{ص}_{١} + \text{هـ ق}(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١}) = ١,٢٢ + ٠,٢ [١,٢٢ + (٠,٢)^{٢}] = ١,٤٧٢$$

$$\approx ١,٤٧$$

$$\text{ص}_{٢} = \text{ص}_{١} + \frac{\text{هـ}}{٢}[\text{ق}(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١}) + \text{ق}(\text{س}_{٢} ، \text{ع}_{٢})]$$

$= ١,٢٢ + ٠,١ \, [١,٢٢ + (٠,٢)^{٢} + ١,٤٧ + (٠,٤)^{٢}] = ١,٥٠٩ \approx$

١,٥١

وهكذا

والجدول (٨ ـ ٢) يبين القيم التقريبية لحل المعادلة (٨ ـ ٥) في المثال ٨ ـ ١ ـ ١ والخطأ هنا أقل من ١٪ .

الجدول ٨ ـ ٢

$س_ن$	$ص_ن$	$ق(س_ن ، ص_ن) = ص_ن + س_ن^{٢}$	$ع_{ن+١}$	$ق(س_{ن+١} ، ع_{ن+١}) = ع_{ن+١} + س_{ن+١}^{٢}$	$ص_{ن+١}$
٠,٠	١,٠	١,٠	١,٢٠	١,٢٤	١,٢٢
٠,٢	١,٢٢	١,٢٦	١,٤٧	١,٦٣	١,٥١
٠,٤	١,٥١	١,٦٧	١,٨٤	٢,٢٠	١,٩٠
٠,٦	١,٩٠	٢,٢٦	٢,٣٥	٢,٩٩	٢,٤٣
٠,٨	٢,٤٣	٣,٠٧	٣,٠٤	٤,٠٤	٣,١٤
١,٠	٣,١٤				

واليك برنامجا باللغة الاساسية لاجراء هذه العمليات :

```
10 DEF FNF (X , Y) = X * X + Y
20 INPUT X, Y, H, N
30 FOR   K =  0  TO  N
35 Z = Y + H * FNF (X, Y)
40 Y = Y + H * (FNF(X, Y) + FNF (X + H,Z)/2
50 X = X + H
60 NEXT K
70 PRINT Y
80 END
```

١٠ التعريف اقتران ق (س ، ص) = س * س + ص
٢٠ المدخلات س ، ص ، هـ ، ن
٣٠ ك من ٠ الى ـ
٣٥ ع = ص + هـ * ق (س ، ص)
٤٠ ص = ص + هـ * (ق (س ، ص) + ق (س + هـ، ع))/٢
٥٠ س = س + هـ
٦٠ ك التالية
٧٠ أكتب ص
٨٠ النهاية

ويمكن ان نحصل على هذا البرنامج من البرنامج السابق بأضافة السطر (٣٥) وتغيير السطر (٤٠). ويمكن تكييف هذا البرنامج لحل اي معادلة بالشكل (٨ ـ ١) وذلك بتغيير السطر (١٠).

طريقة رونج وكوتا Runge - Kutta Method

هذه طريقة فعَّالة تعطي نتائج دقيقة دون اللجوء الى زيادة عدد الخطوات (أي دون الحاجة الى تقصير الخطوة). وسبب فعاليتها استخدامها لشكل من **قاعدة سمبسون** (Simpson's rule) لحساب التكامل في المعادلة (٨ ـ ٢)، (وقاعدة سمبسون تستعمل كثيراً في حسابات التكامل العددية) وسنستخرج القاعدة في البند (٨ ـ ٣)، اما الآن فسنكتفي بشرح طريقة استعمالها:

ليكن

$$ص_{ن+1} = ص_ن + \frac{1}{6}(م_1 + 2م_2 + 2م_3 + م_4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8-8)$$

حيث

$$م_1 = هـ ق(س_ن ، ص_ن) ، \quad م_2 = هـ ق(س_ن + \frac{هـ}{2} ، ص_ن + \frac{م_1}{2})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8-9)$$

$$م_3 = هـ ق(س_ن + \frac{هـ}{2} ، ص_ن + \frac{م_2}{2}) ، \quad م_4 = هـ ق(س_ن + هـ ، ص_ن + م_3)$$

لاحظ ان $م_1/هـ$ ، $م_2/هـ$ ، $م_3/هـ$ ، $م_4/هـ$ أربعة ميول في $س_ن \leqslant س \leqslant س_{ن+1}$ ، فالمعادلة (٨ ـ ٨) هي بمثابة متوسط لهذه الميول. فإجراؤ ها هنا شبيه بطريقة اويلر المحسنة. لاحظ أيضاً أنه عندما يكون ق (س ، ص) دالة في س فقط يصير $م_2 = م_3$ وتصير المعادلة (٨ ـ ٨) هي قاعدة سمبسون.

لنطبق طريقة رونج وكوتا على المعادلة (٨ ـ ٥) في المثال ٨ ـ ١ ـ ١ ، مع هـ = ١ ، ن = ١ ، فيكون :

$$\text{م}_{١} = \text{ق}\,(٠ ، ١) = ١ \qquad \text{م}_{٢} = \text{ق}\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right) = \frac{٧}{٤}$$

$$\text{م}_{٣} = \text{ق}\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١٥}{٨}\right) = \frac{١٧}{٨} \qquad \text{م}_{٤} = \text{ق}\left(١ ، \frac{٢٥}{٨}\right) = \frac{٣٣}{٨}$$

فيكون

$$\text{ص}_{١} = ١ + \frac{١}{٦}\left(١ + \frac{٧}{٢} + \frac{١٧}{٤} + \frac{٣٣}{٨}\right) = \frac{١٥١}{٤٨} \approx ٣,١٤٦$$

ففي خطـوة واحـدة وصلت بنـا هذه الطـريقة أقرب الى القيمة الصحيحة من طريقة أويلر المحسنة وليس من الصعب عمل برنامج باللغة الاساسية لاجراء طريقة رونج وكوتا، ولكن اليك برنامجاً للمعادلة (٨ ـ ٥) بلغة فورتران :

```
   DIMENSION ZM(4)
1  FORMAT (3F,I)
2  FORMAT (2F12.4)
   ACCEPT 1, X, Y, H, N
   DO 7 I = 1,N
   K = 1
   XK = X
   YK = Y
   GO TO 5
```

```
3   XK = X + H/2.0
    YK = Y + ZM(K-1)/2.0
    GO TO 5
4   XK = X + H
    YK = Y + ZM(3)
5   ZM(K) = H*(XK*XK+YK)
    K = K + 1
    IF (K-4) 3, 4, 6
6   Y = Y + (ZM(1) + 2.*ZM(2) + 2.*ZM(3) + ZM(4))/6.0
    X = X + H
7   CONTINUE
8   TYPE 2, X, Y
    STOP
    END
```

ويمكن تعـديـل هذا الـبرنامج لمعادلات أخرى مثل (٨ ـ ١)، بادخال الاقتران ق (س ، ص) المناسب في الخط المرقوم بالعبارة ٥ . وللحصول على ناتج كل فترة خلال سير العملية ما علينا الا ان نبدل السطرين ٧ ، ٨ أحدهما بالآخر.

يتبين من الطرق الثلاث التي يعرضها هذا البند كم لدينا من اساليب لايجاد حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية . ان طريقة أويلر اسهلها، ولكنها تتطلب عدة خطوات (أي تقصير الخطوة) للحصول على نتيجة قريبة من الدقة . وفي البند التالي سندرس بالتفصيل دقـة طريقـة اويلر باعتبـارهـا دالة لطول الخطوة. وطريقة أويلر المحسنة أدق (رغم تساوي الخطوات) ولكنها تتطلب في كل مرحلة عدداً أكثر من الحسابيات . وطريقة رونج وكوتا (٨ ـ

٨) تعطي عادة نتـائـج أدق ولكنهـا تقتضي حسـابيـات اكثـر بكثير في كل خطوة. واختيار الطريقة كثيراً ما تمليه الدقة المطلوبة، فاذا كان المطلوب مجرد جواب تقريبي (لمنزلة عشرية أو منـزلتـين) يكفي طريقـة اويلر او الطـريقـة المعدلة. اما اذا اريد دقة أكبر فالأمر يقتضي اسلوباً حسابياً متطوراً.

التمارين ٨ ـ ١

١. استعمل طريقة اويلر في حل مسائل القيم الابتدائية التالية:

أ) $\frac{د ص}{د س} = س + ص$ ، ص (٠) = ١. أوجد ص (١) باتخاذ هـ = ٠,٢

ب) $\frac{د ص}{د س} = س - ص$ ، ص (١) = ٢. أوجد ص (٣) باتخاذ هـ = ٠,٤

جـ) $\frac{د ص}{د س} = \frac{س - ص}{س + ص}$ ،ص (٢) = ١. أوجد ص (١) باتخاذ هـ = -٠,٢

اختبر دقة جوابك بايجاد القيم الدقيقة.

٢. استعمل طريقة اويلر المعدلة وطريقة رونج وكوتا (٨ ـ ٨) لحل معادلات التمرين ١. واختبر دقة الطريقتين بإيجاد القيم الدقيقة.

٣. اذا كان د ص/د س = (س - ص)/(س + ص) ، ص (٢) = ٠ ، فاستعمل طريقة أويلر لايجـاد ص (١) متخـذاً هـ = -٠,٢ ثم قارن جوابـك بالجواب الدقيق. إشرح لماذا فشلت طريقة اويلر في هذه الحالة. هل تنجح طريقة رونج وكوتا؟

٤. اذا كان صَ = $e^{س ص}$ ، ص (٠) = ١ فأوجـد قيمـة ص (٤)، مستخـدمـا طريقـة اويلر، امـا مع برنـامـج اللغـة الاسـاسيـة، متخـذا هـ = ٠,١ ، ن = ٤٠ ، اوبالحسـاب اليدوي مع هـ = ١، ن = ٤ ما الصعوبات التي تواجهها؟ ما مدى ثقتك بجوابك؟

٥ . ضع برنامجاً بلغة فورتران لطريقة أويلر المعدلة .

٦ . ضع برنامجاً باللغة الأساسية لطريقة رونج وكوتا .

٨ ـ ٢* تحليل للخطأ في طريقة أويلر

ما سنناقشه في هذا البند يقتصر على أخطاء الفصل التي رأيناها في استعمال طريقة أويلر. وأخطاء التدوير لا تعتمد فقط على الطريقة وعدد الخطوات، ولكن أيضاً على نوع الآلة المستعملة لايجاد الجواب (أحاسبة يدوية هي، ام مسطرة زلاقة. ام كمبيوتر، ام الورقة وقلم الرصاص، الخ). ولن نناقش خطأ التدوير في هذا البند (أنظر البند ٨ ـ ٥)، ولكن لا يجوز ان نتجاهل أمره.

لننظر ثانية في مسألة القيم الابتدائية، ذات الرتبة الأولى

$$ص' = ق (س ، ص)، ص (س_٠) = ص_٠ \qquad \text{(٨ ـ ١٠)}$$

ولنستعمل الاسلوب التدريجي

$$ص_{ن+١} = ص_ن + هـ ق (س_ن ، ص_ن) \qquad \text{(٨ ـ ١١)}$$

حيث هـ ثابت يمثل طول الخطوة.

وسنفترض فيما بقي من هذا البند ان ق (س ، ص) له مشتقات جزئية أولى متصلة. ففي أي فترة محصورة يكون ∂ ق (س ، ص)/∂ ص محصوراً بثابت ما، لنسمه ل (لأن الاقتران المتصل يكون دائماً محصوراً، في نطاق فترة مغلقة محصورة).

فلأن ص' (س) = ق (س،ص) ينتج من قاعدة السلسلة أن:

$$ص'' (س) = \frac{\partial ق}{\partial س} (س ، ص) + \frac{\partial ق}{\partial ص} (س ، ص) ص' (س)$$

وهذا يجب ان يكون متصلاً لأنه مجموع اقترانين متصلين، فاذن ص'' (س) محصور في

الفترة $س_{.} \leqslant س \leqslant أ$ فنفرض ان $|صً (س)| < م$ حيث م ثابت ما موجب.

ولنقدر الآن الخطأ $خـ_{ن}$ عند الخطوة ن من خطوات الطريقة المبينة في (٨ - ١١):

فلأن $ص(س_{ن})$ هي القيمة الدقيقة للحل ص (س) عند النقطة $س_{ن} = س_{.} + نهـ$، $ص_{ن}$ هي القيمة التقريبية عند تلك النقطة، فان الخطأ عند الخطوة ن هو:

$$خـ_{ن} = ص_{ن} - ص(س_{ن}) \quad \ldots\ldots \quad (٨ - ١٢)$$

لاحظ ان $ص_{.} = ص(س_{.})$، وعلى هذا فان $خـ_{.} = ٠$

والآن ان $ص(س_{ن+١}) = ص(س_{ن} + هـ)$ ، صً (س) متصل. فحسب طريقة تايلر مع الباقي يكون

$$ص(س_{ن+١}) = ص(س_{ن} + هـ) = ص(س_{ن}) + هـ صَ(س_{ن}) + \frac{هـ^{٢}}{٢} صً(\xi_{ن}) \quad \ldots\ldots \quad (٨ - ١٣)$$

حيث $س_{ن} \leqslant \xi_{ن} \leqslant س_{ن+١}$.

فالنتيجة الرئيسية لهذا البند هي:

النظرية ٨ - ١ اذا كان ق (س ، ص) له مشتقات جزئية أولى متصلة، وكان $ص_{ن}$ هو الحل التقريبي للمعادلة (٨ - ١٠) حسب طريقة أويلر (٨ - ١١)، وكان ص (س) معرَّفاً، والمتباينتان $\left|\frac{\partial ق}{\partial ص}(س ، ص)\right| < ل$، $|صً (س)| < م$ صحيحتين في الفترة المحصورة $س_{.} \leqslant س \leqslant أ$، فان الخطأ $خـ_{ن} = ص_{ن} - ص(س_{ن})$ يحقق المتباينة

$$|خـ_{ن}| \leqslant \frac{هـ م}{٢ ل} خـ^{(س_{ن} - س_{.}) ل} - ١) = \frac{هـ م}{٢ ل} (خـ^{ن هـ ل} - ١) \quad (٨ - ١٤)$$

وعلى الأخص، لأن $س_{ن} - س_{.} \leqslant أ - س_{.}$ (وهي محدودة)، فإن كل $|خـ_{ن}|$ تقارب الصفر اذا قاربت هـ الصفر.

لبرهان : نطرح (٨ ـ ١٣) من (٨ ـ ١١) فينتج :

$$ص_{ن+١} - ص(س_{ن+١}) = ص_ن - ص(س_ن) + هـ[ق(س_ن ، ص_ن) - صَ(س_ن)] - \frac{هـ^٢}{٢} صً(ع_ن)$$

أي ان

$$ح_{ن+١} = خـ_ن + هـ \{ق(س_ن ، ص_ن) - ق(س_ن ، ص(ص_ن))\} - \frac{هـ^٢}{٢} صً(غ_ن) \quad .... (٨ ـ ١٥)$$

وحسب نظرية القيمة المتوسطة في حساب التفاضل :

$$ق(س_ن ، ص_ن) - ق(س_ن ، ص(س_ن)) =$$

$$\frac{\partial ق}{\partial ص}(س_ن ، \hat{ص}_ن)[ص_ن - ص(س_ن)] = \frac{\partial ق}{\partial ص}(س_ن ، \hat{ص}_ن) ـ_ن \quad .... (٨ ـ ١٦)$$

حيث $\hat{ص}_ن$ يقع بين س ن ص ن، ص (س ن)

نعوض (٨ ـ ١٦) في (٨ ـ ١٥) فينتج :

$$خـ_{ن+١} = خـ_ن + هـ \frac{\partial ق}{\partial ص}(س_ن ، \hat{ص}_ن) خـ_ن - \frac{ع}{٢} صً = (ع_ن) \quad .... (٨ ـ ١٧)$$

ولكن

$$|\partial ق / \partial ص| \leqslant ل، |صً| \leqslant م$$

فاذا اخذنا القيم المطلقة للطرفين في (٨ ـ ١٧) واستخدمنا متباينة المثلث، ينتج :

$$|خـ_{ن+١}| \leqslant |خـ_ن| + هـ ل |خـ_ن| + \frac{هـ^٢}{٢} م = (١ + هـ ل) |خـ_ن| + \frac{هـ^٢}{٢} م$$

ننظر الآن في معادلة الفرق التالية ذات الرتبة الأولى :

$$ذ_{ن+١} = (١ + هـ ل) ذ_ن + \text{———} م، ذ_. = ٠ \quad .... (٨ ـ ١٩)$$

فاذا كان $ذ_ن$ حل (٨ ـ ١٩) كان $|خـ_ن| \leqslant ذ_ن$. ونبين هذا بالاستقراء:

فهو يصح اذا كان ن = ٠، لأن $خـ_. = ذ_. = ٠$ فنفرضه يصح اذا كان ن = ك، ونثبت انه يصح مع ن = ك + ١ فنفرض ان $|خـ_م| \leqslant ذ_م$، حيث م = ٠، ١، ...، ك

فيكون

$$ذ_{ك+١} = (١ + هـ ل) ذ_ك + \frac{هـ^٢}{٢} م \leqslant (١ + هـ ل) |خـ_ك|$$

$$+ \frac{هـ^٢}{٢} م \leqslant |خـ_{ك+١}| . \quad \text{وهو المطلوب}$$

[والخطوة الأخيرة تنتج من (٨ ـ ١٨)]

ونستطيع ان نحل معادلة الفرق (٨ ـ ١٩) اللامتجانسة ذات الرتبة الأولى والمعاملات الثابتة، بطرق البند (٢ ـ ٦). فلأن $أ_ر = ١ + هـ ل$، $ق_ر = هـ^٢ م/٢$ لكل ر، $ذ_. = ٠$، فحسب المعادلة (٢ ـ ٦٧) ومجموع ن حدود في المتتالية الهندسية، ينتج:

$$ذ_ن = \frac{هـ م}{٢ل} (١ + هـ ل)^ن - \frac{هـ م}{٢ل} \quad \text{.......................} \quad (٨ - ٢٠)$$

ولكن

$$e^{هـ ل} = ١ + هـ ل + هـ^٢ ل^٢ / ٢! + \ldots ،$$

فيكون:

$$١ + هـ \leqslant e^{هـ ل} ، \quad (١ + هـ ل)^ن \leqslant (e^{هـ ل})^ن = e^{ن هـ ل}$$

فإذن

$$|خـ_ن| \leqslant ذ_ن \leqslant \frac{هـ م}{٢ل} e^{ن هـ ل} - \frac{هـ م}{٢ل}$$

$$= \frac{هـ م}{٢ ل} (e^{ن هـ ل} - ١) \quad \text{.........................} \quad (٨ - ٢١)$$

لكن

$$س_ن = س_٠ + ن هـ ،$$

فيكون

$$س_ن - س_٠ = ن هـ ،$$

فتصبح (٨ ـ ٢١):

$$|خـ_ن| \leqslant \frac{هـ م}{٢ل} (e^{(س_ن - س_٠)ل} - ١)$$

وهو المطلوب .

والنظرية (٨ ـ ١) لا تقتصر على تبيان ان الأخطاء تصغر كلما اقتربت هـ من الصفر، ولكنها تبين أيضاً سرعة تناقص الأخطاء . فاذا أخذنا الثابت ك، حيث

$$ك = \frac{م}{٢ل} \left| e^{(أ - س_٠)ل} - ١ \right| \quad \text{.................... (٨ ـ ٢٢)}$$

يكــون

$$|خـ_ن| \leqslant ك هـ \quad \text{.......................... (٨ ـ ٢٣)}$$

فالخطأ إذن محصور باقتران خطي لطول الخطوة هـ . (لاحظ ان $|خـ_ن|$ يحصره حد يعتمد على هـ فقط، لا على ن) . وهذا يعني، على نحو تقريبي، ان الخطأ يتناقص بسرعة تتناسب مع تنـاقص طول الخطـوة . فمثـلاً : اذا نقصنـا طول الخطوة الى النصف، نتوقع على الاقـل ان ينتصف الخطأ . والـواقـع انـه بالنظـر الى ان التقـديـرات التي اتخـذت في الحصـول على (٨ ـ ٢٣) بدائيـة جداً، فكثـيراً ما تكـون نتائجنا أحسن من ذلك، كما في المثـال ٨ ـ ١ ـ ١ حيث نصفنـا طول الخطـوة وانقصنـا الخطأ الى الـربـع . ومن المفيد ان يكـون لدينـا حاصـرة عليـا للخطأ . ولكن ينبغي ان نلاحـظ ان هذه الحـاصرة قد يصعب الحصول عليها، لأنه كثيراً ما يصعب الحصول على حاصرة للمشتقة صً (س) .

المثال ٨ ـ ٢ ـ ١ خذ المعادلة

$$ص' = ص \text{ ، } ص(٠) = ١$$

$$\text{هنا: } ق(س ، ص) = ص، \left| \frac{\partial ف}{\partial ص}(س ، ص) \right| = ١ = ل$$

ولأن حل المسألة هو

$$ص(س) = e^{س} \text{ ،}$$

يكون

$$|ص''| \leqslant |e^{١}| = م \text{ على الفترة } ٠ \leqslant س \leqslant ١،$$

فتصير المعادلة (٨ ـ ٢٢):

$$ك = \frac{e}{٢} |e - ١| = \frac{e^{٢} - e}{٢} \approx ٢,٣٤$$

فـإذن

$$|خ_{ن}| \leqslant ٢,٣٤ هـ$$

فإذن اذا جعلنـا طول الخطـوة هـ = ١ , ٠ مثـلاً نتـوقع ان نجد عند كل خطوة خطأ أقل من ٢٣٤ , (انظـر الجـدول ٨ ـ ٣) ويـلاحـظ ان أكـبر خطأ في الـواقع هوحوالي نصف النهاية العظمى للخطأ حسب (٨ ـ ٢٣).

ونشير الى ان من الممكن ان نستنتج تقديرات للخطأ، مثل (٨ ـ ٢١) ، (٨ ـ ٢٣) لكل طريقة نناقشها في هذا الفصل، لحل المعادلات التفاضلية عددياً. ولكن استنتاج هذه التقديرات يخرج بنا عن نطاق هذا الكتاب. ولكنا نود ان نذكر ان طريقة رونج وكوتا التي شرحناها في البند (٨ ـ ١) يقدر فيها خطأ الفصل بالمتباينة $|خ_{ن}| \leqslant ك هـ^{٤}$ حيث ك ثابت، فتنقيص الخطـوة الى النصف مثـلاً يخفض الحـاصـرة على الخطأ $٢^{٤} = ١٦$ مرة. ولكن ثمن ذلـك ان يُحسب ق (س ، ص) عنـد اربـع نقاط في كل خطوة من خطوات

الطريقة. [انظر ٨ ـ ٩].

الجدول ٨ ـ ٣

$س_ن$	$صَ_ن = ق(س_ن ، ص_ن)$	$ص_{ن+1} = ص_ن + هـ صَ_ن$	$ص(س_ن) = e^{س_ن}$	$خـ_ن = ص_ن - ص(س_ن)$
٠,٠	١	١,١	١	٠
٠,١	١,١	١,٢١	١,١١	-٠,٠١
٠,٢	١,٢١	١,٣٣	١,٢٢	-٠,٠١
٠,٣	١,٣٣	١,٤٦	١,٣٥	-٠,٠٢
٠,٤	١,٤٦	١,٦١	١,٤٩	-٠,٠٣
٠,٥	١,٦١	١,٧٧	١,٦٥	-٠,٠٤
٠,٦	١,٧٧	١,٩٥	١,٨٢	-٠,٠٥
٠,٧	١,٩٥	٢,١٥	٢،٠١	-٠,٠٦
٠,٨	٢,١٥	٢,٣٧	٢,٢٣	-٠,٠٨
٠,٩	٢,٣٧	٢,٦١	٢,٤٦	-٠,٠٩
١,٠	٢,٦١		٢,٧٢	-٠,١١

التمارين ٨ ـ ٢

١. انظر في المعادلة التفاضلية صَ = -ص، ص (٠) = ١، والمطلوب ان نجد ص (١).

أ) إحسب الحاصرة العليا على الخطأ في طريقة اويلر، بدلالة هـ.

ب) إحسب هذه الحاصرة باتخاذ هـ = ١,٠ ، ٢,٠

جـ) تابـع خطـوات الحل باعتبـار هـ = ٢, ٠ ، ١, ٠ وقـارن الخطأ الحقيقي بالنهـايـة العظمى للخطأ.

٢ . في معـادلـة التمـرين ١ : أغفـل تدويـر الخطأ واذكر كم خطوة يلزم إجراؤ ها لضمان ان يكون ص (١) حسب طريقة اويلر صحيحاً

أ) لخمس منازل عشرية .

ب) لست منازل عشرية .

٣ . أجب عن السؤ ال ٢ على المعادلة صَ = ٣ص − س، ص (١) = ٢ ، على اعتبار ان المطلوب ص (٥, ١).

٨ ـ ٣ : صيغ رونج وكوتا

سنشتق في هذا البنـد اسـاليب شبيهة بطـريقـة رونج وكوتا، (٨ ـ ٨) ، (٨ ـ ٩) للحل العددي لمسائل القيم الابتدائية.

في طريقـة اويلر استعملنـا في كل مرحلة قيمـة واحـدة للمشتقة صَ = ق (س ، ص) . وفي طريقـة اويلر المحسنـة استعملنـا لها قيمتـين . اما في قوانـين رونج وكوتا التي سنناقشها، فسنستعمل في كل مرحلة من الحل أربع قيم للمشتقة . وسنرى كيف نجد أحسن أربع قيم، بمعنى سنحدده فيما بعد.

وفي البدء، يلزم ان نتذكر متسلسلة تايلر للاقترانات ذات المتغيرين :

$$ص (س_ر + هـ) = ص (س_ر) + هـ صَ (س_ر) + \frac{هـ^٢}{٢!} صً (س_ر)$$

$$+ \frac{هـ^٣}{٣!} صًّ (س_ر) + \ldots \qquad \text{(٨ ـ ٢٤)}$$

$$\text{ق}(\text{س}_{.} + \text{م هـ} ، \text{ص}_{.} + \text{ن هـ}) = \text{ق}(\text{س}_{.} ، \text{ص}_{.}) + \text{هـ}(\text{م ق}_{\text{س}} + \text{ن ق}_{\text{ص}})$$

$$+ \frac{\text{هـ}^{٢}}{!٢}(\text{م}^{٢}\text{ق}_{\text{سس}} + ٢\,\text{م ن ق}_{\text{سص}} + \text{ن}^{٢}\text{ق}_{\text{صص}})$$

$$+ \frac{\text{هـ}^{٣}}{!٣}(\text{م}^{٣}\text{ق}_{\text{سسس}} + ٣\,\text{م}^{٢}\text{ن ق}_{\text{سسص}} + ٣\,\text{م ن}^{٢}\text{ق}_{\text{سصص}} + \text{م}^{٣}\text{ق}_{\text{صصص}})$$

$$+ \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٨ - ٢٥)$$

حيث المشتقات الجزئية تقدر كلها عند النقطة (س. ، ص.)

ولأن

$$\text{صَ} = \text{ق}(\text{س} ، \text{ص}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٨ - ٢٦)$$

نجد ان

$$\text{صً} = \text{ق}_{\text{س}} + (\text{ق}_{\text{ص}})\,\text{صَ} = \text{ق}_{\text{س}} + \text{ق ق}_{\text{ص}} \qquad \ldots\ldots \qquad (٨ - ٢٧)$$

$$\text{صًّ} = \text{ق}_{\text{سس}} + ٢\,\text{ق ق}_{\text{سص}} + \text{ق}^{٢}\text{ق}_{\text{صص}} + \text{ق}_{\text{ص}}(\text{ق}_{\text{س}} + \text{ق ق}_{\text{ص}})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٨ - ٢٨)$$

وهكذا .

تذكر ان $\text{ق}_{\text{سص}} = \text{ق}_{\text{صس}}$ عندما تكون المشتقات متصلة . فلذا يمكن ان تكتب (٨ ـ٢٤) بالصورة :

$$\text{ص}_{١} - \text{ص}_{.} = \text{هـ ق} + \frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}(\text{ق}_{\text{س}} + \text{ق ق}_{\text{ص}})$$

$$+ \frac{\text{هـ}^{٣}}{٦}[\text{ق}_{\text{سس}} + ٢\,\text{ق ق}_{\text{سص}} + \text{ق}^{٢}\text{ق}_{\text{صص}} + \text{ق}_{\text{ص}}(\text{ق}_{\text{س}} + \text{ق ق}_{\text{ص}}) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٨ - ٢٩)$$

والفكــرة الأســاسيــة هي ان نختــار، على نحـوما، عدة قيم (س ، ص) بحيث ان متسلسلة تايلر (٨ ـ ٢٥) للاقــتران ق (س ، ص) تطـابق الحـدود على الطرف الأيسر من المعادلة (٨ ـ ٢٩).

إفرض أننا جعلنا $م_{١} = هـ ق (س_{.} ، ص_{.})$

$$م_{٢} = هـ ق (س_{.} + ن هـ ، ص_{.} + ن م_{١})$$

إفرض أننا جعلنا $م_{١} = هـ ق (س_{.} ، ص_{.})$

$$م_{٢} = هـ ق (س_{.} + ن هـ ، ص_{.} + ن م_{١})$$

$$م_{٣} = هـ ق (س_{.} + ل هـ ، ص_{.} + ل م_{٢})$$

$$م_{٤} = هـ ق (س_{.} + ك هـ ، ص_{.} + ك م_{٣})$$

(وسبب ذلك سيتبين بعد قليل). فحسب (٨ ـ ٢٥)، يمكن ان تكتب هذه بالصورة:

$$م_{١} = هـ ق$$

$$م_{٢} = هـ [ق + ن هـ (ق_{س} + ق ق_{ص}) + \frac{(ن هـ)^{٢}}{٢} (ق_{س س} + ٢ ق ق_{س ص} + ق^{٢} ق_{ص ص})] + \dots \}$$

$$م_{٣} = هـ [ق + ل هـ (ق_{س} + ق ق_{ص}) + \frac{هـ^{٢}}{٢} [ل^{٢} (ق_{س س} + ٢ ق ق_{س ص} + ق^{٢} ق_{ص ص}) + ٢ن ل ق_{ص} (ق_{س} + ق ق_{ص})] + \dots \}$$

$$م_{٤} = هـ [ق + ك هـ (ق_{س} + ق ق_{ص}) + \frac{هـ^{٢}}{٢} [ك^{٢} (ق_{س س} + ٢ ق ق_{س ص} + ق^{٢} ق_{ص ص}) + ٢ ل ك ق_{ص} (ق_{س} + ق ق_{ص})] + \dots \}$$

حيث كل الاقترانات تقيَّم عند النقطة (س. ، ص.)

فلننظر الآن في عبارة بالشكل أ $م_١$ + ب $م_٢$ + حـ $م_٣$ + د $م_٤$:

نساويها بالطرف الأيسر في المعادلة (٨ ـ ٢٩). فيكون من شأن ذلك ان يعطينا حلاً عددياً يتفق مع حل (٨ ـ ٢٦) حتى نهاية حدود الرتبة الثالثة. وبذا فالخطأ لا يزيد عن حدود مثل ك $هـ^٤$، وهكذا. فمساواة العبارات المتشابهة يكون:

$$أ + ب + حـ + د = ١$$

$$ب ن + حـ ل + د ك = \frac{١}{٢}$$

$$ب ن^٢ + حـ ل^٢ + د ك^٢ = \frac{١}{٣} \quad \text{(٨ ـ ٣٠)}$$

$$حـ ن ل + د ل ك = \frac{١}{٦}$$

فأي حل لهذه المعادلات سيؤدي الى طريقة لا خطأ فيها حتى حدود الرتبة الثالثة.

فلنفرض اننا أخذنا ن = ل = $\frac{١}{٢}$، ك = ١، فتتحول (٨ ـ ٣٠) الى منظومة المعادلات التالية:

$$أ + ب + حـ + د = ١$$

$$ب + حـ + ٢ د = ١$$

$$٣ ب + ٣ حـ + ١٢ د = ٤$$

$$٣ حـ + ٦ د = ٢$$

والحل:

$$أ = د = \frac{١}{٦} \quad ، \quad ب = حـ = \frac{١}{٣}$$

فقانون رونج وكوتا (٨ ـ ٨) الذي سبق وصفه في البند السابق يتفق مع $ص_١ - ص_٠$ في جميع الحدود حتى نتجاوز الحد $هـ^٣$. والواقع اننا بمزيد من الجهد يمكن ان نبين انهما يتفقان في حدود $هـ^٤$ أيضاً. فالخطأ (اذا وجد) يكون في حدود من رتبة $هـ^٥$ وما فوقها. فاذا كانت هـ صغيرة فالمتوقع ان نحصل على نتائج جيدة جداً.

ويمكن استنتاج قوانين أخرى بسهولة. فلنفرض اننا جعلنا ن = $\frac{١}{٣}$ ، ل = $\frac{٢}{٣}$ ، ك = ١ ، فينتج من (٨ ـ ٣٠) ما يلي :

أ + ب + حـ + د = ١

٢ ب + ٤ حـ + ٦ د = ٣

ب + ٤ حـ + ٩ د = ٣

٤ حـ + ١٢ د = ٣

وحلها أ = د = $\frac{١}{٨}$ ، ب = حـ = $\frac{٣}{٨}$

فالقانون المعروف بقاعدة ال $\frac{٣}{٨}$ لكوتا وسمبسون يكتب بالصيغة :

$$ص_١ = ص_٠ + \frac{١}{٨} (م_١ + ٣ م_٢ + ٣ م_٣ + م_٤)$$

حيث

$م_١$ = هـ ق (س. ، ص.)

$م_٢$ = هـ ق (س. + هـ/٣ ، ص. + $م_١$/٣)

$م_٣$ = هـ ق (س. + ٢هـ/٣ ، ص. + ٢ $م_٢$/٣) .... (٨ ـ ٣١)

$م_٤$ = هـ ق (س. + هـ ، ص. + $م_٣$)

وبالمثل فان اختيار $ن = \frac{١}{٣}$، $ل = \frac{٢}{٣}$ ، $ك = ١$

تفضي الى الحل $أ = حـ = ٠$ ، $ب = \frac{٣}{٤}$، $د = \frac{١}{٤}$ ،

$$ص_{١} = ص_{٠} + \frac{١}{٤} (٣ م_{٢} + م_{٤})$$

فيكون

حيث $م_{٢}$ ، $م_{٤}$ كما في (٨ ـ ٣١).

ولأن عدد الاختيارات الممكنة لقيم ن ، ل ، ك لا يتناهى ، فبامكان القاريء ان يسلي نفسه بحل (٨ ـ ٣٠) لايجاد أ ، ب ، حـ ، د متخذاً أي قيم يشاء للرموز ن ، ل ، ك.

التمارين ٨ ـ ٣

١ . في المعادلة (٨ ـ ٣٠) إجعل $د = ٠$ ، $ن = \frac{١}{٣}$ ، $ل = \frac{٢}{٣}$ ثم اوجد المعاملات أ ، ب ، حـ لهذه القيم فالقانون الناتج يسمى صيغة هيون (Heun) .

٢ ضع $أ = د = ٠$ ، $ب = \frac{٣}{٤}$ ، $حـ = \frac{١}{٤}$ ثم احسب ن ، ل.

٣. ضع $أ = \frac{٢}{٨}$ ، $ب = حـ = \frac{٣}{٨}$ ، $د = ٠$ ، ثم احسب ن ، ل.

٤ . أثبت أن قانون رونج وكوتا يتفق مع (٨ ـ ٢٩) حتى تجاوز الحد $هـ^{٤}$.

٥ . فسِّر لماذا ينجم عن اختيار $ن = \frac{١}{٣}$ ، $ل = \frac{٢}{٣}$ ، $ك = ١$ ، مجموعتان من الحلول للمعاملات أ ، ب ، حـ ، د.

هل يمكن وجود حلول أخرى؟ هل الاختيار $ن = ل = \frac{٣}{٢}$ ، $ك = ١$ يسمح بحلول مضاعفة؟

٨ ـ ٤ قوانين التنبؤ والتصحيح

ان أبسط انواع قواعد التنبؤ والتصحيح، قاعدة سبق ان استعملناها، وهي طريقة أويلر المحسنة. تذكر اننا بهذه الطريقة نحصل أول الأمر على قيمة للمجهول $ص_{ن}$، بطريقة اويلر (وهذه هي مرحلة التنبؤ في العملية)، ثم نحسِّن من دقة الجواب باستعمال قاعدة شبه المنحرف (وهذه هي مرحلة التصحيح). وفي هذا البند سنشير الى استخراج هذه الطرق، وسنعرض عدة أساليب تؤدي عملها على درجة عالية من الدقة.

وسنبدأ باستخراج طريقة للحصول على قواعد تربيع. وغاية هذه القواعد هي الحصول على قيمة تقريبية للتكامل المحدود باستعمال قيم للمكامل متساوية السمك. وهنالك قاعدتان معروفتان للتربيع، هما قاعدة شبه المنحرف، وقاعدة سمبسون، ويجدها الطالب في معظم كتب الحسبان، ويمكن ان تكتب بالصيغتين التاليتين، على الترتيب:

$$ص_{١} - ص_{٠} = \frac{هـ}{٢}(صَ_{٠} + صَ_{١}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٣٢)$$

$$ص_{٢} - ص_{٠} = \frac{هـ}{٣}(صَ_{٠} + ٤\,صَ_{١} + صَ_{٢}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٣٣)$$

حيث صَ هو المكامَل، هـ هي الفترة بين قيمتين متتاليتين منه. لاحظ اننا هنا، على خلاف ما في الطرق التي سبق شرحها، قد غيرّنا من وجهة النظر بأن جعلنا الطرف الأيسر من المعادلة مجموع مشتقات، لا مجموع قيم للاقتران ق.

وفي (٨ ـ ٣٢) استعملنا نقطتين فقط هما $صَ_{٠}$ ، $صَ_{١}$ في حين اننا في (٨ ـ ٣٣) استعملنا ايضاً $صَ_{٢}$ لذا تسمى (٨ ـ ٣٢) قاعدة تربيع ذات نقطتين، وتسمى (٨ ـ

٣٣) قاعدة تربيع ذات ثلاث. وعلى العموم كلما زاد عدد النقط زادت الدقة. وفي الوضع الحالي، تعطي (٨ - ٣٢) القيمة الدقيقة للتكامل فقط في حالة الخطوط المستقيمة، في حين ان (٨ - ٣٣) تكون دقيقة ايضاً مع الحدوديات التربيعية (انظر التمرينين ٥ ، ٦).

وسنستخرج الآن طريقة للحصول على قواعد تربيع ذات ثلاث نقط، يمكن بسهولة تعديلها حتى تصلح مع ن من النقط.

طرق النقط الثلاث

افرض ان الاقتران ص (س) حدودية تربيعية، أي أن:

$$ص(س) = أ_{٠} + أ_{١} س + أ_{٢} س^{٢} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٣٤)$$

وليكن هـ ، $س_{٠}$ عددين حقيقيين معينين، وليكن $س_{ك} = س_{٠} + ك هـ$، لكل قيم ك الصحيحة. وليكن $ص_{ك} = ص(س_{ك})$. فالمطلوب ان نجد معاملات $ل_{٠}$ ، $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ حيث:

$$ص_{ر} - ص_{د} = هـ[ل_{٠} صَ_{٠} + ل_{١} صَ_{١} + ل_{٢} صَ_{٢}) \quad \ldots\ldots \quad (٨ - ٣٥)$$

حيث ر ، د = ٠ ، ١ ، ٢ ، $ر \neq د$.

وهذا يؤدي الى طريقة تكامل تكون دقيقة في الحدوديات التربيعية. فمثلاً اذا كان د = ٠ يصير الطرف الأيمن من (٨ - ٣٥):

$$ص_{ر} - ص_{٠} = أ_{١}(س_{ر} - س_{٠}) + أ_{٢}(س^{٢}_{ر} - س^{٢}_{٠})$$

$$= أ_{١} ر هـ + أ_{٢}[٢ س_{٠} ر هـ + (ر هـ)^{٢}]$$

$$= ر(أ_{١} هـ + ٢ أ_{٢} س_{٠} هـ + ر^{٢}(أ_{٢} هـ^{٢}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٣٦)$$

ومن ناحية أخرى، بالنظر الى أن $صَ = أ_{١} + ٢ أ_{٢} س$، $س_{ك} = س_{٠} + ك هـ$، يصير الطرف الأيسر من (٨ - ٣٥):

$$\text{هـ}\,[\text{ل}_{١}\,\text{صَ}_{١} + \text{أ}_{١}\,\text{صَ}_{١} + \text{ل}_{٢}\,\text{صَ}_{٢}] = \text{هـ}\,[\text{ل}_{٠}\,(\text{أ}_{١} + ٢\,\text{أ}_{٢}\,\text{س}_{٠}) + \text{ل}_{١}\,(\text{أ}_{١} + ٢\,\text{أ}_{٢}\,\text{س}_{١}) + \text{ل}_{٢}\,(\text{أ}_{١} + ٢\,\text{أ}_{٢}\,\text{س}_{٢})]$$

$$= (\text{ل}_{٠} + \text{ل}_{١} + \text{ل}_{٢})\,(\text{أ}_{١}\,\text{هـ} + ٢\,\text{أ}_{٢}\,\text{س}_{٠}\,.\,\text{هـ}) + (٢\,\text{أ}_{١} + ٤\,\text{أ}_{٢})\,(\text{أ}_{٢}\,\text{هـ}_{٢}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٣٧)$$

نساوي بين (٨ - ٣٦) و(٨ - ٣٧) فنحصل على المعادلتين الآنيتين:

$$\text{ل}_{٠} + \text{ل}_{١} + \text{ل}_{٢} = \text{ر} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٣٨)$$

$$٢\,\text{ل}_{١} + ٤\,\text{ل}_{٢} = \text{ر}^{٢}$$

ولأن هذه المنظومة قاصرة عن التعيين، فان لها عدداً لا نهائياً من حلول $\text{ل}_{٠}$ ، $\text{ل}_{١}$ ، $\text{ل}_{٢}$ كل يؤدي الى قاعدة تربيعية جديدة.

مثلاً:

نجعل ر = ١ ، ونجعل $\text{ل}_{٠} = \frac{٥}{٦}$، $\text{ل}_{١} = -\frac{١}{٦}$، $\text{ل}_{٢} = \frac{١}{٣}$،

فنحصل على القاعدة:

$$\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٠} = \frac{\text{هـ}}{٦}\,(٥\,\text{صَ}_{٠} - \text{صَ}_{١} + ٢\,\text{صَ}_{٢}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٣٩)$$

فاذا جعلنا ر = ٢ ، واخترنا $\text{ل}_{٠} = \frac{١}{٣}$، $\text{ل}_{١} = \frac{٤}{٣}$، $\text{ل}_{٢} = \frac{١}{٣}$،

نعود الى قاعدة سمبسون (٨ - ٣٣) أضف الى ذلك ان القواعد التربيعية يمكن ان تجمع او تطرح فينجم عنها قواعد جديدة.

فمثلاً نطرح (٨ - ٣٩) من (٨ - ٣٣) فينتج:

$$ص_٢ - ص_١ = \frac{هـ}{٢} (- صَ_٠ + ٣ صَ_١) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٤٠)$$

فلنبين الآن كيف تستعمل قواعد التنبؤ والتصحيح:

افرض اننا أعطينا مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$\frac{د ص}{د س} = ق (س ، ص) ، ص (س_٠) = ص_٠ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٤١)$$

فالقيمة $ص_٠$ معطاة، $صَ_٠$ يمكن الحصول عليها بإيجاد قيمة (٨ ـ ٤١) عند $س = س_٠$ ، $ص = ص_٠$.

نقوم الآن بحسابيات طريقة اويلر المحسنة لايجاد $ص_١$ [ثم $صَ_١$ باستعمال (٨ ـ ٤١)]. وعند هذا الحد، كثيراً ما يكون من المرغوب فيه ان تستعمل طريقة شبه المنحرف مرة بعد مرة، حتى تستقر قيمة $ص_١$ (أي تبقى ثابتة حتى عدد معين من المنازل العشرية، انظر المثال ٨ ـ ٤ ـ ١).

والآن، بما ان $ص_٠$ ، $صَ_٠$ ، $ص_١$ ، $صَ_١$ معروفة، يمكن ان نستعمل المعادلة (٨ ـ ٤٠) للتنبؤ عن قيمة $ص_٢$. ثم نستعمل هذه القيمة في (٨ ـ ٤١) لنحصل على $صَ_٢$، ونستعمل قاعدة سمبسون (٨ ـ ٣٣) لتصحيح قيمة $ص_٢$ التي سبق التنبؤ عنها. ثم نكرر العملية للتنبؤ عن $ص_٣$ ، $صَ_٣$ ، وتصحيحهما، باستعمال القيم المعروفة $ص_١$ ، $صَ_١$ ، $ص_٢$ ، $صَ_٢$.

نستعمل $$ص_{ن+٢} - ص_{ن+١} = \frac{هـ}{٢} [- صَ_ن + ٣ صَ_{ن+١}] \quad \ldots \quad (٨ - ٤٢)$$

للتنبؤ عن $ص_{ن+٢}$ ،

ثم (٨ ـ ٤١) للحصول على $صَ_{ن+٢}$

ثم

$$ص_{ن+٢} - ص_{ن} = \frac{هـ}{٣}[صَ_{ن} + ٤\ صَ_{ن+١} + صَ_{ن+٢}] \quad .... \quad (٨ - ٤٣)$$

لتصحيح قيمة $ص_{ن+٢}$.

ثم (٨ ـ ٤١) ثانية للحصول على $صَ_{ن+٢}$.

المثال ٨ ـ ٤ ـ ١ إفرض أن $د ص / د س = ص + س^{٢}$ ، ص (٠) = ١ ، وافرض اننا نريد ان نجد ص (١)، باتخاذ هـ = ٠,٢ ، واستعمال قاعدتي التنبؤ والتصحيح (٨ ـ ٤٢) و (٨ ـ ٤٣).

فإذن $ص_{٠} = ١$ ، ولأيجاد $ص_{١}$ نستعمل طريقة اويلر المحسنة مرات متكررة:

$س_{٠}$	$ص_{٠}$	$صَ_{٠}$	$\overline{ص_{١}}$	$\overline{صَ_{١}}$	$ص_{١}$
٠,٠	١,٠	١,٠	١,٢٠	١,٢٤	١,٢٢
			١,٢٢	١,٢٦	١,٢٣
			١,٢٣	١,٢٧	١,٢٣

فالمدخلة الأولى في عمود $\overline{ص_{١}}$ تأتي من قاعدة أويلر:

$$ص_{١} = ص_{٠} + هـ\ صَ_{٠}$$

والعمود $\overline{صَ_{١}}$ يأتي من المعادلة التفاضلية

$$\overline{صَ_{١}} = ق\ (س_{١} ،\ \overline{ص_{١}}) = \overline{ص_{١}} + س_{١}^{٢}$$

والعمود الأخير يأتي من قاعدة أويلر المحسنة

$$ص_{١} = ص_{٠} + \frac{هـ}{٢}(صَ_{٠} + \overline{صَ_{١}}) ،$$

فقيمة $ص_{١}$ المصححة تنقل الى عمود $\overline{ص_{١}}$. وتتكرر العملية.

ونلاحظ أن العملية تستقر على $ص_١ = ١,٢٣$ ، $صَ_١ = ١,٢٧$ (اذا كان نريد دقة لمنزلتين عشريتين) .

والآن نطبق (٨ ـ ٤٢) و (٨ ـ ٤٣) :

ن (التنبؤ) : $ص_٢ = ص_١ + \frac{هـ}{٢}(-صَ_. + ٣ صَ_١) = ١,٢٣ +$

$(٠,١) (-١,٠) (-١,٠ + ٣,٨١) = ١,٥١$

$صَ_٢ = ق(س_٢ ، ص_٢) = ص_٢ + س_٢^٢ = ١,٦٧$

صح (التصحيح) : $ص_٢ = ص_. + \frac{هـ}{٣}(صَ_. + ٤ صَ_١ + صَ_٢)$

$= ١,٠ + (\frac{٠,٢}{٣})(١,٠ + ٥,٠٨ + ١,٦٧) = ١,٥٢$

$صَ_٢ = ص_٢ + س_٢^٢ = ١,٦٨$

ن : $ص_٣ = ص_٢ + \frac{هـ}{٢}(-صَ_١ + ٣ صَ_٢) = ١,٥٢ + (٠,١) (-١,٢٧ +$

$٥,٠٤) = ١,٩٠$

$صَ_٣ = ص_٣ + س_٣^٢ = ٢,٢٦$

صح : $ص_٣ = ص_١ + \frac{هـ}{٣}(صَ_١ + ٤ صَ_٢ + صَ_٣)$

$= ١,٢٣ + (\frac{٠,٢}{٣})(١,٢٧ + ٦,٧٢ + ٢,٢٦) = ١,٩١$

$صَ_٣ = ص_٣ + س_٣^٢ = ٢,٢٧$

ن : $ص_٤ = ص_٣ + \frac{هـ}{٢}(-صَ_٢ + ٣ صَ_٣) = ٢,٤٢$

$ص'_٤ = ٣,٠٦$

$$صح: ص_٤ = ص_٢ + \frac{هـ}{٣}(ص'_٢ + ٤ ص'_٣ + ص'_٤) = ٢,٤٤$$

$ص'_٤ = ٣,٠٨$

$$ن: ص_٥ = ص_٤ + \frac{هـ}{٢}(- ص'_٣ + ٣ ص'_٤) = ٣,١٤$$

$ص'_٥ = ٤,١٤$

$$صح: ص_٥ = ص_٣ + \frac{هـ}{٣}(ص'_٣ + ٤ ص'_٤ + ص'_٥) = ٣,١٦$$

والنتيجـة أحسن قليـلاً من الجـواب الـذي نتج عن طريقة اويلر المحسنة (ولكن بزيادة كبيرة من العمليات).

وهنـاك طريقـة دقيقـة جداً للتنبؤ والتصحيـح، تنسب الى ميلن (Milne) وتستعمل للتنبؤ قاعدة تربيع ذات اربع نقط، وللتصحيح قاعدة سمبسون:

$$ن: ص_{ن+٤} - ص_ن = \frac{٤ هـ}{٣}[٢ ص'_{ن+١} - ص'_{ن+٢} + ٢ ص'_{ن+٣}] \quad (٨ - ٤٤)$$

$$صح: ص_{ن+٤} - ص_{ن+٢} = \frac{هـ}{٣}[ص'_{ن+٢} + ٤ ص'_{ن+٣} + ص'_{ن+٤}]$$

فلاستعمال هذه يلزم ان يتوافر لدينا قيم دقيقة للدوال $ص_٠$ ، $ص'_٠$ ، $ص_١$ ، $ص'_١$، $ص_٢$ ، $ص'_٢$ ، $ص_٣$ ، $ص'_٣$.

لطـرق التنبؤ والتصحيـح حسنـات وسيئـات، من حيث الـدقـة وحجم العمل الـلازم. وواضـح ان التصحيـح يجعل كل خطوة، ومن ثم الجواب النهائي، أدق. مع

المحافظة على طول الخطوة. الا ان كثرة الحسابيات يمكن ان تكون مكلفة (بسبب تكاليف الكمبيوتر) وهي تؤدي الى زيادة خطأ التدوير.

التمارين ٨ ـ ٤

١ . استخرج قاعدة شبه المنحرف (٨ ـ ٣٢) باستعمال قانوني التربيع بثلاث نقط: (٨ ـ ٣٥) و (٨ ـ ٣٨).

٢ . استخرج قوانين التربيع التالية ذات النقط الثلاث:

أ) $\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٠} = \frac{\text{هـ}}{١٢}(٥\,\text{صَ}_{٠} + ٨\,\text{صَ}_{١} - \text{صَ}_{٢})$

ب) $\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{٠} = \frac{\text{هـ}}{٨}(\text{صَ}_{٠} + ١٤\,\text{صَ}_{١} + \text{صَ}_{٢})$

حـ) $\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{٠} = \frac{\text{هـ}}{٤}(\text{صَ}_{٠} + ٦\,\text{صَ}_{١} + \text{صَ}_{٢})$

٣ . استخرج قانون التربيع التالي ذا النقط الثلاث:

$$\text{ص}_{٣} - \text{ص}_{٠} = \frac{\text{هـ}}{٢}[-\,\text{صَ}_{٠} + ٥\,\text{صَ}_{١} + ٢\,\text{صَ}_{٢}]$$

٤ . استعمل القانون الذي استخرجته في التمرين (٣) مع قاعدة سمبسون، للتنبؤ والتصحيح، في حل مسألة القيمة الابتدائية:

$\text{صَ} = \text{س} + \text{ص}$ ، $\text{ص}(٠) = ١$ ، لأيجاد $\text{ص}(١)$، متخذاً $\text{هـ} = ٠,٢$

استعمل طريقة أويلر المحسنة لأيجاد $\text{ص}_{١}$ ، $\text{ص}_{٢}$

٥ . اذا كان $\text{ص}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$ ، فبين ان قاعدة شبه المنحرف (٨ ـ ٣٢) تعطي القيمة المضبوطة للتكامل

$\int$ ص (س) د س ، مع هـ = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٥}$

٦ . اذا كان ص (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + حـ، فبين ان قاعدة سمبسون (٨ ـ ٣٣) تعطي القيمة المضبوطة للتكامل

$\int$ ص (س) د س ، مع هـ = $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$

٧ . بين ان المعادلة التي تطابق (٨ ـ ٣٨) لقواعد التربيع بأربع نقط هي :

$ل_{٠} + ل_{١} + ل_{٢} + ل_{٣} = ر$

$٢ ل_{١} + ٤ ل_{٢} + ٦ ل_{٣} = ر^{٢}$

$٣ ل_{١} + ١٢ ل_{٢} + ٢٧ ل_{٣} = ر^{٣}$

استعمل هذه المعادلات لاستنتاج معادلة ميلن (٨ ـ ٤٤) .

٨ . استخرج نظائر لمعادلات التمرين (٧) تكون منظومة قاصرة التعيين لقواعد تربيع بخمس نقط .

٩ . استعمل معادلة ميلن (٨ ـ ٤٤) لحل معادلة التمرين (٤) متخذاً هـ = ٠,٢ .

---

٨ ـ ٥ انتشار الخطأ المدور.

مثال على مخادعة الاعداد

سنبين في هذا البند كيف ان طريقة بالغة الدقة نظرياً قد تؤدي الى نتائج لا فائدة فيها . نصف الطريقة بأنها عديدة الخطوات اذا كانت (كقواعد التنبؤ والتصحيح) في أكثر من خطوة. واليك الخطوات في المعادلة التالية :

$ص_{ن+١} = ص_{ن-١} + ٢$ هـ ق $(س_{ن}$ ، $ص_{ن})$ . . . . (٨ ـ ٤٥)

هنا يلزم ان نستعمل كلا الخطوتين ن ، ن−١ للحصول على ن+١ . ويمكن ان

نبين* ان تقدير الخطأ في هذه الطريقة هو

$$| خـ_ن | = | ص_ن - ص (س_ن) | \leqslant ك هـ^٢$$

ولأن الخطأ في طريقة أويلر هو | خـ$_ن$ | $\leqslant$ ك هـ، نتوقع نظرياً من المعادلة المذكورة (٨ ـ ٤٥) دقة أكبر من طريقة أويلر. ولكن هذا ليس دائماً هو الواقع.

المثال ٨ ـ ٥ ـ ١ : هذه مسألة ذات قيمة إبتدائية

$$صَ = -ص + ٢ ، ص (٠) = ١$$

ويسهل إيجاد حل هذه المسألة:

$$ص (س) = ٢ - e^{-س}$$

فلنجد ص (٥) بطريقة أويلر، وطريقة (٨ ـ ٤٥):

فلاستعمال المعادلة (٨ ـ ٤٥) نحتاج الى قيمتين ابتدائيتين: ص$_٠$ ، ص$_١$. وبما اننا نعرف الحل، فلنأخذ القيمة المضبوطة ص$_١$ = ص (س$_١$) = ٢ - $e^{-س_١}$.

والجدول (٨ ـ ٤) يبين الحسابيات مع هـ = ٠,٢٥ . فالعمود الثاني هو القيم الصحيحة للدالة ص (س$_ن$) لأربع منازل. والعمود الثالث يعطي تقدير أويلر، في حين يعطي العمود الرابع تقدير الطريقة (٨ ـ ٤٥) ذات الخطوتين. ويعطي العمود الخامس خطأ أويلر، وهو

$$خـ_ن^{(أويلر)} = ص_ن^{(اويلر)} - ص (س_ن)$$

ويعطي العمود السادس خطأ طريقة (٨ ـ ٤٥) ذات الخطوتين

$$خـ_ن^{(٢ط)} = ص_ن^{(٢ط)} - ص (س_ن)$$

فواضح ان طريقة الخطوتين (٨ ـ ٤٥) يكون الخطأ فيها أقل مع قيم س$_ن$ الصغيرة. ولكن اذا كبر س$_ن$ يقل الخطأ في طريقة أويلر، اما طريقة الخطوتين فلا يزيد

* أنظر S.D. Conte, Elements of Numerical Analysis Mc Graw - Hill, 1965, sec. 6. b

الخطأ فيهـا فقـط ولكن اشـارته تتراوح زيادة ونقصاناً. وتسمى هذه الظاهرة بمخادعة الأعداد numerical instability وسنرى ان سببها انتشار أخطاء التدوير.

ولنوضح الآن ما الذي يؤدي الى هذا الاضطراب:

في المثال: ق (س ن ، ص ن) = - ص ن + ٢ ، تكون المعادلة (٨ ـ ٤٥):

الجدول ٨ ـ ٤

س ن	ص (س ن) = ٢ - $e^{-\text{س ن}}$	ص$_{\text{ن}}^{(\text{اويلر})}$ = ص$_{\text{ن-١}}^{(\text{اويلر})}$ + هـ (٢ - ص$_{\text{ن-١}}^{(\text{اويلر})}$)	ص$_{\text{ن}}^{(\text{٢ط})}$ = ص$_{\text{ن-٢}}^{(\text{٢ط})}$ + ٢هـ (٢ - ص$_{\text{ن-١}}^{(\text{٢ط})}$)	خـ$_{\text{ن}}^{(\text{اويلر})}$	خـ$_{\text{ن}}^{(\text{٢ط})}$
٠,٠٠	١,٠٠٠٠	١,٠٠٠	١,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠
٠,٢٥	١,٢٢١٢	١,٢٥٠٠	١,٢٢١٢	٠,٠٢٨٨	٠,٠٠٠٠
٠,٥٠	١,٣٩٣٥	١,٤٣٧٥	١,٣٨٩٤	٠,٠٤٤٠	,٠٠٤١ -
٠,٧٥	١,٥٢٧٦	١,٥٧٨١	١,٥٢٦٥	٠,٠٥٠٥	,٠٠١١ -
١,٠٠	١,٦٣٢١	١,٦٨٣٦	١,٦٢٦٢	٠,٠٥١٥	,٠٠٥٩ -
١,٢٥	١,٧١٣٥	١,٧٦٢٧	١,٧١٣٤	٠,٠٤٩٢	,٠٠٠١ -
١,٥٠	١,٧٧٦٩	١,٨٢٢٠	١,٧٦٩٥	٠,٠٤٥٣	,٠٠٧٤ -
١,٧٥	١,٨٢٦٢	١,٨٦٦٥	١,٨٢٨٧	٠,٠٤٠٣	,٠٠٢٥ +
٢,٠٠	١,٨٦٤٧	١,٨٩٩٩	١,٨٥٥٢	٠,٠٣٥٢	,٠٠٩٥ -
٢,٢٥	١,٨٩٤٦	١,٩٢٤٩	١,٩٠١١	٠,٠٣٠٣	,٠٠٦٥ +
٢,٥٠	١,٩١٧٩	١,٩٤٣٧	١,٩٠٤٧	٠,٠٢٥٨	,٠١٣٢ -
٢,٧٥	١,٩٣٦١	١,٩٥٧٨	١,٩٤٨٨	٠,٠٢١٧	,٠١٢٧ +
٣,٠٠	١,٩٥٠٢	١,٩٦٨٤	١,٩٣٠٣	٠,٠١٨٢	,٠١٩٩ -
٣,٢٥	١,٩٦١٢	١,٩٧٦٣	١,٩٨٣٧	٠,٠١٥١	,٠٢٢٥ +
٣,٥٠	١,٩٦٩٨	١,٩٨٢٢	١,٩٣٨٥	٠,٠١٢٤	,٠٣١٣ -
٣,٧٥	١,٩٧٦٥	١,٩٨٦٧	٢,٠١٤٥	٠,٠١٠٢	,٠٣٨٠ +
٤,٠٠	١,٩٨١٧	١,٩٩٠٠	١,٩٣١٣	٠,٠٠٨٣	,٠٥٠٤ -
٤,٢٥	١,٩٨٥٧	١,٩٩٢٥	٢,٠٤٨٩	٠,٠٠٦٨	,٠٦٣٢ +
٤,٥٠	١,٩٨٨٩	١,٩٩٤٤	١,٩٠٦٩	٠,٠٠٥٥	,٠٨٢٠ -
٤,٧٥	١,٩٩١٣	١,٩٩٥٨	٢,٠٩٥٥	٠,٠٠٤٥	,١٠٤٢ +
٥,٠٠	١,٩٩٣٣	١,٩٩٦٩	١,٩٨٥٢	٠,٠٠٣٦	,٠٩٨١ -

$$ص_{ن+١} = ص_{ن-١} + ٢هـ\,(٢ - ص_{ن})$$

أي أن

$$ص_{ن+١} + ٢\,هـ\,ص_{ن} - ص_{ن-١} = ٤هـ \text{ ، } ص_{٠} = ١ \quad \ldots\ldots \quad (٨ - ٤٦)$$

فالمعادلة (٨ ـ ٤٦) معادلة فرق، ذات معاملات ثابتة، خطية، لا متجانسة، من الرتبة الثانية، فيمكن ان تحل بطرق البند (٤ ـ ٦)، والحل العام هو

$$ص_{ن} = حـ_{١}\,\lambda_{١}^{ن} + حـ_{٢}\,\lambda_{٢}^{ن} + ٢ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٤٧)$$

حيث $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ هما جذرا المعادلة المساعدة $\lambda^{٢} + ٢\,هـ\,\lambda - ١ = ٠$

فيكون

$$\lambda_{١} = \frac{-٢هـ + \sqrt{٤\,هـ^{٢} + ٤}}{٢} = -هـ + \sqrt{١ + هـ^{٢}}$$

$$\text{، } \lambda_{٢} = -هـ - \sqrt{١ + هـ^{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٤٨)$$

فحسب نظرية ذات الحدين (انظر التمرين ٢٥ في البند ٥ ـ ١)، يكون:

$$(١ + هـ^{٢})^{١/٢} = ١ + \frac{١}{٢}\,هـ^{٢} - \frac{١}{٨}\,هـ^{٤} + \frac{١}{١٦}\,هـ^{٦} - \ldots$$

حيث الحدود المحذوفة هي قوى هـ العليا. فبالامكان ان تكتب الجذرين (٨ ـ ٤٨) للمعادلة المساعدة بالشكل:

$$\lambda_{٢} = -١ - هـ - \propto(هـ) \text{، } \lambda_{٢} = -١ - هـ \propto (هـ) \quad \ldots\ldots \quad (٨ - ٤٩)$$

حيث $\propto(هـ) = \frac{هـ^{٢}}{٢} - \frac{هـ^{٤}}{٦} + \frac{هـ^{٦}}{١٦} - \ldots$

نعوض (٨ ـ ٤٩) في (٨ ـ ٤٧) فيكون:

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \text{حـ}\,[\,١ - \text{هـ} + \propto(\text{هـ})]^{\text{ن}} + \text{حـ}_{٢}\,(-١)^{\text{ن}}\,[\,١ + \text{هـ} + \propto(\text{هـ})]^{\text{ن}} + ٢$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٥٠)$$

ونعرف من الحسبان ان

$$\underset{\text{هـ}\leftarrow\infty}{\text{نها}} \left(١ + \frac{١}{\text{هـ}}\right)^{\text{هـ}} = \underset{\text{ى}\leftarrow٠}{\text{نها}} \,(١ + \text{ى})^{١/\text{ى}} = e$$

فلأن

$$\text{س}_{\text{ن}} = ٠ + \text{ن هـ} = \text{ن هـ} \text{ ،}$$

يكــون

$$\underset{\text{هـ}\leftarrow٠}{\text{نها}} (١ - \text{هـ})^{\text{ن}} = \underset{\text{هـ}\leftarrow٠}{\text{نها}} (١ - \text{هـ})^{\text{س}_{\text{ن}}/\text{هـ}} = e^{-\text{س}_{\text{ن}}} \text{ ، } \underset{\text{هـ}\leftarrow٠}{\text{نها}} (١ + \text{هـ})^{\text{ن}} = e^{\text{س}_{\text{ن}}}$$

فاذن عند هـ ← ٠ يمكن ان نهمل القوى العالية من ∝ (هـ) في (٨ ـ ٥٠) فينتج :

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \text{حـ}_{١}\, e^{-\text{س}_{\text{ن}}} + ٢ + \text{حـ}_{٢}\,(-١)^{\text{ن}}\, e^{\text{س}_{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨ - ٥١)$$

وهنا تكمن المشكلة . فالحل المضبوط للمسألة يقتضي ان يكون $\text{حـ}_{١} = -١$ ، $\text{حـ}_{٢} = ٠$ ولكن أي تدوير للخطأ مهما يكن بسيطاً قد يجعل $\text{حـ}_{٢}$ غير الصفر، وهذا الخطأ يتزايد أسياً في حين ان الحل الحقيقي يقارب ٢ الثابت . وهذه هي الظاهرة التي تبين في الجدول (٨ ـ ٤). لاحظ أيضاً ان $(-١)^{\text{ن}}$ في (٨ ـ ٥١) تجعل الأخطاء تتراوح، كما تقدم .

وقد نشأت المشكلة لأننا قربنا معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى الى معادلة فروق من الرتبة الثانية . ان هذه التقريبات لا تفضي دائماً الى مثل هذا الاضطراب . ولكن الاحتمال قائم ولا يجوز إغفاله . وبوجه عام : عند تحليل جودة اي طريقة يجب الا نكتفي بتقدير خطأ الفصل، بل ان نبين ان الطريقة مستقرة لا تضطرب في المسألة

المعطاة.

---

٨ ـ ٦ منظومات المعادلات

الطرق التي رأيناها في البنود ٨ ـ ١ و ٨ ـ ٣ و ٨ ـ ٤ يمكن بسهولة توسيعها حتى تسري على معادلات من رتب أعلى وعلى منظومات من المعادلات.

طرق أويلر: ففي طريقة اويلر، والطريقة المحسنة، كل ما يلزم هو تغيير في مفاهيم القانونين:

$$ص_{ن+١} = ص_{ن} + هـ ق (س_{ن} ، ص_{ن}) \qquad \text{(٨ ـ ٥٢)}$$

$$، ص_{ن+١} = ص_{ن} + \frac{هـ}{٢}[ق (س_{ن} ، ص_{ن}) + ق (س_{ن+١} ، ص_{ن+١})] \qquad \text{(٨ ـ ٥٣)}$$

باعتبار $ص_{ن}$ كمية متجهة فيها من المدخلات بقدر الدوالّ. ففي هذه الحالة يحتوي الاقتران ق على متجه من الدوال. ويحسن ان نشرح ذلك بالأمثلة

المثال ٨ ـ ٦ ـ ١ : خذ مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$\frac{د س}{د مـ} = - ٣س + ٤ص ، س (٠) = ١ \qquad \text{(٨ ـ ٥٤)}$$

$$\frac{د ص}{د مـ} = - ٢س + ٣ص ، ص (٠) = ٢$$

ولنفرض اننا نريد قيمتي س (١) ، ص (١).

في هذا المثال، مـ هو المتغير المستقل في حين أن س ، ص دالتان.

فاذا أردنا استعمال طريقة أويلر، فالقاعدة (٨ ـ ٥٢) تترجم الى المعادلتين :

$$س_{ن+١} = س_ن + هـ سَ_ن = س_ن + هـ (-٣ س_ن + ٤ ص_ن)$$

. . . . (٨ ـ ٥٥)

$$ص_{ن+١} = ص_ن + هـ صَ_ن = ص_ن + هـ (-٢ س_ن + ٣ ص_ن)$$

والقيم الابتدائية هي : $س_٠ = ١$ ، $ص_٠ = ٢$ ، مع $هـ = ٠,٢$ ، والاجراء انما هوكما سبق، (انظر الجدول ٨ ـ ٥) :

الجدول ٨ ـ ٥

$مـ_ن$	$س_ن$	$ص_ن$	$سَ_ن$	$صَ_ن$	$س_{ن+١} = س_ن + هـ سَ_ن$	$ص_{ن+١} = ص_ن + هـ صَ_ن$
٠,٠	١,٠٠	٢,٠٠	٥,٠٠	٤,٠٠	٢,٠٠	٢,٨٠
٠,٢	٢,٠٠	٢,٨٠	٥,٢٠	٤,٤٠	٣,٠٤	٣,٦٨
٠,٤	٣,٠٤	٣,٦٨	٥,٦٠	٤,٩٦	٤,١٦	٤,٦٧
٠,٦	٤,١٦	٤,٦٧	٦,٢٠	٥,٦٩	٥,٤٠	٥,٨١
٠,٨	٥,٤٠	٥,٨١	٧,٠٤	٦,٦٣	٦,٨١	٧,١٤
١,٠	٦,٨١	٧,١٤				

وحل (٨ ـ ٥٤) هو $س (مـ) = ٣ e^{مـ} - ٢ e^{-مـ}$ ، $ص (مـ) = ٣ e^{مـ} - e^{-مـ}$

فيكون

$س (١) = ٣ e - ٢ e^{-١} \approx ٧,٤١٩$ ، $ص (١) = ٣ e - e^{-١} \approx ٧,٧٨٧$

وهذا يعني ان الطريقة فيها خطأ حوالي عشرة في المئة. ويمكن تحسين الدقة باتخاذ قيم

اجوبة التمارين الفردية

ثم أكتب المسألتين (م٥ ـ ١٨) و(م٥ ـ ١٩) على صورة تكاملين (م٥ ـ ٢)، واطرح واحداً من الآخر لتحصل على النتيجة:

$$|\text{س}_{١}(\text{ن}) - \text{س}_{٠}(\text{ن})| \leqslant |\text{س}_{١} - \text{س}_{٠}| + \int_{\text{ن}_{٠}}^{\text{ن}} |\text{ق}(\text{ز}،\ \text{س}_{١}(\text{ز})) - \text{ق}(\text{ز}،\ \text{س}_{٠}(\text{ز}))|\ \text{د}\text{ز}$$

ثم استخدم شرط ليبتشيز لتبين ان:

$$|\text{س}_{١}(\text{ن}) - \text{س}_{٠}(\text{ن})| \leqslant |\text{س}_{١} - \text{س}_{٠}| + \text{ك} \int_{\text{ن}_{٠}}^{\text{ن}} |\text{س}_{١}(\text{ز}) - \text{س}_{٠}(\text{ز})|\ \text{د}\text{ز}$$

وأخيراً استخدم متباينة غرونوول (م٥ ـ ٤) لتبين ان:

$$|\text{س}_{١}(\text{ن}) - \text{س}_{٠}(\text{ن})| \leqslant |\text{س}_{١} - \text{س}_{٠}|\ e^{\text{ك}|\text{ن} - \text{ن}_{٠}|} \leqslant |\text{س}_{١} - \text{س}_{٠}|\ e^{\text{ك}\,\delta}$$

، لكل $|\text{ن} - \text{ن}_{٠}| \leqslant \delta$

ومن ذلك نستنتج النتيجة المطلوبة مباشرة.

١٧ . انظر في المسألة الخطية التالية، ذات الرتبة الأولى :

سَ (ن) = أ (ن) س + ب (ن)، س (ن٠) = س٠ . . . . (م٥ - ١٧)

حيث أ (ن) ، ب (ن) متصلان في الفترة أ ≥ ن٠ ≥ ب .

أ) باستعمال ق (ن ، س) = أ (ن) س + ب (ن) بين ان متواترات بيكار {سء (ن)} موجودة ومتصلة مع جميع قيم ن في الفترة أ ≥ ن ≥ ب.

ب) بين ان ق (ن ، س) المعرف في القسم (أ) متصل لايبتشيزياً في س على د، مجال جميع النقط (ن ، س) التي تحقق الشروط أ ≥ ن ≥ ب، | س | > ∞ .

جـ)* عدل في برهان النظريتين (م٥ - ٣) و(م٥ - ٥) كي تبين ان (م٥ - ١٧) لها حل وحيد على جميع الفترة [أ ، ب].

د) بيّن أنه اذا كان أ (ن) ، ب (ن) متصلين مع جميع قيم ن، كانت (م٥ - ١٧) لها حل وحيد معرف على جميع القيم - ∞ > ن > ∞ .

(هذه نظرية موجودية وحدانية شمولية).

١٨ . خذ مسألة القيمة الابتدائية :

سَ = ق (ن ، س)، س (ن٠) = س٠ . . . . (م٥ - ١٨)

بين انه اذا كان ق (ن ، س) يحقق شروط النظرية (م٥ - ٣) كان الحل س (ن) ≡ س (ن٠ ، س٠) يعتمد باستمرار على قيمة س٠ . ولذا فتغير بسيط في س٠ يؤدي الى تغيير بسيط في الحل على الفترة | ن - ن٠ | ≥ δ . تسمى هذه النتيجة الاعتماد المتصل على الشروط الأولية.

[إرشاد: عرِّف س٠ (ن) بانه الحل الوحيد للمعادلة (م٥ - ١٨)، س١ (ن) بأنه الحل الوحيد للمعادلة :

سَ = ق (ن ، س)، س (ن٠) = س١ . . . . (م٥ - ١٩)

١٥ . افرض ان ع (ن) اقتران موجب يحقق المتباينة

ع (ن) ≤ أ + $\int_{ن_0}^{ن}$ ر (ز) ع (ز) د ز .... (م٥ ـ ١٤)

حيث أ ≥ ٠ ، ر (ن) اقتران متصل موجب، ن ≥ ن٠ .

أثبت أن ع (ن) ≤ أ سا [$\int_{ن_0}^{ن}$ ر (ز) د ز] .... (م٥ ـ ١٥)

لكل ن ≥ ن٠ . ما نوع النتيجة التي تصح مع ن ≤ ن٠ ؟

هذه صورة أعم من متباينة غرونوول.

[إرشاد: إجعل ص (ن) = $\int_{ن_0}^{ن}$ ر (ز) ع (ز) د ز، وبيِّن أن صَ (ن) = ر (ن) ع (ن) ≤ ر (ن) [أ + ص (ن)]. أكمل البرهان بمتابعة خطوات برهان النظرية (م٥ ـ ٤)، مستعملاً عامل التكامل سا [− $\int_{ن_0}^{ن}$ ر (ز) د ز] .]

١٦ . خذ مسألة القيم الابتدائية:

سً = ق (ن ، س) ، س (٠) = س٠ ، سَ (٠) = س١ .... (م٥ ـ ١٦)

حيث أن ق معرف في المستطيل |ن| ≤ أ، |س − س٠| ≤ ب. برهن مستخدماً الفروض اللازمة، انه اذا وجد حل للمسألة فهو حل وحيد.

[إرشاد: ليكن س (ن)، ص (ن) حلين متصلين للمسألة (م٥ ـ ١٦). بين بالتفاضل أن:

س (ن) = س٠ + س١ ن − $\int_{0}^{ن}$ (ن − ز) ق (ز ، س (ز)) د ز

ص (ن) = س٠ + س١ ن − $\int_{0}^{ن}$ (ن − ز) ق (ز ، ص (ز)) د ز

على فترة ما: |ن| ≤ δ ، δ > ٠ .

ثم اطرح هاتين العبارتين، استعمل شرط لايبتشز المناسب واستخدم متباينة غرونوول كما في التمرين ١٥].

٦. $سَ = \sqrt{س(س-١)}$، س (١) = ٢

٧. سَ = لي جا س، س (π/٢) = ١

٨. $سَ = \sqrt{س(س-١)}$، س (٢) = ٣

٩. سَ = |س| ، س (٠) = ١

١٠. سَ = ن س ، س (٥) = ١٠

١١. احسب ثابتاً لايبتشيزياً لكل من الاقترانات التالية، في المجال **د** المعطى:

أ) ق (ن ، س) = ن $e^{-٢س/ن}$ ، ن > ٠ ، س > ٠

ب) ق (ن ، س) = جا ن س، |ن| ≥ ١ ، |س| ≥ ٢

جـ) ق (ن ، س) = $e^{-ن^٢}$ س^٢ جا $\frac{١٠}{س}$ ، كل ن، -١ ≥ س ≥ ١، س ≠ ٠

يبين هذا التمرين ان ثابتاً لايبتشيزياً قد يوجد حتى وان يكن $\frac{\partial ق}{\partial س}$ غير محصور في **د**.

د) ق (ن ، س) = (ن^٢ س^٣)$^{٢/٣}$، |ن| ≥ ٢ ، |س| ≥ ٣.

١٢. خذ مسألة القيمة الابتدائية التالية: سَ = س^٢، س (١) = ٣ : بيِّن ان متتابعات بيكار تتقارب الى حل وحيد لهذه المسألة.

١٣. أنشىء المتتالية { س$_ء$ (ن) } لمتتابعات بيكار في مسألة القيمة الابتدائية سَ = -س، س (٠) = ٣، وبيِّن أنها تقارب الحل الوحيد س (ن) = ٣ $e^{-ن}$.

١٤. أثبت متباينة غرونوول (النظرية م٥ ـ ٤) للفترة ن$_٠$ - δ ≥ ن ≥ ن$_٠$.

[إرشاد: عند ن ≥ ن$_٠$ ، ص (ن) ≥ ٠]

المثال م٥ ـ ٥: خذ مسألة القيمة الابتدائية سَ = $\sqrt{س}$ ، س (٠) = ٠

فكما رأينا في المثال (م٥ ـ ١). ان ق (ن ، س) = $\sqrt{س}$ لا يحقق شرط لايبتشيز في أي مجال يشتمل على النقطة (٠ ، ٠). ولكن يسهل ان نصل، بفصل المتغيرين، الى الحل س (ن) = $(\frac{١}{٢})^{٢}$ الا ان ص (ن) = ٠ هو أيضاً حل. فاذن بدون شرط لايبتشيز قد لا يكون حل مسألة القيمة الابتدائية (اذا وجد) حلاً وحيداً.

والمثالان الأخيران يبينان الطبيعة المحلية لنظرية الموجودية والوحدانية. وفي التمرين ١٧ سنبين كيف ان وجود حل وحيد لكل قيم ن الحقيقية يمكن اثباته في حالة صنف معين من المعادلات التفاضلية. فهذه موجودية وحدانية شمولية.

التمارين م٥

في كل مسألة قيمة ابتدائية في التمارين ١ الى ١٠ بيِّن أين يكون الحل الوحيد مضموناً. فاذا كان كذلك فافرض أن أ = ب = ١، اذا امكن. وأوجد العدد δ حسب المعادلة (م٥ ـ ٧). ثم حل المعادلة، حيث يمكن ذلك، فأوجد قيمة أحسن للثابت δ، كما في المثال (م٥ ـ ٤):

١. سَ = س^{٣} ، س (٢) = ٥

٢. سَ = س^{٣} ، س (١) = ٢

٣. سَ = $\frac{س}{ن - س}$ ، س (٠) = ١

٤. سَ = س$^{١/٣}$ ، س (١) = ٠

٥. سَ = جا س ، س (١) = π/٢

البرهان: تنتج هذه النظرية مباشرة من النظرية (م٥ ـ ٢) ونظريتي الموجودية والوحدانية

ونشير الى ان النظريات م٥ ـ ٣ ، م٥ ـ ٥ ، م٥ ـ ٦ محلّية، ونعني بذلك ان الحلول الوحيدة يُضمن وجودها فقط قرب نقطة الابتداء (ن. ، س.).

المثال م٥ ـ ٤ : خذ سَ (ن) = س^{٢} (ن) ، س (١) = ٢

دون حل هذه المعادلة، يمكن ان نبين ان لها حلاً وحيداً في فترة ما | ن − ن. | = | ن − ١ | $\leqslant \delta$:

ليكن أ = ب = ١ . فيكون

| ق (ن ، س) | = س^{٢} $\leqslant$ ٩ (= م) لكل | س − س. | $\leqslant$ ١،

س. = س (١) = ٢ ؛ فان δ = أدنى { أ ، ب/م } = $\frac{١}{٩}$

فالنظرية (م٥ ـ ٦) تضمن وجود حل وحيد في الفترة | ن − ١ | $\leqslant \frac{١}{٩}$

وحل مسألة القيمة الابتدائية هذه يمكن ايجاده بسهولة وذلك بفصل المتغيرين. فنجد انه س (ن) = ٢/(٣ − ٢ن)

ويكون هذا الحل موجوداً ما دام ن $\neq \frac{٣}{٢}$.

فاذا بدأنا من ن. = ١ نجد ان أعظم فترة لوجوده هي | ن − ن. | < $\frac{١}{٦}$، وعلى هذا فالقيمة δ = $\frac{١}{٩}$ ليست أحسن ما يمكن.

النظرية م٥ ـ ٥ : نظرية الوحدانية

لنأخذ بما فرضناه في نظرية الموجودية (م٥ ـ ٣). فيكون س (ن) = نها$_{ء \to \infty}$ س$_{ء}$ (ن) هو الحل الوحيد المتصل لمسألة القيمة الثابتة (م٥ ـ ١) في الفترة | ن − ن. | ≤ δ

البرهان: ليكن س (ن) و ص (ن) حلّين متصلين للمعادلة (م٥ ـ ٢) في الفترة | ن − ن. | ≤ δ ، وليكن (ن ، ص (ن)) في المجال د لكل ن في تلك الفترة*.

ولنعرِّف ع (ن) = | س (ن) − ص (ن) | فيكون ع (ن) ≥ ٠ ومتصلاً

فلأن ق (ن ، س) متصل لايبتشيزياً في س على د يكون

$$ع (ن) = \left| [س. + \int_{ن.}^{ن} ق (ز ، س (ز)) د ز] - [س. + \int_{ن.}^{ن} ق (ز ، ص (ز)) د ز] \right|$$

$$\leq ك \left| \int_{ن.}^{ن} | س (ز) - ص (ز) | د ز \right| = ك \left| \int_{ن.}^{ن} ع (ز) د ز \right|$$

$$\leq \epsilon + ك \left| \int_{ن.}^{ن} ع (ز) د ز \right| \quad لكل \ \epsilon > ٠$$

فحسب متباينة غرونوول يكون ع (ن) ≤ $\epsilon e^{ك | ن - ن. |}$

لكن ∈ > ٠ اعتباطي ، فيمكن ان يختار قريباً من الصفر بحيث يكون ع (ن) ≤ ٠

ولأن ع (ن) ≥ ٠، ينتج ان ع (ن) ≡ ٠، وهذا يعني ان س (ن) و ص (ن) متطابقان اي ان نهاية متتابعات بيكار هي الحل الوحيد المتصل.

النظرية م٥ ـ ٦ : اذا كان ق (ن ، س) و $\frac{\partial ق}{\partial س}$ (ن ، س) متصلين على د. يكون هنالك ثابت δ > ٠ حيث ان متتابعة بيكار { س$_{ء}$ (ن) } تقارب حلاً وحيداً متصلاً لمسألة القيمة الابتدائية (م٥ ـ ١) في الفترة | ن − ن. | ≤ δ

---

* لاحظ أنه بدون هذا الفرض قد يبلغ ان يصير الاقتران ق (ن ، ص (ن)) غير معرف عند نقاط يكون عندها (ن ، ص (ن)) خارج المجال د.

ليكن $\text{ص}(\text{ن}) = \text{ب} \int_{\text{ن}_0}^{\text{ن}} \text{س}(\text{ز})\, \text{د ز}$

فيكون

$$\dot{\text{ص}}(\text{ن}) - \text{ب ص}(\text{ن}) \leqslant \text{أ ب} \quad \text{.................} \quad (\text{م٥ - ١٣})$$

ونشير الى أن $\frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left[\text{ص}(\text{ن})\, e^{-\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)}\right] = e^{-\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)}\left[\dot{\text{ص}}(\text{ن}) - \text{ب ص}(\text{ن})\right]$

فبضرب طرفي (م٥ - ١٣) بعامل التكامل $e^{-\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)}$ (وهذا اكبر من صفر) ينتج ان

$$\frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left[\text{ص}(\text{ن})\, e^{-\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)}\right] \leqslant \text{أ ب}\, e^{-\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)}$$

فبمكاملة طرفي المتباينة من ن_0 الى ن ينتج:

$$\text{ص}(\text{ز})\, e^{-\text{ب}(\text{ز} - \text{ن}_0)}\Big|_{\text{ن}_0}^{\text{ن}} \leqslant \text{أ ب} \int_{\text{ن}_0}^{\text{ن}} e^{-\text{ب}(\text{ز} - \text{ن}_0)}\, \text{د ز} = -\text{أ}\, e^{-\text{ب}(\text{ز} - \text{ن}_0)}\Big|_{\text{ن}_0}^{\text{ن}}$$

ولكن $\text{ص}(\text{ن}_0) = ٠$، فيكون

$$\text{ص}(\text{ن})\, e^{-\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)} \leqslant \text{أ}\left(١ - e^{-\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)}\right)$$

ومن هذا ينتج بعد ضرب الطرفين في $e^{\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)}$ أن

$$\text{ص}(\text{ن}) \leqslant \text{أ}\left[e^{\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)} - ١\right]$$

فحسب (م٥ - ١١) يكون

$$\text{س}(\text{ن}) \leqslant \text{أ} + \text{ص}(\text{ن}) \leqslant \text{أ}\, e^{\text{ب}(\text{ن} - \text{ن}_0)}$$

وهو المطلوب.

٤ . يبقى أن نبين أن س (ن) حل للمعادلة (م٥ ـ ٢) في الفترة | ن - ن. | $< \delta$.

فلأن ق (ن ، س) اقتران متصل في س ، س ء (ن) ← س (ن) مع ن ← ∞ ،

نستنتج من المقولة (هـ) أن

نهاء←∞ ق (ن ، س ء (ن)) = ق (ن ، س (ن))

فحسب (م٥ ـ ٥) يكون س (ن) =

نهاء←∞ س ء+١ (ن) = س. + نهاء←∞ $\int_{ن.}^{ن}$ ق (ز ، س ء (ز)) د ز

= س. + $\int_{ن.}^{ن}$ نهاء←∞ ق (ز ، س ء (ز)) د ز = س. + $\int_{ن.}^{ن}$ ق (ز ، س (ز)) د ز

وتُبرَّر الخطوة التي بها بادلنا بين النهاية والتكامل حسب المقولة (ح).

فاذن س (ن) حل للمعادلة (م٥ ـ ٢)، فهو أيضاً حل لمسألة القيمة الابتدائية (م٥ ـ ١) والنتيجة ان الحل الذي تعطيه النظرية (م٥ ـ ٣) وحيد. ولكن قبل ان نبرهن على ذلك سنستخرج صورة بسيطة لنظرية عظيمة الفائدة تسمى متباينة غرونوول (Gronwall)

النظرية م٥ ـ ٤ : متباينة غرونوول:

إفرض ان س (ن) اقتران متصل غير سالب وأن:

س (ن) $\leqslant$ أ + ب | $\int_{ن.}^{ن}$ س (ز) د ز | .... (م٥ ـ ١١)

لكل قيم | ن - ن. | $\leqslant \delta$ ، حيث أ ، ب ثابتان موجبان فيكون

س (ن) $\leqslant$ أ e ب | ن - ن. | .... (م٥ ـ ١٢)

لكل قيم ن في الفترة | ن - ن. | $\leqslant \delta$

البرهان: سنبرهن ذلك على الفترة ن. $\leqslant$ ن $\leqslant$ ن. + δ . ومثل ذلك البرهان على الفترة ن. - δ $\leqslant$ ن $\leqslant$ ن. (أنظر التمرين ١٤).

فيكون

$$\sum_{د=1}^{\infty} \left| س_د(ن) - س_{د-1}(ن) \right| \leqslant \frac{م}{ك} \sum_{م=1}^{\infty} \frac{(ك\,\delta)^د}{د!}$$

$$= \frac{م}{ك} \left(e^{ك\,د} - 1 \right)$$

وذلك حسب المعادلة (٥ ـ ١٦)، لأن

$$e^{ك\,د} = \sum_{د=0}^{\infty} \frac{(ك\,\delta)^د}{د!} = 1 + \sum_{د=1}^{\infty} \frac{(ك\,\delta)^د}{د!}$$

وحسب إختبار فيرشتراس [المقولة ز] نستخلص ان المتسلسلة $\sum^{\infty}$ [س $_د$ (ن) - س $_{د-1}$ (ن)] تقارب اطلاقاً واتساقاً على $|$ ن - ن$_0$ $| \leqslant \delta$ اقتران نهاية وحيداً، ص (ن).

لكن ص (ن) = $\underset{ء \to \infty}{نها} \sum_{د=0}^{ء}$ [س $_د$ (ن) - س $_{د-1}$ (ن)] = $\underset{ء \to \infty}{نها}$ [س $_ء$ (ن) - س$_0$ (ن)]

$$= \underset{ء \to \infty}{نها} \; س_ء(ن) - س_0(ن)$$

ونـرمـز الى الطـرف الأيســر من هذه المعادلة بالرمز س (ن). وهكذا فان نهاية متتابعات بيكار س $_ء$ (ن) موجودة وان التقارب س $_ء$ (ن) ← س (ن) مطَّرد لكل ن في الفترة $|$ ن - ن$_0$ $| \leqslant \delta$.

$$|س_{د+1}(ن) - س_د(ن)| = |\int_{ن_.}^{ن} ق(ز، س_د(ز))دز - \int_{ن_.}^{ن} ق(ز، (س_{د-1}(ز))دز|$$

$$\leqslant \int_{ن_.}^{ن} |ق(ز، س_د(ز)) - ق(ز س_{د-1}(ز))| دز|$$

$$\leqslant ك| \int_{ن_.}^{ن} |س_د(ز) - س_{د-1}(ز)| دز|$$

$$\frac{م ك^د}{د!} | \int_{ن_.}^{ن} (ز - ن_.)^د دز| *$$

$$= \frac{م ك^د |ن - ن.|^{د+1}}{(د+1)!} \leqslant \frac{م ك^د \quad ^{د+1}}{(د+1)!}$$

وهذا ما اردنا إثباته.

٣. نبيِّن الآن ان $س_ء(ن)$ تقارب بانتظام اقتران نهاية س (ن) على الفترة |ن - ن.| $\leqslant$

δ . وحسب المقولة (د) يبيِّن هذا ان س (ن) متصل

نشير في البدء الى أن:

$$س_ء(ن) - س_.(ن) = س_ء(ن) - س_{ء-1}(ن) + س_{ء-1}(ن) + \ldots + س_1(ن)$$

$$- س_.(ن)$$

$$= \sum_{ك=.} [س_د(ن) - س_{د-1}(ن)] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (م٥ - ١٠)$$

ولكن حسب (م٥ - ٩):

$$|س_د(ن) - س_{د-1}(ن)| \leqslant \frac{م ك^{د-1} δ^د}{د!} = \frac{م}{ك} \frac{ك^د δ^د}{د!}$$

* تنتج هذه المتباينة من فرضنا بالاستقراء ان (م٥ - ٩) تصح عند ء = د

$$|س_ء(ن) - س_. | = | \int^{ن} ق(ز، س_{ء-١}(ز))/د ز|$$

$$\leqslant \int^{ن} |ق(ز، س_{ء-١}(ز))| د ز|$$

$$\leqslant م \int^{ن} |د ز| = م |ن - ن_.| \leqslant م \delta \leqslant ب$$

وتنتج هذّه المتباينات من المقولة (و). لاحظ ان المتباينة الأخيرة تمكن من اختيار δ في (م٥ - ٧).

٢ . ثم نبين بالاستقراء أن:

$$|س_ء(ن) - س_{ء-١}(ن)| \leqslant م ك^{ء-١} \frac{|ن - ن.|^{ء}}{ن!}$$

$$\leqslant \frac{م ك^{ء-١} \delta^{ء}}{ن!} \quad \text{.......................... (م٥ - ٩)}$$

فاذا كان ء = ١ يكون:

$$|س_١(ن) - س_.(ن)| \leqslant |\int^{ن} ق(ز، س_.(ز)) د ز| \leqslant م |\int^{ن} د ز|$$

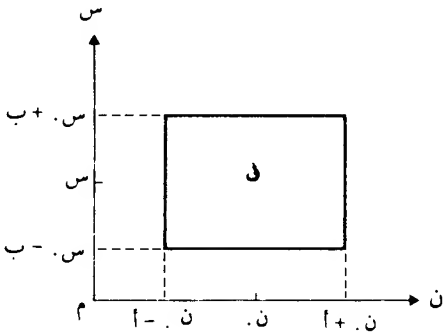
$$= م |ن - ن_.| \leqslant م \delta$$

فالنتيجة صحيحة مع ء = ١

فنفرض انها صحيحة مع ء = د ونثبت انها بذلك تصح مع ء = د + ١ . اي اننا نفرض أن:

$$|س_د(ن) - س_{د-١}(ن)| \leqslant \frac{م ك^{د-١} |ن - ن.|^{د}}{د!} \leqslant \frac{م ك^{د-١} \delta^{د}}{د!}$$

فلأن ق (ن ، س) متصل لايبتشيزياً في س على **د** يكون:



الشكل م٥ - ٣

١ . نبيِّن أولاً ان المتتابعات { س ء (ن) } متصلة وتحقق المتباينة

| س ء (ن) - س. | ⩽ ب .... (م٥ - ٨)

والمتباينة (م٥ - ٨) لا بد منها كي يكون ق (ن ، س ء (ن)) معرفاً لكل ء= ٠ ، ١ ، ٢ ، ...

ولنبين اتصالية س ء (ن) نشير أولاً الى ان س. (ن) = س. متصل (لأن الاقتران الثابت متصل دائماً) فيكون

س١ (ن) = س. + ∫ (من ن. إلى ن) ق (ن ، س. (ز)) د ز

ولكن ق (ن ، س.) متصل [لأن ق (ن ، س) متصل في ن ، س]، ونكامل الاقتران المتصل متصل فيكون س١ (ن) متصلاً.

وبالمثل نبين ان

س٢ (ن) = س١ (ن) + ∫ (من ن. إلى ن) ق (ن ، س١ (ز)) د ز متصل.

وهكذا في ن = ٣ ، ٤ ، ....

وواضح ان المتباينة (م٥ - ٨) تصح عند ن = ٠ ، لأن س. (ن) = س. ، فعند ن ≠ ٠ نستخدم التعريف (م٥ - ٥) والمعادلة (م٥ - ٧) لنحصل على ما يلي:

فواضح ان

$$س_ء(ن) = ١ + ن + \frac{ن^٢}{٢!} + \ldots + \frac{ن^ء}{ء!} = \sum_{ك=٠}^{ء} \frac{ن^ك}{ك!}$$

فاذن

$$\lim_{ن \to \infty} س_ء(ن) = \sum_{ك=٠}^{\infty} \frac{ن^ك}{ك!} = e^{ن}$$ (حسب القاعدة ٥ ـ ١٦)

النظرية م٥ ـ ٣: نظرية الموجودية :

لنفرض ان ق (ن ، س) متصل ليبتشيزياً في س، مع الثابت اللايبتشيزي ك على المجال د وجميع النقاط (ن ، س) التي تحقق المتباينتين $|ن - ن_٠| \leq$ أ، $|س - س_٠| \leq$ ب (أنظر الشكل م٥ ـ ٣) فهنالك اذن عدد $\delta > ٠$، بحيث ان مسألة القيمة الابتدائية:

$سَ = ق(ن ، س)$ ، $س(ن_٠) = س_٠$

لها حل س = س (ن) على الفترة $|ن - ن_٠| \leq \delta$

البرهان: ان برهان هذه النظرية معقد، وسيُجرى على عدة مراحل. الا أن المبدأ الأساسي بسيط، فما علينا الا ان نثبت ان متتابعات بيكار تتقارب بانتظام وتعطي في النهاية حل المعادلة التكاملية (م٥ ـ ٢) فبما ان قَ متصل على د افهو محصور هناك [المقولة أ]، فيمكن ان نبدأ باعتبار ان م حاصرة عليا للاقتران |ق (ن ، س)| على د. ثم نعرف δ كما يلي:

δ = أدنى { أ، ب/م } .... (م٥ ـ ٧)

$$\text{س}_{٢}(\text{ن}) = \text{س}_{.} + \int_{\text{ن}_{.}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ز}\,،\ \text{س}_{١}(\text{ز}))\,\text{د ز}$$

$$\vdots \qquad \qquad (\text{م}٥ - ٥)$$

$$\text{س}_{\text{ء}}(\text{ن}) = \text{س}_{.} + \int_{\text{ن}_{.}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ز}\ \text{س}_{\text{ء}-١}(\text{ز}))\,\text{د ز}$$

وسنبين الآن أنه تحت شروط معينة تتقارب متتابعات بيكار (م٥ ـ ٥) بانتظام من حل لمعادلة (م٥ ـ ٢) ولنبدأ بشرح مجرى هذه المتتابعات بمثال بسيط:

المثال م٥ ـ ٣: خذ مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$\text{سَ}(\text{ن}) = \text{س}(\text{ن})\ ،\ \text{س}(٠) = ١ \qquad \qquad (\text{م}٥ - ٦)$$

فنعرف ان (م٥ ـ ٦) لها حل وحيد هو س (ن) = $e^{\text{ن}}$. وفي هذه الحالة يكون ق (ن ، س)، حسب (م٥ ـ ١) هو ق (ن ، س (ن)) = س (ن)، وتكون متتابعات بيكار (م٥ ـ ٥) تعطي ما يلي:

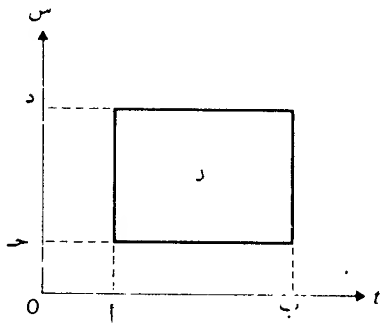
$$\text{س}_{.}(\text{ن}) = \text{س}_{.} = ١$$

$$\text{س}_{١}(\text{ن}) = ١ + \int_{.}^{\text{ن}} ١\ (\text{د ز}) = ١ + \text{ن}$$

$$\text{س}_{٢}(\text{ن}) = ١ + \int_{.}^{\text{ن}} (١ + \text{ز})\,\text{د ز} = ١ + \text{ن} + \frac{\text{ن}^{٢}}{٢}$$

$$\text{س}_{٣}(\text{ن}) = ١ + \int_{.}^{\text{ن}} (١ + \text{ز} + \frac{\text{ز}^{٢}}{٢})\,\text{د ز} = ١ + \text{ن} + \frac{\text{ن}^{٢}}{!٢} + \frac{\text{ن}^{٣}}{!٣}$$

مثال م٥ ـ ٢ : اذا كان $\text{ق}(\text{ن} ، \text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{٢}$ على $٠ \leqslant \text{ن} \leqslant ١$ ، $٠ \leqslant \text{س} \leqslant ١$ ، فيكون



الشكل م٥ ـ ٢

$$\left|\frac{\partial \text{ق}}{\partial \text{س}}\right| = |٢\,\text{ن}\,\text{س}| \leqslant ٢ ،$$

أي ان

$$|\text{ق}(\text{ن} ، \text{س}_{١}) - \text{ف}(\text{ن} ، \text{س}_{٢})| \leqslant ٢\,|\text{س}_{١} - \text{س}_{٢}|$$

والآن نعرف متتالية الاقترانات $\{\text{س}_{\text{ء}}(\text{ن})\}$ المسماة متتابعات بيكار (Picard*) بالصيغ التالية

$$\text{س}_{٠}(\text{ن}) = \text{س}_{٠}$$

$$\text{س}_{١}(\text{ن}) = \text{س}_{٠} + \int_{\text{ن}_{٠}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{ز} ، \text{س}_{٠}(\text{ز}))\,\text{د}\,\text{ز}$$

---

* إميل بيكار (١٨٥٦ ـ ١٩٤١) من ألمع الرياضيين الفرنسيين في القرن الماضي، حقق منجزات كثيرة في حقل التحليل الرياضي.

$$= \frac{1}{\sqrt{س}} |س - ٠| \text{ لكل } ٠ < س < ١،$$

$س^{-\frac{1}{2}}$ يقـارب ∞ عـنـدمـا س يقـارب الصفر. فاذن لا نجد ثابتاً لايبتشزياً محدوداً يحقق المعادلة (م٥ ـ ٤).

الا ان الاتصالية اللايبتشزية ليست شيئاً نادراً، ويبين ذلك النظرية التالية:

النظرية م٥ ـ ٢: لنفرض ان ق (ن ، س) ، (∂ ق/ ∂ س) (ن ، س) متصلان على **د**، فيكون ق (ن ، س) متصلاً لايبتشزياً في س على ذ.

البرهان: لتكن (ن ، $س_١$) و (ن ، $س_٢$) نقطتين في **د**، فلكل ن محدد يكون (∂ ق/ ∂ س) (ن ، س) اقـترانـاً في س. فيمكن ان نطبق نظـريـة القيمـة المتـوسطـة في حساب التفاضل [المقولة (ب)] فينتج:

$$|ق (ن ، س_١) - ق (ن ، س_٢)| = |\frac{∂ ق}{∂ س} (ن ، ع)| |س_١ - س_٢|$$

حيث $س_١ < ع < س_٢$. ولكن لأن ∂ ق/ ∂ س متصـــل في **د** فهـو محصـور في هذا المجال، حسب المقولة (أ) فهناك ثابت ك، ٠ < ك < ∞ حيث

$$|\frac{∂ ق}{∂ س} (ن ، س)| \leqslant ك \text{ لكل } (ن ، س) \text{ في } د.$$

وهو المطلوب.

اي ان س (ن) يحقق (م٥ ـ ٢).

وبالعكس اذا كان س (ن) يحقق (م٥ ـ ٢)، نفاضل (م٥ ـ ٢) فينتج :

$$\text{سَ (ن)} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}} \int_{\text{ن}_\cdot}^{\text{ن}} \text{ق (ز ، س (ز)) د ز} = \text{ق (ز ، س (ز))} ،$$

$$\text{س (ن}_\cdot\text{)} = \text{س}_\cdot + \int_{\text{ن}_\cdot}^{\text{ن}_\cdot} \text{ق (ز ، س (ز)) د ز} = \text{س}_\cdot$$

اي ان س (ن.) يحقق أيضاً (م٥ ـ ١).

لنفرض أن **د** ترمز الى المجال المستطيل، في المستوى ن س، المعرف كما يلي :

د : أ ⩽ ن ⩽ ب ، حـ ⩽ س ⩽ د .... (م٥ ـ ٣)

حيث − ∞ < أ < ب < + ∞ ، − ∞ < حـ < د < + ∞ ، أنظر الشكل (م٥ ـ ٢). فنقول ان الاقتران ق (ن ، س) متصل في س على **د**، على مبدأ لايبتشز (Lipschits) إذا كان هنالك ثابت ما، ك، حيث ٠ < ك < ∞ ، و:

$$|\text{ق (ن ، س}_1\text{)} - \text{ق (ن ، س}_2\text{)}| \leqslant \text{ك} \, |\text{س}_1 - \text{س}_2|$$

.... (م٥ ـ ٤)

لكل (ن ، س١) ، (ن ، س٢) في **د** ويسمى الثابت ك ثابت لايبتشز وواضح حسب (م٥ ـ ٤) ان كل اقتران متصل حسب مبدأ لايبتشز يكون متصلاً في س مع ثبات ن، ولكن ليس كل اقتران متصل متصلاً على مبدأ لايبتشز.

المثال م٥ ـ ١ : لنفرض ان ق (ن ، س) =$\sqrt{\text{س}}$ على المجموعة ٠ ⩽ ن ⩽ ١، ٠ ⩽ س ⩽ ١ فيكون ق (ن ، س) بالتأكيد متصلاً في هذا المجال.

ولكن | ق (ن ، س) − ق (ن ، ٠) | = | $\sqrt{\text{س}}$ − ٠ |

$$\text{نها}_{\text{ء} \leftarrow \infty} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (ز ، س}_{\text{ء}}\text{ (ز) د ز} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{نها}_{\text{ء} \leftarrow \infty} \text{ق (ز ، س}_{\text{ء}}\text{ (ز) د ز}$$

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (ز ، س (ز) د ز}$$

نحن الآن مهيأون للنظر في موجودية الحلول ووحدانيتها بالنسبة لمسألة القيم الابتدائية، ذات الرتبة الأولى ، التالية :

$\text{سَ (ن) = ق (ن ، س (ن))، س (ن}_{\text{.}}\text{) = س}_{\text{.}}$ . . . . (م٥ ـ ١)

حيث $\text{ن}_{\text{.}}$ ، $\text{س}_{\text{.}}$ عددان حقيقيان .

ان المعادلة (م٥ ـ ١) تشمل كل معادلات الرتبة الأولى التي ناقشناها في هذا الكتاب . فمثلاً : في المعادلة اللامتجانسة سَ + أ (ن) س = ب (ن) :

ق (ن ، س) = − أ (ن) س + ب (ن)

وسنبين انه إذا كان ق (ن ، س) ، $(\frac{\partial \text{ ق}}{\partial \text{ س}})$ (ن ، س) متصلين في مجال ما يشمل النقطة ($\text{ن}_{\text{١}}$ ، $\text{س}_{\text{.}}$) فان هناك فترة (تشمل $\text{ن}_{\text{.}}$) فيها حل وحيد للمعادلة (م٥ ـ ١) . ولكننا نحتاج باديء ذي بدء الى الحقائق الأولية التالية :

النظرية م٥ ـ ١ : اذا كان ق (ن ، س) متصلاً مع كل قيم ن ، س كانت مسألة القيم الابتدائية (م٥ ـ ١) مكافئة للمعادلة التكاملية :

$\text{س (ن) = س}_{\text{.}} + \int_{\text{ن}_{\text{.}}}^{\text{ن}} \text{ق (ز ، س (ز)) د ز}$ . . . . (م٥ ـ ٢)

بمعنى ان س (ن) يكون حلاً للمعادلة (م٥ ـ ١)، اذا وفقط اذا كان س (ن) حلاً للمعادلة (م٥ ـ ٢) .

البرهان : اذا كان س (ن) يحقق (م٥ ـ ١) يكون :

$$\int_{\text{ن}_{\text{.}}}^{\text{ن}} \text{ق (ز ، س (ز)) د ز} = \int_{\text{ن}_{\text{.}}}^{\text{ن}} \text{سَ (ز) د ز} = \text{س (ز)} \Big|_{\text{ن}_{\text{.}}}^{\text{ن}} = \text{س (ن)} - \text{س}_{\text{.}}$$

ج) اذا كانت { $\text{س}_{\text{ء}}$ (ن) } متتالية اقترانات، فعندها نقول إن $\text{س}_{\text{ء}}$ (ن) تقترب بانتظام من اقتران النهاية س (ن) في الفترة أ $\leq$ ن $\leq$ ب، واذا كان لكل عدد حقيقي ϵ $>$ ٠ هنالك عدد صحيح ع $>$ ٠ بحيث أنه اذا كان ء $\geq$ ع يكون | $\text{س}_{\text{ء}}$ (ن) − س (ن) | $<$ ϵ، لكل ن، حيث أ $\leq$ ن $\leq$ ب.

د) اذا كانت الاقترانات { $\text{س}_{\text{ء}}$ (ن) } في الحقيقة (ج) متصلة على الفترة أ $\leq$ ن $\leq$ ب يكون اقتران النهاية س (ن) هو ايضاً متصلاً هناك. وكثيراً ما نعبر عن هذا بقولنا ان النهاية المنتظمة للاقترانات المتصلة هي أيضاً متصلة.

هـ) اذا كان ق (ن ، س) اقتراناً متصلاً بالمتغير س وكان $\text{س}_{\text{ء}}$ (ن) يقارب س (ن) بانتظام كلما كان ء $\to \infty$ ، فان

$$\text{نها}_{\text{ء} \to \infty} \ \text{ق}\,(\text{ن} \text{ ، } \text{س}_{\text{ء}}(\text{ن})) = \text{ق}\,(\text{ن} \text{ ، } \text{س}(\text{ن}))$$

و) اذا كان ق (ن) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة أ $\leq$ ن $\leq$ ب، يكون:

$$\left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{ن})\, \text{د ن} \right| \leq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left| \text{ق}(\text{ن}) \right| \text{د ن} .$$

واذا كان

$$\left| \text{ق}(\text{ن}) \right| \leq \text{مـ} \ \text{يكون} \ \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left| \text{ق}(\text{ن}) \right| \text{د ن} \leq \text{مـ} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د ن} = \text{مـ}\,(\text{ب} - \text{أ})$$

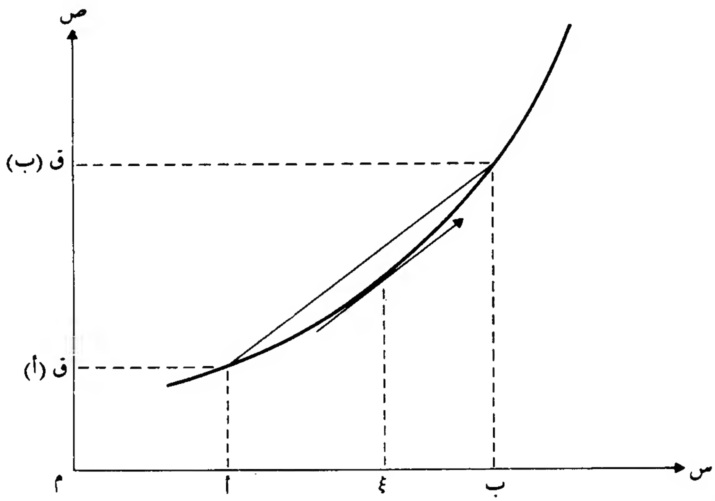
ز) لتكن { $\text{س}_{\text{ء}}$ (ن) } متتالية اقترانات، وليكن | $\text{س}_{\text{ء}}$ (ن) | $\leq$ $\text{مـ}_{\text{ء}}$ لكل أ $\leq$ ن $\leq$ ب، فاذا كان $\sum_{\text{ء}=١}^{\infty} |\text{مـ}_{\text{ء}}| < \infty$ (أي أنه اذا كان $\sum_{\text{ء}=١}^{\infty} \text{مـ}_{\text{ء}}$ يتقارب بانتظام). فإن $\sum_{\text{ء}=١}^{\infty} \text{س}_{\text{ء}}(\text{ن})$ يتقارب بانتظام في الفترة أ $\leq$ ن $\leq$ ب اقتران نهاية وحيداً هو س (ن).
ويسمى هذا في احيان كثيرة اختبار فيرشتراس للتقارب المنتظم (Weierstrass)

ح) اذا كانت { $\text{س}_{\text{ء}}$ (ن) } تقارب س (ن) بانتظام في الفترة أ $\leq$ ن $\leq$ ب، وكان ق (ن ، س) اقتراناً متصلاً في ن ، س في المجال م المعرف في المقولة (أ)، يكون

ب) ليكن ق (س) متصلاً في الفترة المغلقة أ ⩽ س ⩽ ب ، وقابلاً للاشتقاق في الفترة المفتوحة أ < س < ب : فحسب نظرية القيمة المتوسطة في حساب التفاضل : هناك عدد ع بين أ ، ب ، (أ < ع < ب)، حيث قَ (ب) - ق (أ) = قَ (ع) (ب - أ). وتكتب هذه المعادلة بالصيغة :

$$\frac{\text{ق (ب) - ق (أ)}}{\text{ب - أ}} = \text{قَ (ع)}$$

ومعنى هذا هندسياً ان ميل المماس للمنحنى ص = ق (س) عند النقطة ع ، بين أ ، ب ، يساوي ميل القاطع المار بالنقطتين (أ ، ق (أ))، (ب ، ق (ب)). (انظر الشكل م٥ - ١).



الشكل م٥ - ١

وكذلك نظريات الوحدانية، فهي مهمة نظرياً وعملياً، فعندما نعرف ان للمسألة حلاً وحيداً، ثم نجد لها حلاً ما نعرف ان قد انتهى الأمر. واذا عرفنا ان الحل ليس وحيداً، لا يبقى مكان للكلام عن «الحل» وينصرف الكلام للحل الذي ينفرد بصفات معينة. واذا كانت المسألة الفيزيائية لها حل واحد، فكذلك يجب ان يكون كل قالب رياضي لها، ذا حل واحد.

والاعتماد المستمر على الشروط الابتدائية ذو أهمية كبيرة، ذلك ان شيئاً من التقريب أو عدم الدقة يظل دائماً مرافقاً للاجراءات العملية. فنحتاج الى ان نعرف ان تغييراً طفيفاً في الشروط الابتدائية يرافقه تغيير طفيف مثله في حل المعادلة التفاضلية. والا فان قليلاً من التقريب قد يؤدي الى حلول مغايرة. وسنعرض هذا في التمرين ١٨.

وقبل ان نمضي في البحث، نود ان نذكر للقاريء اننا في هذا الملحق سنستخدم وسائل نظرية من علم الحسبان لم نستعملها بكثرة في الصفحات السابقة. وسنستعمل بشكل خاص الحقائق التالية عن استمرارية الاقتران وتقاربه. وهما يبحثان في معظم كتب الحسبان، المتوسطة منها والعالية*.

أ) ليكن ق (ن ، س) اقتراناً متصلاً (مستمراً) بالمتغيرين ن ، س. وليكن المجال المغلق المحصور م معرفاً بالعلاقة م = { (ن ، س) : أ ≥ ن ≥ ب ، حـ ≥ س ≥ د } ، حيث أ ، ب ، حـ ، د أعداد حقيقية محدودة. فتكون ق (ن ، س) محصورة، بالنسبة الى (ن ، س)، في المجال م : أي ان هناك عدد، ع > ٠ ، حيث ان | ق (ن ، س) | ≥ ع للزوج (ن ، س) في م.

---

* أنظر مثلاً

R. C. Buck, Advanced Calculus, Mc Graw Hill, 1956

في معظم دروس هذا الكتـــاب كنـــا نبحث عن طرق لأيجـــاد حلول لمعـادلات تفـاضليـة، على اعتبـار وجود حل وحيد للمعادلة التفاضلية العادية التي تعطى لها قيم ابتـدائيـة محددة. وغـايـة هذا الملحق هي اعطـاء براهـين على أعم النظـريـات حول موجـوديـة الحـل للمسألـة ذات القيم الابتـدائيـة ووحدانيتها، واثبات ان الحل يعتمد باستمرار على الشروط الابتدائية•وهنا يطرح كثير من القراء الاسئلة الثلاثة التالية:

١ ـ ما الحاجة الى إثبات وجود الحل، لا سيما وقد عرفنا ان المعادلة التفاضلية تنجم عن مسألة فيزيائية ذات حل؟

٢ ـ ولماذا نهتم بوحدانية الحل؟

٣ ـ وما أهمية الاعتماد المستمر على الشروط الابتدائية؟

وفي الجـواب عن السؤ ال الأول من المهم ان نذكـر ان المعـادلة التفاضلية ما هي الا قالب او تعبير عن مسألة فيزيائية. وقد تكون المعادلة التفاضلية قالباً سيئاً الى حد ان ليس له حل. وقـد تصـرف ساعـات تستعمل فيها الطرق التي تعلمناها، بحثاً عن حل ليس له وجود. فنظريات الموجودية ليس اهميتها فقط في انها تبين لنا اي المعادلات لها حلول، ولكنها أيضاً تفيد في تطوير قوالب رياضية للمسائل الفيزيائية.

الملحق ٥

موجودية الحلول ووحدانيتها

٤ $س_{١}$ − ٥ $س_{٢}$ = ٣

د) $س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$ − $س_{٣}$ − ٤ $س_{٤}$ = ١

− $س_{١}$ + ٢ $س_{٣}$ + ٦ $س_{٤}$ = ٥

−٤ $س_{٢}$ − ٢ $س_{٣}$ − ٨ $س_{٤}$ = −٨

٣ $س_{١}$ − ٢ $س_{٢}$ + ٥ $س_{٤}$ = ٣

٥ . بين ان المستقيمين في المنظومة (م٤ ـ ١) يكون لهما ميل واحد . اذا، وفقط اذا، كانت محددة المنظومة صفراً.

ز) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

٣. بيِّن هل لأي من المنظومتين المتجانستين التاليتين حل غير الحل الصفري:

أ) ٢ س$_{1}$ − ٣ س$_{2}$ + ٤ س$_{2}$ = ٠

−س$_{1}$ + س$_{2}$ − ٦ س$_{3}$ = ٠

٤ س$_{1}$ − ٥ س$_{2}$ + ١٦ س$_{3}$ = ٠

ب) س$_{1}$ + ٦ س$_{2}$ − س$_{3}$ = ٠

−٢ س$_{1}$ + ٧ س$_{2}$ + س$_{3}$ = ٠

٣ س$_{1}$ − س$_{2}$ + ٥ س$_{3}$ = ٠

٤ . حل كلًا من المنظومات التالية بقاعدة كريمر:

أ) ٣ س$_{1}$ − س$_{2}$ = ١٣

−٤ س$_{1}$ + ٦ س$_{2}$ = −٨

ب) ٢ س$_{1}$ + ٦ س$_{2}$ + ٣ س$_{3}$ = ٩

−٣ س$_{1}$ − ١٧ س$_{2}$ − س$_{3}$ = ٤

٤ س$_{1}$ + ٣ س$_{2}$ + س$_{3}$ = −٧

جـ) ٢ س$_{1}$ + س$_{3}$ = ٠

٣ س$_{1}$ − ٢ س$_{2}$ + ٢ س$_{3}$ = −٤

الوحيد، واذا كانت ح = ٠ فبين هل هنالك لا حل، ام حلول لا نهاية لعددها.

أ) ٢ $س_{١}$ + ٤ $س_{٢}$ = ٦

$س_{١}$ + $س_{٢}$ = ٣

ب) ٢ $س_{١}$ + ٤ $س_{٢}$ = ٦

$س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$ = ٥

جـ) ٢ $س_{١}$ + ٤ $س_{٢}$ = ٦

$س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$ = ٣

د) ٦ $س_{١}$ − ٣ $س_{٢}$ = ٣

−٢ $س_{١}$ + $س_{٢}$ = −١

هـ) ٦ $س_{١}$ − ٣ $س_{٢}$ = ٣

−٢ $س_{١}$ + $س_{٢}$ = ١

و) ٦ $س_{١}$ − ٣ $س_{٢}$ = ٣

−٢ $س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$ = −١

٢. إحسب المحددات التالية:

أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & -١ & ٤ \\ ٢ & ٠ & ٦ \end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix} ٤ & -١ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٧ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ جـ) $\begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$

د) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix}$ هـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٠ & ٥ & -١ \\ -١ & ٢ & ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ و) $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & ٣ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٠ & -٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$

النظرية م٤ ـ ٤ (قاعدة كريمر): ليكن ح، $\text{ح}_{\text{ك}}$ ، حيث ك = ١ ، ٢ ، . . . ، ن، كما يعرفهما (م٤ ـ ١٠) ، (م٤ ـ ١٢). فاذا كان ح ≠ ٠ كان الحل الوحيد للمنظومة (م٤ ـ ٨) كما يلي:

$$\text{س}_{١} = \frac{\text{ح}_{١}}{\text{ح}}،\ \text{س}_{٢} = \frac{\text{ح}_{٢}}{\text{ح}}،\ . . . ،\ \text{س}_{\text{ن}} = \frac{\text{ح}_{\text{ن}}}{\text{ح}} \qquad .... \qquad (\text{م٤ ـ ١٣})$$

المثال م٤ ـ ٤ : إليك المنظومة :

$$٢\,\text{س}_{١} + ٤\,\text{س}_{٢} - \text{س}_{٣} = -٥$$
$$-٤\,\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} + ٥\,\text{س}_{٣} = ١٤$$
$$٦\,\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} - ٢\,\text{س}_{٣} = ٥$$

هنا:
$$\text{ح} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & -١ \\ -٤ & ٣ & ٥ \\ ٦ & -٣ & -٢ \end{vmatrix} = ١١٢ \qquad \text{ح}_{١} = \begin{vmatrix} -٥ & ٤ & -١ \\ ١٤ & ٣ & ٥ \\ ٥ & -٣ & -٢ \end{vmatrix} = ٢٢٤$$

$$\text{ح}_{٢} = \begin{vmatrix} ٢ & -٥ & -١ \\ -٤ & ١٤ & ٥ \\ ٦ & ٥ & -٢ \end{vmatrix} = -١١٢ \qquad \text{ح}_{٣} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & -٥ \\ -٤ & ٣ & ١٤ \\ ٦ & -٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٥٦٠$$

فيكون
$$\text{س}_{١} = \frac{\text{ح}_{١}}{\text{ح}} = ٢ ،\ \text{س}_{٢} = \frac{\text{ح}_{٢}}{\text{ح}} = -١ ،\ \text{س}_{٣} = \frac{\text{ح}_{٣}}{\text{ح}} = ٥$$

التمارين م٤

١ . في المنظومات ٢ × ٢ التالية إحسب المحددة ح. فاذا كانت ح ≠ ٠ فأوجد الحل

$$
\text{ح}_{\text{ك}} =
\begin{vmatrix}
\text{أ}_{\text{١ن}} & \cdots & \text{أ}_{\text{١،ك+١}} & \text{ب}_{\text{١}} & \text{أ}_{\text{١،ك-١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\
\text{أ}_{\text{٢ن}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٢،ك+١}} & \text{ب}_{\text{٢}} & \text{أ}_{\text{٢،ك-١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٢١}} \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\text{أ}_{\text{ن ن}} & \cdots & \text{أ}_{\text{ن،ك+١}} & \text{ب}_{\text{ك}} & \text{أ}_{\text{ن،ك-١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{ن٢}} & \text{أ}_{\text{ن١}}
\end{vmatrix}
$$

$$
\text{ح}_{\text{ن}} =
\begin{vmatrix}
\text{ب}_{\text{١}} & \text{أ}_{\text{١،ن-١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\
\text{ب}_{\text{٢}} & \text{أ}_{\text{٢،ن-١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٢١}} \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\text{ب}_{\text{ن}} & \text{أ}_{\text{ن،ن-١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{ن٢}} & \text{أ}_{\text{ن١}}
\end{vmatrix}
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(م٤ - ١٢)}
$$

انها تنشأ من حذف العمود ك من ح ووضع العمود
$$
\begin{bmatrix}
\text{ب}_{\text{١}} \\
\text{ب}_{\text{٢}} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\text{ب}_{\text{ن}}
\end{bmatrix}
$$
مكانه .

فهنا تصح النظرية التالية، وتعرف بقاعدة كريمر (Cramer)

وهذه تحدث عندما تكون كل $ب_ر$ في (م٤ ـ ٨)، حيث ر = ١ ، . . . ، ن، أصفاراً.

وواضح هنا ان أحد حلول (م٤ ـ ١١) هو $س_١ = س_٢ = . . . = س_ن = ٠$ ففي المنظومة المتجانسة تصح:

النظرية م٤ ـ ٣: اذا كانت المحددة ح $\neq$ ٠ ، كان الحل الصفري $س_١ = س_٢ = . . . = س_ن = ٠$ هو الحل الوحيد للمنظومة (م٤ ـ ١١). واذا كانت ح = ٠ فللمنظومة (م٤ ـ ١١) ما لا نهاية له من الحلول.

وسننهي هذا الملحق بعرض طريقة للحصول على حل للمنظومة (م٤ ـ ٨):

اليك المحددات التالية:

$$ح_١ = \begin{vmatrix} ب_١ & أ_{٢١} & \cdots & أ_{ن١} \\ ب_٢ & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{ن٢} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ ب_ن & أ_{٢ن} & \cdots & أ_{ن ن} \end{vmatrix}$$

$$ح_٢ = \begin{vmatrix} أ_{١١} & ب_١ & \cdots & أ_{ن١} \\ أ_{١٢} & ب_٢ & \cdots & أ_{ن٢} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ أ_{١ن} & ب_ن & \cdots & أ_{ن ن} \end{vmatrix}$$

= ١ (-٩٢) - ٣ (-٧٠) + ٥ (٢) - ٢ (-١٦) = ١٦٠

والأعداد التي داخل الاقواس هي قيم المحددات ٣ × ٣ .

وواضح ان حساب المحددات بهذه الطريقة عملية متعبة، ومملّة، لا سيما اذا كان ن ⩾ ٥ . لذا وضعت اجراءات لتبسيط هذه الحسابيات تبسيطاً محسوساً. ولن نتعرض لهذه الاجراءات هنا ولكن يمكن الاطلاع عليها في معظم كتب المصفوفات .

والسبب في تعرضنا لمحدودات المنظومات ذات ن معادلات في ن مجاهيل هو ان النظرية (م٤ ـ ١) تسري أيضاً على هذه المنظومات (وهذا ما لن نبرهن عليه هنا).

النظرية م٤ ـ ٢ : يكون للمنظومة (م٤ ـ ٨) حل وحيد، اذا، وفقط اذا، كانت المحددة ح، كما يعرّفها (م٤ ـ ١٠) ليست صفراً. فاذا كانت ح = ٠، فللمنظومة ما لا نهاية له من الحلول، أو أنها ليس لها حل.

وهنالك حالة خاصة من المنظومة (م٤ ـ ٨) تستدعي اعتباراً خاصاً (مثلاً في التحقق اذا كانت حلول المعادلة التفاضلية مستقلة خطياً)، تلك هي المنظومة المتجانسة:

$$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + \ldots + أ_{ن١} س_{ن} = ٠$$

$$أ_{١٢} س_{١} + أ_{١٢} س_{٢} + \ldots + أ_{ن٢} س_{ن} = ٠$$

$$\vdots \qquad \qquad (م٤ - ١١)$$

$$أ_{ن١} س_{١} + أ_{ن٢} س_{٢} + \ldots + أ_{ن ن} س_{ن} = ٠$$

فتعريف المحددة العامة (م٤ ـ ٨)، ذات ن × ن ما هو الا توسيع لهذا الإجراء:

$$\text{ح} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} & \cdots & \text{أ}_{١ن} \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} & \cdots & \text{أ}_{٢ن} \\ \vdots & & & \\ \text{أ}_{ن١} & \text{أ}_{ن٢} & \cdots & \text{أ}_{ن ن} \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ}_{١١} \propto_{١١} - \text{أ}_{٢١} \propto_{٢١} + \cdots + (-١)^{ن+١} \text{أ}_{ن١} \propto_{ن١} \qquad \text{(م٤ - ١٠)}$$

حيث $\propto_{١ر}$ هو المحددة (ن − ١) × (ن − ١) التي تنشأ من حذف السطر الأول والعمود ر من المحددة الأصلية ن × ن. فالمحددة ن × ن تحسب بحساب ن محددات كل منها (ن − ١) × (ن − ١) لاحظ ان الأشارات تتناوب في التعريف (م٤ - ١٠).

المثال م٤ ـ ٣ :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٥ & ٢ \\ ٠ & -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٩ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ٤ & ٨ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٩ & ٦ \\ ٢ & ٤ & ٨ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٩ & ٦ \\ ٣ & ٤ & ٨ \end{vmatrix}$$

$$+ ٥ \begin{vmatrix} ٠ & -١ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٩ \\ ٣ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + \ldots + أ_{ن١} س_{ن} = ب_{١}$$

$$أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} + \ldots + أ_{ن٢} س_{ن} = ب_{٢}$$

$$\vdots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (م٤ - ٨)$$

$$أ_{ن١} س_{١} + أ_{ن٢} س_{٢} + \ldots + أ_{نن} س_{ن} = ب_{ن}$$

فلتعريف محددة هذه المنظومة ، نبدأ بتعريف محدودة منظومة ٣ × ٣ على النحو التالي :

$$ح = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (م٤ - ٩)$$

فلحساب محددة ٣ × ٣ يلزم ان نحسب ثلاث محددات كل منها ٢ × ٢

المثال م٤ - ٢ :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٣ \\ ١- & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} - ٥ \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٤ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١- & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٣ \times ٢ - ٥ \times ١٩ + ٢ \times ١٠ = ٦٩-$$

وفي المنظومة (ii): ح = ١ × ٩ − ٣ × ٣ = ٠، فاذا ضربنا المعادلة الأولى في ٣ ثم طرحنا ذلك من المعادلة الثانية، تنتج ٠ = ١، وهذا مستحيل. فلا حل اذن.

وفي المنظومة (iii): ح = ١ × ٩ − ٣ × ٣ = ٠، ولكن هنا نجد ان المعادلة الثانية ثلاثة أمثال الأولى، فاذا جعلنا $س_٢$ اعتباطياً. كان $س_١ = ٣ - ٣ س_٢$، وهنا ما لا نهاية له من الحلول.

نعود الآن الى المنظومة (م٤ ـ ١): عرَّفنا محددة المنظومة بأنها

$$ح = أ_{١١} أ_{٢٢} - أ_{٢١} أ_{١٢} \quad \text{(م٤ ـ ٦)}$$

وللتسهيل تكتب محددة المعاملات بالترتيب المربع الشكل التالي، ويسمى محددة ٢ × ٢:

$$ح = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١} أ_{٢٢} - أ_{٢١} أ_{١٢} \quad \text{(م٤ ـ ٧)}$$

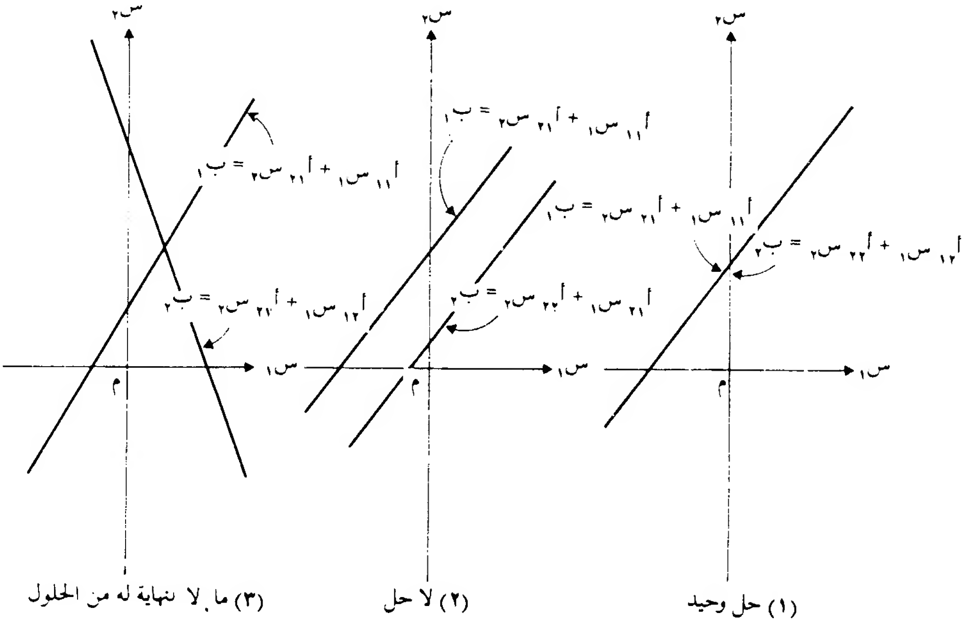
فالمحددة ٢ × ٢ قيمتها حاصل ضرب العنصرين على القطر النازل من أعلى اليمين الى أدنى اليسار، مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر النازل من أعلى اليسار الى أدنى اليمين.

فقد أثبتنا ما يلي:

النظرية م٤ ـ ١: في المنظومة ٢ × ٢، (في م٤ ـ ١) يكون هنالك حل وحيد اذا، وفقط اذا، كانت المحددة ح لا تساوي صفراً. فاذا كانت ح = ٠ فهنالك لا حل، اوما لا نهاية له من الحلول.

فلننظر الآن في المنظومة العامة التي تحتوي على ن مجاهيل وتتكون من ن معادلات:

يمثلهما مستقيم واحد، وكل نقطة عليه حل. ويبين هذه الحالات كلها الشكل م٤ - ١.



الشكل م٤ - ١

المثال م٤ - ١ : انظر في منظومات المعادلات التالية :

(أ) $٢\,\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} = ١٢$

$\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} = ٥$

(ii) $\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} = ٣$

$٣\,\text{س}_{١} + ٩\,\text{س}_{٢} = ٨$

(iii) $\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} = ٣$

$٣\,\text{س}_{١} + ٩\,\text{س}_{٢} = ٩$

ففي المنظومة (أ) : $\text{ح} = ٢ \times ١ - ٣ \times ١ = -١ \neq ٠$ ، فهنالك حل وحيد. ويسهل أن نجد أنه $\text{س}_{١} = ٣$ ، $\text{س}_{٢} = ٢$.

ثم نطرح المعادلة الثانية من الأولى فينتج :

$$(أ_{١١} أ_{٢٢} - أ_{٢١} أ_{١٢}) س_١ = أ_{٢٢} ب_١ - أ_{٢١} ب_٢ \quad \text{(م٤ - ٣)}$$

فلنعرِّف الآن $ح = أ_{١١} أ_{٢٢} - أ_{٢١} أ_{١٢}$ .... (م٤ - ٤)

فاذا كان ح ≠ ٠ ينتج ان $س_١ = \frac{أ_{٢٢} ب_١ - أ_{٢١} ب_٢}{ح}$ . . . . (م٤ - ٥)

ونجـد $س_٢$ بتعـويض قيمـة $س_١$ في إحـدى معـادلتي (م٤ ـ ١). فاذا كان ح ≠ ٠ كان للمنظـومـة (م٤ ـ ١) حل وحيـد ولكن اذا كان ح = ٠، كان $أ_{١١} أ_{٢٢} = أ_{٢١} أ_{١٢}$، فاذا طرحنا المعادلة الثانية في (م٤ ـ ٢) من الأولى، ينتج : $٠ = أ_{٢٢} ب_١ - أ_{٢١} ب_٢$ فإما ان تكون هنا المعادلة صحيحة واما ان تكون خطأ. فاذا كان $أ_{٢٢} ب_١ - أ_{٢١} ب_٢ ≠ ٠$ فان المـنظـومـة (م٤ ـ ١) ليس لها حل. واذا كان $أ_{٢٢} ب_١ - أ_{٢١} ب_٢ = ٠$ كانت المعادلة الثانية مضاعفاً للأولى وكانت المنظومة (م٤ ـ ١) هي في الواقع معادلة واحدة. فيمكن ان نعطي $س_١$ قيمة اعتباطية ونحسب قيمة $س_٢$ التي تناظرها. فلدينا في هذه الحالة عدد لا نهاية له من الحلول.

وخلاصة القول ان قد بينا انه اذا كان ح = ٠ كانت المنظومة (م٤ ـ ١) ليس لها حل او لها ما لا نهاية له من الحلول.

ويسهـل تصـور هذه الحقـائق هنـدسياً اذا تذكـرنـا ان (م٤ ـ ١) تمثـل خطـين مستقيمين. فحل المنظومة هو نقطة تقاطع الخطين. ويسهل ان نبين (انظر التمرين ٥) ان ح = ٠ اذا، وفقط اذا، كان ميلا المستقيمين متساويين. فاذا كانا مختلفين كان ح ≠ ٠ وكان المستقيمان يتقاطعان في نقطة واحدة، وتلك هي الحل الوحيد. واذا كان ح = ٠ كان لدينـا مستقيـمان متـوازيـان ـ ولا حل، لأنهما لا يتقاطعان ابداً، او كانت المعادلتان

استعملنا المحددات في كثير من بنود هذا الكتاب. وفي هذا الملحق نذكر كيف تنشأ المحددات ونناقش كيف تستعمل. فلنبدأ بذكر المنظومة التالية ذات المعادلتين الخطيتين:

$$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} = ب_{١}$$

. . . . (م٤ - ١)

$$أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} = ب_{٢}$$

وسنفرض للسهولة ان $أ_{١١}$ ، $أ_{٢١}$ ، $أ_{١٢}$ ، $أ_{٢٢}$ ليست أصفاراً (والا فيمكن حل المنظومة مباشرة).

فلحل المنظومة (م٤ ـ ١) نضرب المعادلة الأولى في $أ_{٢٢}$ والثانية في $أ_{٢١}$ ، فينتج:

$$أ_{١١} أ_{٢٢} س_{١} + أ_{٢١} أ_{٢٢} س_{٢} = أ_{٢٢} ب_{١}$$

. . . . (م٤ ـ ٢)

$$أ_{٢١} أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢١} أ_{٢٢} س_{٢} = أ_{٢١} ب_{٢}$$

الملحق ٤

المحددات

بعد ان يطبع المبرمج قيم C, B, A ويضغط زر العودة، تقوم الحاسبة بحساب الفارق D . فاذا كان D > 0 ، فان التعليمة 15 تنقل السيطرة الى التعليمة 40 ، والا فقيم النقل الى 20 . ففي الحالة الأولى تكون المخرجات جذوراً مركبة، وفي الحالة الثانية تكون حقيقية. ويخرج البرنامج عند التعليمة 60 .

المثال ٤ : للحصول على جدول بجيوب الزوايا على فترات كل منها ١ , ٠ وحدة مستوية بين ٠ ، ٣ وحدات، يمكن استعمال برنامج كالتالي:

```
      TYPE 10
10    FORMAT ('      X              SIN (X)')
      X = 0.0
15    DO 30, I = 0, 30
      Y = SIN (X)
      TYPE 20, X, Y
20    FORMAT (2G13.5)
30    X = X + .1
40    STOP
      END
```

يجعل هذه البرنامج فروق بين 15 و 30 ، وبعد ٣١ دورة ينتهي العمل بالانتقال الى 40 والعبارة ١٠ تعطي للناتج عناوين.

لم نذكر كل امكانيات التعليمات الواردة في هذه الأمثلة. فمن شاء مزيداً عن هذه التعليمات وغيرها فليرجع الى دليل لغة فورتران.

وأما

```
TYPE 13, A, B, I, J

13    FORMAT (2G13.5, 2G5)
```

فتكون مخرجتها

```
-1.02345      0.12346E+12      18    -9
```

اذا كان A = -١,٠٢٣٤٥ ، B = ١,٢٣٤٥٦٧ E +١١ ، I = 18 ، J = -٩

STOP

هذه التعليمة تنهي البرنامج وتعيد السيطرة الى المشغل . وكل برنامج يجب أن ينتهي بتعليمة كهذه .

END

هذه هي آخر عبارة في برامج فورتران وهي تعلم جهاز تجميع البرنامج أنه قد انتهى العمل .

المثال ٣ : هذا برنامج يعطي جذري المعادلة

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

وعلى القاريء أن يدرسه بعناية حتى يعرف كيف يعمل :

```
      ACCEPT 10, A, B, C
10    FORMAT (3G)
      D = (B*B) - (4.*A*C)
15    IF (D) 40, 20, 20
20    X1 = (-B + SQRT (D))/(2.*A)
      X2 = (-B - SQRT (D))/(2.*A)
      TYPE 30, X1, X2
30    FORMAT (2G13.5)
      GO TO 60
40    XREAL = -B/(2.*A)
      XIMAG = SQRT (-D)/(2.*A)
      TYPE 50, XREAL, XIMAG, XREAL, XIMAG
50    FORMAT (G13.5,' +I', 2G13.5,' -I', G13.5)
60    STOP
      END
```

```
      ACCEPT 17, A, B12, J, K17
17    FORMAT (4G)
```

وعنـد الـوصـول الى هذه النقطـة من الـبرنـامج تنتظر الحاسبة حتى تعطى القيم كلها ويضغط على زر العودة المرقوم باللفظة RETURN

```
TYPE n,   [متغيرات]
. FORMAT   (وصف)
```

وهـاتـان التعليمتـان ايضـاً تأتيـان معـاً، وتستعمـلان لطبـاعة المعطيات على ورقة ال teletype فتطبـع حسب ما في التعليمـة الثـانيـة من وصف. وكـل مدخلة في هذا الوصف تقابل متغيراً، وتكون من النوع Gw (اذا كانت المدخلة ثابتاً صحيحاً) او Gw. d (اذا كانت ثابتاً حقيقيا)

وهنا تدل w على عدد المنازل التي تبقيها للجواب، وتدل d على عدد المنازل الرقمية المطلوبة. وينبغي ان يبقى حقل ٨ أوسع مما يتطلبه الجواب المنتظر، كيلا تفقد أرقام من أحد الطرفين ففي حالة الثوابت الحقيقية لا يكون هنالك مشكلة اذا جعلنا $w \leqslant d+$ ٨. ويمكن ان تعمـل الحـاسبـة بحيث تطبـع أي عبارة بوضعها في المقدمة مع اشارتي تنصيص مفردتين. ويجب فصل مدخلات الوصف بفواصل. مثلاً:

```
      Y = SIN (X)
      TYPE 82, X, Y
82    FORMAT (' SIN(', G13.5, ') =', G13.5)
```

هذه التعليمات المخرجة التالية على فرض ان X = ١٫٠٤٧١٩ وحدات مستوية (≈ ٦٠°):

```
SIN ( 1.04719      ) = 0.50000
```

وقد تتداخل الحلقات كما في :

```
      DO 7 N = 1, 5
      DO 6 M = 1, 4

      DO 6 I = 1, 9
6      X = X + I*M*N
7     X = X*N
```

هذه الحلقات الثلاث تبدأ بوضع N = M = I = ١ . فالمتغير I تنتقل قيمه من ١ حتى يصل الى ٩ قبل ان يتغير M إلى ٢ . أما N فلا يصبح ٢ الا عندما يرتفع M عن ١ حتى يصل الى ٤ . فاذا صار M = ٢ ، ينزل I الى ١ ثم يعود فيرتفع حتى يصل الى ٩ قبل ان يتغير M

ويسمح بالنقل الى خارج الحلقة ولكن لا يمكن النقل الى داخلها

ACCEPT n, [متغيرات]

n FORMAT (وصف)

ترد هاتان التعليمتان معاً وتستعملان لأدخال قيم في البرنامج . فالأولى أمر بالقبول يعرف بالمتغيرات التي ستعين لها عند هذا الحد قيم في البرنامج . فحالما يبدأ تنفيذ البرنامج تطبع فيه قيم هذه المتغيرات ، مفصولة احداها عن الأخرى بفواصل . ومن المهم ان تطبع للمتغيرات الصحيحة قيم صحيحة وللمتغيرات الحقيقية قيم حقيقية (على ان هذه القيم يمكن ان تكون بقوى العشرة، كما سبق) .

واما التعليمة الثانية ، المرقومة بالحرف n ، فتقول للحاسب عن انواع الثوابت التي يتوقعها ، وكم عددها . ويكفي للنوعين من الثوابت اللذين سنستعملهما ان نقيم الوصف على الحرفين K h ، حيث K هو عدد المتغيرات المدخلة . واليك مثالاً على ذلك :

هذه التعليمـة تقتضي ان تحسب القيمـة الجـارية للقاعدة ثم ينقل الإجراء الى العبارة المرقومة n_1، n_2، n_3 حسب كون القيمة الناتجة سالبة، أو صفراً، أو موجبة، على التوالي . مثلاً :

```
IF (X**2 - 7) 11, 12, 13
```

تحسب قيمة (س٢ - ٧) ($X^2 - 7$) ثم ينقل الاجراء الى العبارة ١٣ اذا كان س٢ - ٧ > ٠ ، أو ١٢ اذا كان س٢ - ٧ = ٠ أو ١١ اذا كان س٢ - ٧ < ٠ .

DO n $i = m_1, m_2, m_3$

هنا n عدد عبارة، i متغير صحيح، m_1، m_2، m_3 متغيرات أو ثوابت موجبة. واذا لم يعين m_3 نعتبره +١ . والتعليمـة تقتضي اجراء التعليمات التي تلحق تعليمة DO مكررة مرة بعد مرة حتى نهاية التعليمة التي رقمها n . اما عدد التكرار فيعتمد على قيم m_1، m_2 , m_3 . والمتغير الصحيح i يعطى في البدء قيمة m_1 ثم تجرى التعليمات ومعهات التعليمة n . ثم يضاف الى i قيمة m_3، وتقابل قيمتها الجديدة بقيمة m_2 . فاذا كانت $i \leq m_2$ تعـاد الحلقـة ثانيـة، والا فينقـل الإجـراء الى العبـارة التى تلي العبارة n . مثلاً : التعليمة :

```
DO 17 I5 = 7, 19, 2
```

تقتضي ان تضع 7 = 15 فتجرى كل التعليمات حتى تفرغ من التعليمة 17 ، فتضع 9 = 15 ، فتعيد الكرة حتى 21 = 15 ، وعندها ينتقل الإجراء الى العبارة التي تلي 17 .

ومثل هذه الحلقة تكونه التعليمة `DO 93 J = I, K**2`

وكذلك `DO 6 NM = I, J, K`

GO TO [رقم العبارة]

تعليمة تنقل الاجراء الى التعليمة التي ذكر رقمها. وهذا يمكن البرنامج من القفز من نقطة الى أخرى كما في المثال السابق

(عبارات رياضية) [قاعدة] = [متغير]

تعليمـة تعطي المتغـير المـذكـور القيمة التي تنتج من حساب القاعدة استناداً الى القيم الجـاريـة لكـل المتغـيرات التي تتضمنهـا القـاعدة. ومن المهم عدم الخلط بين النوعين المختلفـين من الثـوابت والمتغـيرات في القـاعدة. فكل الثوابت فيها يجب ان تكون من واحـد من نوعي الثـوابت السـابقـة. فاذا كانت ثوابت القاعدة اعداداً صحيحة لزم ان تكـون جميـع المتغـيرات صحيحة. وكذلك اذا كانت كل الثوابت حقيقية لزم ان تكون المتغـيرات ايضـاً حقيقيـة. ولكن المتغير على يسار علامة المساواة لا يلزم ان يكون من نفس نوع الثوابت والمتغيرات التي على يمينها.

مثلاً: `I = 9*(J**2)`

يقتضي تربيـع القيمـة الحـاليـة للمتغـير J وضرب الناتج في ٩، ثم خزن الجواب في I باعتباره ثابتاً صحيحا.

وأما: `K19B = (A**B) + 19.4`

فيقتضي رفـع قيمـة A الحـالية الى القوة B ثم جمع ١٩,٤ الى الناتج ثم خزن أكبر عدد صحيح في الناتج الأخير كثابت صحيح في K19B

وأخيراً: `C = A**.5`

يخزن الجذر التربيعي للرمز A كثابت حقيقي في C

IF ([قاعدة]) n_1, n_2, n_3

الأساسية

ALOG (A) معناه لي A أي لو$_e$ A

ATAN (A) معناه ظا$^{-1}$ A

ASIN (A) معناه جا$^{-1}$ A

ACOS (A) معناه جتا$^{-1}$ A

(وتعطي فورتران الجزء الرئيسي من كل واحد من الاقترانات الثلاثة الأخيرة)

العبارات : كل سطر في برامج فورتران يتكون من ثلاثة حقول: فحقل عدد العبارة، وحقل امتداد السطر، وحقل العبارة.

وحقل عدد العبارة يتراوح من رقم واحد الى خمسة أرقام، موضعها المنازل الخمس الأولى من السطر، وتهمل المنازل الخالية. وكل عبارة تُرجع اليها عبارة أخرى، تعطى عدداً، ولكن لا يعطى لكل عبارة عدد. وأعداد العبارات يمكن ان تكون بأي ترتيب لأن غايتها هي مجرد تمييز العبارات، فلذا يجب الا تشترك عبارتان بعدد واحد.

وتكون عبارة فورتران أحياناً أطول من أن يتسع لها سطر واحد. فاذا أرجعتك الرقانة الى سطر جديدقبل نهاية العبارة، فضع الرقم 1 في المنزلة السادسة من السطر التالي، وأكمل طباعة العبارة.

وتطبع تعليمات فورتران في حقل العبارة وهو يضم كل المنازل الباقية على السطر ابتداء من المنزلة السابعة. وسنورد بعض التعليمات البسيطة فيما يلي:

ومن عبارات فورتران النموذجية العبارة

104		GO TO 98	
١٢٣٤٥	٦	٧	← المنازل

انها تنقل الأجزاء الى العبارة ٩٨.

ففي السطر ٢٠ حلقة نطبع قيم س، ق (س) على شكل جدول، لكل ٠١, ٠، من ٠, ١ الى ٠, ٣ .

ان هذه القائمة من تعليمات اللغة الأساسية ما هي إلا جزء يسير من التعليمات المتوافرة. والواقع أننا في كثير من الحالات لم نقم بذكر كل امكانيات هذه التعليمات. فمن اراد المزيد منها فليرجع الى دليل اللغة الأساسية (BASIC Handbook) .

فورتران

الثوابت : يستعمل في فورتران سبعة أنواع من الأعداد نذكر اثنين منها. أولهما الثوابت الصحيحة وتكون موجبة اوسالبة، وتشمل من رقم واحد الى أحد عشر رقماً، تكتب بدون فواصل عشرية، مثلاً :

(0, 3, +5, −2; 8127). وثانيهما الثوابت الحقيقية، وتكون موجبة أوسالبة، وقد تصل الى تسعة ارقام، وقد تشمل الفاصلة الكسرية. وقد تكتب بصيغة علمية فيلحق بالعدد حرف E متبوعاً بثابت صحيح ذي إشارة يدل على قوة العشرة المقصودة : مثلاً :

1.23456789E+8. 72., 0.0, .0359 (=3.59E−2),

، وقوة العشرة تتراوح بين $١٠^{-٣٧}$ و $١٠^{٣٧}$.

المتغيرات : تشتمل متغيرات فورتران على رموز أبجدية عددية، من واحد الى ستة، أولها أبجدي. فاذا كان أحد الأحرف I, J, K, L, M أو N فالمتغير عدد صحيح، والا فهو متغير حقيقي.

الأقترانات : في فورتران الاقترانات التالية بالأضافة الى التي تشترك بها مع اللغة

```
10 INPUT A, B, C
20 D = (B*B) - (4*A*C)
30 IF D < 0 THEN 80
40 X1 = (-B + SQRT (D))/(2*A)
50 X2 = (-B - SQRT (D))/(2*A)
60 PRINT X1, X2
70 GO TO 110
80 R = -B/(2*A)
90 I = SQRT (-D)/(2*A)
100 PRINT R; "+I"; I, R; "-I"; I
110 END
```

فبعد ان توضع قيم A , B , C ويضغط على زر العودة، تقوم الحاسبة بحساب قيمة D . فاذا كانت D غير سالبة يحسب الجذران حسب السطرين 50, 40 ويطبعان حسب السطر 50 . واذا كانت D سالبة فالجذران مركبان . فالسطران ٨٠ ، ٩٠ يعطيان الجزء الحقيقي والجزء الخيالي، والسطر ١٠٠ يطبع الجذرين المركبين المترافقين . وينتهي البرنامج بالسطر ١١٠ .

المثال ٢ : لنفرض اننا نريد جدولاً بقيم الاقتران

ق (س) = | ظا$^{-1}$ (e س^{١,٣٥}) |

$$f(x) = |\tan^{-1}(e^{x^{1.35}})|$$

بحيث تعطى للمتغير س ٢٠ قيمة بين ١, ٠ ، ٣, ٠ . فالبرنامج التالي يؤدي هذه المهمة :

```
10 DEF FNF(X) = ABS(ATN(EXP(X**1.35)))
20 FOR X = 0.1 TO 0.3 STEP 0.01
30 PRINT X, FNF(X)
40 NEXT X
50 END
```

```
10 FOR A = 7 TO 9 STEP 1.2
20 PRINT A
30 NEXT A
40 PRINT A**2
```

تجعل البرنامج يضع A = ٧، فيطبع ٧، ويزيدها بمقدار ٢, ١ فتصير A = ٢, ٨ وهي لا تزيـد عن ٩، فيعـود الى السطـر ٢٠ فيعيـد طباعة A والزيادة، فتصير A = ٤, ٩. ولأن ٤, ٩ تزيد عن ٩، تمضي الحاسبة خارجة من هذه العروة فتطبع (٤, ٩)٢.

وقد تتداخل الحلقات، كما في التعليمات التالية:

```
10 FOR A = 1 TO 10
20 FOR B = 3 TO 9 STEP 3
30 PRINT A*B
40 NEXT B
50 NEXT A
```

فهنا تطبع الحاسبة الأرقام التالية بالتتابع: ٣، ٦، ٩، ٦، ٢، ٨، ٩، ١٨، ٢٧، ١٢، ٢٤، ٣٦، . . . ، ٣٠، ٦٠، ٩٠.

END

يجب ان تكتب هذه التعليمة وان تحتل آخر سطر في كل برنامج. انها تقول الى الحاسبة بأن العمل قد تم.

المثال ١ : هذا مثال على برنامج بسيط لايجاد جذري المعادلة التربيعية

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

وينصح القاريء بأن يدرسه بعناية ليرى كيف يؤدي الغرض المطلوب منه

[قاعدة] = ([متغيرات]) [حرف ما] DEF FN

هذه القاعدة تعطي تعريفاً لاقتران ما رمز اليه بثلاثة أحرف أولها FN . مثلاً :

```
300 DEF FNG(X,Y) = EXP (-X)*SIN (Y)
```

تبين للحاسبة كيف تحسب الاقتران ق (س ، ص) = [FNG (X, Y] فحيثما تقول هذا الاقترانفقاعدة حسابه مبينة بالسطر ٣٠٠ . فمثلاً العبارة

```
92 X4 = SQRT (FNG(X4,9.2))
```

تجعل الحاسبة تأخذ ٢ , ٩ والقيمة الجارية للمتغير X4 لحساب

$$\text{FNG (X4,9.2)} = e^{x4} \sin (9.2),$$

ثم تأخذ الجذر التربيعي لهذا العدد ، فتجعل العدد الجديد الناتج هو القيمة الجديدة للمتغير X4 .

والفائدة الرئيسية من استعمال عبارة كهذه هو تقليص عبء طباعة برنامج يتردد فيه متغير ما مرات كثيرة . ثم هي قد تستخدم لكتابة برامج تعمل على عدة اقترانات مختلفة ، فتعدل مع كل اقتران بتغيير بسط يتناول سطراً واحداً فيه .

[قاعدة ٣] STEP [قاعدة ٢] TO [قاعدة ١] = [متغير] FOR

[متغير] NEXT

تأتي هاتان التعليمتان معاً كحلقة تقتضي تكرار سلسلة من الخطوات . والمتغير (وهو واحد في التعليمتين) تعينه من البدء القاعدة ١ . وتتكرر الخطوتان التاليتان الى ان تصل الى الخطوة الأخيرة (NEXT) بزيادة قيمة المتغير بمقدار قيمة القاعدة ٣ . (وقد تحذف من التعليمات الخطوة [قاعدة ٣] STEP وفي هذه الحالة تزداد قيمة المتغير بمقدار +١ كل مرة) . والقيمة الناتجة تقارن بالقاعدة ٢ ، فاذا كانت أقل أومساوية للقاعدة ٢ ، أعيد الإجراء الى التعليمة التى تتبع [FOR] ، والا فتمضي الى [NEXT] . مثلاً التعليمات :

هذه التعليمة تأخذ القيم الجارية للرموز C, B , A من أجل حساب

$$(-B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2A$$

وتعطي × ما ينتج .

[رقم سطر] GO TO

هذه التعليمة تنقل الاجراءات من هذا السطر الى السطر المقترح ليبدأ التنفيذ من ذلك السطر. وهذا الأمر يسمح بانتقال البرنامج من نقطة إلى أخرى. مثلاً

```
87 GO TO 42
```

يعيد البرنامج الى السطر ٤٢

[رقم سطر] THEN [قاعدة] علاقة [قاعدة] IF

اذا كانت العلاقة المعطاة بين القاعدتين صحيحة، ينتقل الإجراء الى السطر المذكور. والا فينتقل التنفيذ الى العبارة التالية. واكثر العلاقات استعمالاً هي :

العلاقة	مثال	المعنى
=	A = B	A يساوي B
<	A < B	A أقل من B
<=	A <= B	A أقل من أوتساوي B
<>	A <> B	A لا تساوي B

والعبارة التالية مثال نموذجي على هذه التعليمة

```
124 IF A < A**3 THEN 515
```

فكلما كانت A أقل من A^3 ينتقل البرنامج الى السطر 515 ، والا فهو يمضي الى العبارة التالية

وهذا يتطلب من الحاسبة ان تطبع القيم الحالية لكل من س وجا س

تعليمات اللغة الأساسية

[يتبعها قائمة بالمتغيرات والقواعد والعبارات] PRINT

تطبع القيم الحالية للمتغيرات المعينة، وتعيد اي عبارة عليها اشارة التنصيص : مثلاً :

```
53 PRINT A, A**2, B7, "END"
```

تطبع القيم الحالية للرموز A، A^2، $B7$ ونطبع الكلمة END .

اذا اردت تقريب المسافات فاستعمل الاشارة ; بدل , بين كلمات القائمة المعطاة.

[يتبعها قائمة متغيرات] INPUT

هذا الأمر يجيب عليه الحاسب بعلامة الاستفهام (?) ثم ينتظر حتى يزوده مستعمل الجهاز بقيم المتغيرات المعطاة. فعلى المستعمل ان يعطي هذه الأعداد مطبُوعة، مفصولة بعضها عن بعض بفواصل (،) وان يضغط زر العودة (RET) قبل ان يكمل جهاز اللغة الاساسية البرنامج المطلوب. مثلاً :

```
74 INPUT A5, B
```

قد يتطلب هذا من المستعمل ان يجيب 9- ،15.3 ?

[قاعدة] = [متغير] LET

هذه التعليمة تجعل الحاسبة تعين للمتغير القيمة التي تنتج عن اجراء العمليات التي تتطلبها القاعدة، بالقيم الجارية لمتغيرات القاعدة. وليس من الضروري ان تطبع كلمة LET . فمثلاً

```
49 X = (-B + SQRT ((B*B) - (4*A*C)))/(2*A)
```

الاعـداد الثـابتـة: في اللغـة الأساسية تكون الأعداد موجبة أو سالبة، وقد يصل العدد الى ثمانيـة أرقـام بالنظـام العشـري (مثـل 0,2, - 3.654, - 987.65432) والأعداد التي لا يمكن ان تكتب بهذا الشكل يمكن ان تجعل بصيغ حسابية، مثل
1.23 * (10 * * 7), 3.456/(10 * * 8), 1/3

المتغيـرات: يشـار الى المتغيرات في اللغة الأساسية أمابحرف مفرد او بحرف يتبعه رقم (مثل A, B7, X0).

الاقترانات: بالأضافة الى الاقترانات السابقة المشتركة بين الاساسية وفورتران، تجد في الاساسية الاقترانات التالية

LN (A) معناه لو $_e$ A = لي A = (ln A)
ATN (A) معناه ظا$^{-1}$ A والزاوية التي ظلها A
INT (A) معناه اكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي A

الايعـازات: كل سطـر في برنـامـج اللغـة الاساسية يبدأ برقم متسلسل (من منزلة الى خمس منازل) يشير الى الترتيب الذي تجرى به هذه العبارة. ومن المستحسن في البرمجة ان ترقم السطور بالعشرات ليتسنى ادخال عبارات جديدة فيها بعد.
والمجمّـع يقـوم بترتيب العبارات حسب ارقام سطورها، وهذا قد لا يكون هو الترتيب الذي به طبعت. وبعد رقم السطر تترك فرجة ثم يطبع الأمر الذي يراد من الحاسب ان يقوم به. (وسنأتي بمجموعة من هذه الأوامر). واليك عبارة نموذجية:

```
100 PRINT X, SIN (X)
```

الرموز		
( )	(أ + ب) * حـ	إضرب جـ في أ + ب
=	أ = ب	إجعل أ يساوي ب

الاقترانات†	المعنى
SIN (A)	جيب الزاوية A
COS (A)	جيب تمام الزاوية A
EXP (A)	e^A
SQRT (A)	$\sqrt{A}$ (= $\sqrt{أ}$)
ABS (A)	$\lvert A \rvert$

وعند كتابة القواعد، نوصي باستعمال الأقواس بسخاء دفعاً للالتباس. فمثلاً التعبير الغامض أ + ب * حـ قد يفسر جبرياً بأنه (أ + ب) حـ أو أ + ب حـ. والحاسبة تحل هذه المشاكل بطريقة مرسومة قد لا تتفق مع طريقة الذي يستعمل الحاسبة. فالمعادلة الجبرية

$$س = \frac{- ب + \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

يمكن ان تطبع بالصيغة التالية دفعاً للالتباس

```
X = (-B + SQRT ((B ** 2.) - (4. * A * C)))/(2. * A)
```

† نكتبها بالانكليزية لأن رموزها بالعربية لم توحد، كما نعلم.

الى طبيعة الغلطة، كي يقوم المستعمِل بتصحيح برنامجه.

٥. نفِّذ البرنامج الآلي.

٦. أترك الجهاز وشأنه.

وفي هذه الصفحات سندرس الخطوة ٣ فقط، لأن الخطوات الأخرى قد تختلف من جهاز الى آخر. وبوجه عام، ان إشارة واحدة او اثنتين هما كل ما يلزم، في معظم أجهزة الكمبيوتر، لإجراء الخطوات ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ (ومعظم الذين يستعملونها يسرهم ان يعطوك هذه المعلومات). وسنفترض أيضاً ان مستعمل الجهاز يتصل بالمجمِّع طباعة، عن بعد، كالمعتاد.

وكل خط في الطباعة يكون ايعازاً واحداً، في أي من اللغتين. ومن المهم ان تهيأ هذه الأيعازات، حسب المطلوب بالضبط والا فقد تنجم غلطة في التأليف. فاذا وقع خطأ أثناء طباعة العبارة، فيمكن تصحيحه بالضغط على المفتاح الخاص (RUBOUT) مرة لكل حرف، عائداً القهقرى، حتى تمحى الغلطة. ثم تصلح الحرف المخطوء وتستمر بالطباعة

والرموز التالية واحدة في اللغتين:

العمليات الحسابية	مثال	المعنى
+	أ + ب	إجمع ب إلى أ
-	أ - ب	إطرح ب من أ
*	أ * ب	إضرب ب في أ
/	أ / ب	إقسم أ على ب
**	أ ** ب	إرفع أ الى القوة ب

i) بوضع لغة عالمية يمكن استعمالها في أي كمبيوتر.

ii) القيام بإجراءات روتينية معينة، بعبارة واحدة.

وهي تقوم بهذه المهمة بتزويد من يستعملها بمفردات جُمل كالعبارات الرياضية، تستعمل طبقاً لقواعد مصوغة بدقة. فتكتب بالفورتران سلسلة من العبارات تبين ما ترغب من الجهاز اجراءه، ثم توصل ذلك الى مجمِّع الفورتران في الجهاز وهذه السلسلة من العبارات تسمى برنامج الفورتران. فيقوم المجمِّع بترجمة هذه العبارات الى سلسلة من التعليمات باللغة الآلية، تسمى برنامج اللغة الآلية. ويقوم الجهاز بتنفيذ هذه التعليمات. وبرامج الفورتران يمكن ان تستعمل في كل الأجهزة التي فيها مجمِّع فورتران، الا ان برامج اللغة الآلية ليست، على الغالب، قابلة للتحويل.

وتعمل اللغة الأساسية (بيسيك) على نحو مماثل. والفرق الرئيسي بين اللغتين ان الأساسية تتيح سهولة أكثر في الاستعمال. لا سيما اذا كان بإمكان الجهاز القيام بأكثر من مهمة واحدة في وقت واحد.

وهذه هي الخطوات التي يلزم اتباعها لتنفيذ برنامج الحاسبة بنجاح:

١ . تعلم الوصول الى مستقبل الحاسبة. والمستقبل (monitor) نظام يوجِّه الاتصالات بين المستعمِل وبين المجمِّعات (compilers) والأنظمة الأخرى المهيأة له.

٢ . تعلم الوصول الى مجمِّع البيسيك او الفورتران. ويتم هذا بإعطاء إشارة معينة للمستقبل.

٣ . أنشىء برنامج بيسيك أو فورتران بإعطاء الجهاز سلسلة من التعليمات بالبيسيك او الفورتران.

٤ . ترجم هذا البرنامج الى برنامج آلي. ان المجمِّعات تؤدي برنامجاً آلياً شريطة ألا يكون هنالك مخالفة لقواعد الجهاز. فإذا خولفت أية قاعدة قام المجمع بتنبيه المستعمل

* الغـايـة من هذه الصفحـات تزويـد القاريء بأقل ما يمكن من المفردات اللازمة لكتـابـة برامج بسيطة بلغتين من لغات الكمبيوتر هما فورتران، والأساسية (BASIC) . فاذا كان القـاريء لم يلم بلغـات الحـاسبـة، فننصحه بأن يبدأ باللغة الأساسية لأنها أسهل تعلماً. ثم، فيما بعد اذا هو أراد، فليتعلم فورتران، لتكسبه مزيداً من المرونة في تحضير وارسال المعلومات بالكمبيوتر.

ولكـل حاسبـة مفـردات داخلية للعمليات الابتدائية، كالجمع والنقل والخزن، التي أعدت الحـاسبـة لتقـوم بها. وتسمى هذه المفـردات باللغـة الآليـة لتلك الحـاسبة. وتختلف اللغات الآلية من جهاز إلى آخر، لأن لكل جهاز قدرات خاصة. أضف الى ذلـك أن كثيـراً من الاجـراءات الـروتينيـة، مثل إدخال المعطيات وإخراجها، تستلزم إجـراء مجمـوعات من التعليمات باللغة الآلية، هي معقدة، وعلى الغالب متباينة. ولقد ابتكـــرت لغـــة فورتـــران (واسمهـــا مركب من لفظتي formula translation) لتحاشي هاتين المشكلتين:

---

* ترجم هذا الفصل على اعتبار ان لغات الحاسبات لم تعرب.

الملحـــق ٣

مبادئ لغة الحاسبات

لغة فورتران واللغة الاساسية

ق(ز) = لا { ق(هـ) }	ق (هـ)
٤٦ . $خـ \left(\frac{ر}{\sqrt{ز}} \right)$	$\frac{١}{\pi\, هـ}$ جا $(٢\, ك \sqrt{هـ})$
٤٧ . $e^{رز} (١ - خـ \sqrt{رز})$ ، $ر > ٠$	$\frac{\sqrt{ر}}{\pi \sqrt{هـ}\, (هـ + ر)}$
٤٨ . $\frac{١}{\sqrt{ز}}\, e^{رز} (١ - خـ \sqrt{رز})$ ، $ر > ٠$	$١ / \sqrt{\pi\, (هـ + ر)}$

ق (ز) = لا { ق (هـ) }	ق (هـ)
٣٨ . $\text{لي}\,\left(١ + \frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ز}^{٢}}\right)$	$\frac{٢}{\text{هـ}}\left(١ - \text{جتا ك هـ}\right)$
٣٩ . $\text{لي}\,\left(١ - \frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ز}^{٢}}\right)$	$\frac{٢}{\text{هـ}}\left(١ - \text{جتز ك هـ}\right)$
٤٠ . $\text{ظا}^{-١}\left(\frac{\text{ك}}{\text{ز}}\right)$	$\frac{\text{جا ك هـ}}{\text{هـ}}$
٤١ . $\frac{١}{\text{ز}}\,\text{ظا}^{-١}\left(\frac{\text{ك}}{\text{ز}}\right)$	$\text{ساي (ك هـ)} = \int_{٠}^{\text{ك هـ}} \frac{\text{جا ي}}{\text{ي}}\,\text{د ي}$
٤٢ . $e^{-\text{ر}\sqrt{\text{ز}}}$ ، ر $>$ ٠	$\frac{\text{ر}}{٢\sqrt{\pi\,\text{هـ}^{٣}}}\,\text{سا}\left(-\frac{\text{ر}^{٢}}{٤\,\text{هـ}}\right)$
٤٣ . $\frac{e^{-\text{ر}\sqrt{\text{ز}}}}{\text{ز}}$ ، ر $\geq$ ٠	$١ - \text{خـ}\left(\frac{\text{ر}}{٢\sqrt{\text{هـ}}}\right) = ١ - \frac{٢}{\pi}\int_{٠}^{\text{ر}/٢\sqrt{\text{هـ}}} e^{-\text{ي}^{٢}}\,\text{د ي}$
٤٤ . $e^{\text{ر}^{٢}\text{ز}^{٢}}\left(١ - \text{خـ}(\text{ر ز})\right)$ ، ر $>$ ٠	$\frac{١}{\text{ر}\sqrt{\pi}}\,\text{سا}\left(-\frac{\text{هـ}^{٢}}{٤\,\text{ر}^{٢}}\right)$
٤٥ . $\frac{١}{\text{ز}}\,e^{\text{ر}^{٢}\text{ز}^{٢}}\left(١ - \text{خـ}(\text{ر ز})\right)$ ، ر $>$ ٠	$\text{خـ}\left(\frac{\text{هـ}}{٢\,\text{ر}}\right)$

ق (ز) = لا { ق (هـ) }	ق (هـ)
٣٠. $\frac{(ز - \sqrt{ز^٢ - ك^٢})^ر}{\sqrt{ز^٢ - ك^٢}}$ ، ر > -١	$ك^ر \, كـ_ر(ك\,هـ)$
٣١. $\frac{١}{(ز^٢ - ك^٢)^ر}$ ، ر > ٠	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(ر)} \left(\frac{هـ}{٢ك}\right)^{ر-١/٢} كـ_{ر-١/٢}(ك\,هـ)$
٣٢. $\frac{e^{-ك/ز}}{ز^ر}$ ، ر > ٠	$\left(\frac{هـ}{ك}\right)^{(ر-١)/٢} J_{ر-١}(٢\sqrt{ك\,هـ})$
٣٣. $\frac{e^{-ك/ز}}{\sqrt{ز}}$	$\frac{١}{\sqrt{\pi\,هـ}}$ جتا $٢\sqrt{ك\,هـ}$
٣٤. $\frac{e^{ك/ز}}{ز^ر}$ ، ز > ٠	$\left(\frac{هـ}{ك}\right)^{(ر-١)/٢} كـ_{ر-١}(٢\sqrt{ك\,هـ})$
٣٥. $\frac{e^{ك/ز}}{\sqrt{ز}}$	$\frac{١}{\sqrt{\pi\,هـ}}$ جتز $٢\sqrt{ك\,هـ}$
٣٦. - $\frac{١}{ز}$ لي ز	- لي هـ ـ γ ، $\gamma \approx ٠,٥٧٧٢$
٣٧. لي $\frac{ز - أ}{ز - ب}$	$\frac{e^{ب\,هـ} - e^{أ\,هـ}}{هـ}$

	ق(ز) = لا {ق(هـ)}	ق(هـ)
٢٢.	$\frac{1}{\text{ز}^{4} + 4\,\text{ك}^{4}}$	$\frac{1}{4\,\text{ك}^{3}}(\text{جا ك هـ جتزك هـ} - \text{جتا ك هـ جزك هـ})$
٢٣.	$\frac{\text{ز}}{\text{ز}^{4} + 4\,\text{ك}^{4}}$	$\frac{1}{2\,\text{ك}^{2}}\,\text{جا ك هـ جزك هـ}$
٢٤.	$\sqrt{\text{ز} - \text{أ}} - \sqrt{\text{ز} - \text{ب}}$	$\frac{e^{\text{ب هـ}} - e^{\text{أ هـ}}}{2\sqrt{\pi\,\text{هـ}^{3}}}$
٢٥.	$\frac{\text{ز}}{(\text{ز} - \text{أ})^{3/2}}$	$\frac{e^{\text{أ هـ}}}{\sqrt{\pi\,\text{هـ}}}(1 - 2\,\text{أ هـ})$
٢٦.	$\frac{1}{\sqrt{\text{ز} + \text{أ}}\,\sqrt{\text{ز} + \text{ب}}}$	$e^{-(\text{أ} + \text{ب})\text{هـ}/2}\,\text{ك.}\left(\frac{\text{أ} - \text{ب}}{2}\,\text{هـ}\right)$
٢٧.	$\frac{(\sqrt{\text{ز}^{2} + \text{ك}^{2}} - \text{ز})^{\text{ر}}}{\sqrt{\text{ز}^{2} + \text{ك}^{2}}}$ ، $\text{ر} > -1$	$\text{ك}^{\text{ر}}\,J_{\text{ر}}(\text{ك هـ})$
٢٨.	$\frac{1}{(\text{ز}^{2} + \text{ك}^{2})^{\text{ر}}}$ ، $\text{ر} > 0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\text{ر})}\left(\frac{\text{هـ}}{2\,\text{ك}}\right)^{\text{ر} - 1/2} J_{\text{ر} - \frac{1}{2}}(\text{ك هـ})$
٢٩.	$(\sqrt{\text{ز}^{2} + \text{ك}^{2}} - \text{ز})^{\text{ر}}$ ، $\text{ر} > 0$	$\frac{\text{ر}\,\text{ك}^{\text{ر}}}{\text{هـ}}\,J_{\text{ر}}(\text{ك هـ})$

	ق (ز) = لا { ق (هـ) }	ق (هـ)
١٤.	$\frac{١}{ز^{٢} (ز^{٢} + ك^{٢})}$	$\frac{١}{ك^{٣}}$ (ك هـ − جا ك هـ)
١٥.	$\frac{١}{(ز^{٢} + ك^{٢})^{٢}}$	$\frac{١}{٢ ك^{٣}}$ (جا ك هـ − ك هـ جتا ك هـ)
١٦.	$\frac{ز}{(ز^{٢} + ك^{٢})^{٢}}$	$\frac{هـ}{٢ ك}$ جا ك هـ
١٧.	$\frac{ز^{٢}}{(ز^{٢} + ك^{٢})^{٢}}$	$\frac{١}{٢ ك}$ (جا ك هـ + ك هـ جتا ك هـ)
١٨.	$\frac{١}{(ز^{٢} + أ^{٢}) (ز^{٢} + ب^{٢})}$ ، $أ^{٢} \neq ب^{٢}$	$\frac{\text{أ جا ب هـ − ب جا أ هـ}}{أ ب (أ^{٢} - ب^{٢})}$
١٩.	$\frac{ز}{(ز^{٢} + أ^{٢}) (ز^{٢} + ب^{٢})}$ ، $أ^{٢} \neq ب^{٢}$	$\frac{\text{جتا ب هـ − جتا أ هـ}}{أ^{٢} - ب^{٢}}$
٢٠.	$\frac{١}{ز^{٤} - ك^{٤}}$	$\frac{١}{٢ ك^{٣}}$ (جزك هـ − جا ك هـ)
٢١.	$\frac{ز}{ز^{٤} - ك^{٤}}$	$\frac{١}{٢ ك^{٢}}$ (جتزك هـ − جتا ك هـ)

ق (ز) = لا { ق (هـ) }	ق (هـ)
٦. $\frac{\text{ز}}{\text{ز}^2 + \text{ك}^2}$	جتا ك هـ
٧. $\frac{1}{\text{ز}^2 - \text{ك}^2}$	$\frac{1}{\text{ك}}$ جزك هـ
٨. $\frac{\text{ز}}{\text{ز}^2 - \text{ك}^2}$	جتزك هـ
٩. $\frac{1}{(\text{ز} - \text{أ})^2 + \text{ك}^2}$	$\frac{1}{\text{ك}} e^{\text{أهـ}}$ جا ك هـ
١٠. $\frac{\text{ز} - \text{أ}}{(\text{ز} - \text{أ})^2 + \text{ك}^2}$	$e^{\text{أهـ}}$ جتا ك هـ
١١. $\frac{1}{(\text{ز} - \text{أ})^2 - \text{ك}^2}$	$\frac{1}{\text{ك}} e^{\text{أهـ}}$ جزك هـ
١٢. $\frac{\text{ز} - \text{أ}}{(\text{ز} - \text{أ})^2 - \text{ك}^2}$	$e^{\text{أهـ}}$ جتزك هـ
١٣. $\frac{1}{\text{ز}(\text{ز}^2 + \text{ك}^2)}$	$\frac{1}{\text{ك}^2}$ (١ - جتا ك هـ)

لجداول أوفى عن محولات لابلاس ومعكوسها أنظر مجلدان نشر سنة ١٩٥٤

Tables of Integral Transforms McGraw - Hill, N. York

ق (ز) = لا { ق (هـ) }	ق (هـ)
١ . $\frac{١}{\text{ز}^{\text{ر}}}$ ، ر > ٠	$\frac{\text{هـ}^{\text{ر}-١}}{\Gamma(\text{ر})}$ ، $\Gamma(\text{ن}+١) = \text{ن}!$
٢ . $\frac{١}{(\text{ز}-\text{أ})^{\text{ر}}}$ ، ر > ٠	$\frac{\text{هـ}^{\text{ر}-١}\, e^{\text{أهـ}}}{\Gamma(\text{ر})}$
٣ . $\frac{١}{(\text{ز}-\text{أ})(\text{ز}-\text{ب})}$ ، أ ≠ ب	$\frac{e^{\text{أهـ}} - e^{\text{ب هـ}}}{\text{أ}-\text{ب}}$
٤ . $\frac{\text{ز}}{(\text{ز}-\text{أ})(\text{ز}-\text{ب})}$ ، أ ≠ ب	$\frac{\text{أ}\, e^{\text{أهـ}} - \text{ب}\, e^{\text{ب هـ}}}{\text{أ}-\text{ب}}$
٥ . $\frac{١}{\text{ز}^{٢}+\text{ك}^{٢}}$	$\frac{١}{\text{ك}}$ جا ك هـ

الملحـــق ٢

محولات لابـــلاس

٥٢. $\int$ جزس د س = جتزس + حـ

٥٣. $\int$ جتزس د س = جزس + حـ

٥٤. $\int$ ظزس د س = لي (ظتزس) + حـ

٥٥. $\int_{0}^{\infty} \text{س}^{\text{ن}-١} e^{-\text{س}}\, \text{د س} = \Gamma(\text{ن}) = (\text{ن} - ١)\, \Gamma(\text{ن} - ١)$

٥٦. $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\text{س}}}{\text{س}}\, \text{د س} = \Gamma\left(\frac{١}{٢}\right) = \sqrt{\pi}$

٥٧. $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{\text{ن}}\text{س د س} = \int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س د س} = \begin{cases} \frac{\pi}{٢^{\text{ن}+١}} \cdot \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}/٢)!^{٢}}، & \text{ن زوجي} \\ \frac{٢^{\text{ن}-١}\, [(\text{ن} - ١)/٢]!^{٢}}{\text{ن}!}، & \text{ن فردي} \end{cases}$

٥٨. $\int_{0}^{\infty} e^{-\text{أ}^{٢}\text{س}^{٢}}\, \text{د س} = \frac{١}{٢\text{أ}}\, \Gamma\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{٢\text{أ}}، \quad \text{أ} > ٠$

٤٤. $\int \text{قتا}^{-1} \frac{\text{س}}{\text{أ}} \, \text{د س} = \text{س قتا}^{-1} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{أ لي} \left| \text{س} + \sqrt{\text{س}^{2} - \text{أ}^{2}} \right| + \text{حـ}$

٤٥. $\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{لي (أ س) د س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن} + 1} \left[\text{لي (أ س)} - \frac{1}{\text{ن} + 1} \right] + \text{حـ}، \text{ن} \neq -1$

٤٦. $\int (\text{لي س})^{\text{ن}} \, \text{د س} = \text{س} \, (\text{لي س})^{\text{ن}} - \text{ن} \int (\text{لي س})^{\text{ن}-1} \, \text{د س}، \text{ن} \neq -1$

٤٧. $\int \frac{(\text{لي س})^{\text{ن}}}{\text{س}} \, \text{د س} = \frac{(\text{لي س})^{\text{ن}+1}}{\text{ن} + 1} + \text{حـ}$

٤٨. $\int \frac{\text{د س}}{\text{س لي س}} = \text{لي (لي س)} + \text{حـ}$

٤٩. $\int \text{س}^{\text{ن}} \, e^{\text{أس}} \, \text{د س} = \frac{1}{\text{أ}} \text{س}^{\text{ن}} \, e^{\text{أس}} - \frac{\text{ن}}{\text{أ}} \int \text{س}^{\text{ن}-1} \, e^{\text{أس}} \, \text{د س}$

٥٠. $\int e^{\text{أس}} \, \text{جا ب س د س} = \frac{e^{\text{أس}}}{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}} (\text{أ جا ب س} - \text{ب جتا ب س}) + \text{حـ}$

٥١. $\int e^{\text{أس}} \, \text{جتا ب س د س} = \frac{e^{\text{أس}}}{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}} (\text{أ جتا ب س} + \text{ب جا ب س}) + \text{حـ}$

٣٤. $\int \text{قا}^{٢}\text{س د س} = \text{ظا س} + \text{حـ}$

٣٥. $$\int \text{قا}^{ن}\text{س د س} = \frac{١}{ن - ١}\,\text{ظا س قا}^{ن-٢}\text{س} + \frac{ن - ٢}{ن - ١}\int \text{قا}^{ن-٢}\text{س د س}$$

٣٦. $\int \text{قتا س د س} = \text{لي}\,\left|\text{قتا س} - \text{ظتا س}\right| + \text{حـ}$

٣٧. $\int \text{قتا}^{٢}\text{س د س} = -\,\text{ظتا س} + \text{حـ}$

٣٨. $$\int \text{قتا}^{ن}\text{س د س} = -\,\frac{١}{ن - ١}\,\text{ظتا س قتا}^{ن-٢}\text{س} + \frac{ن - ٢}{ن - ١}\int \text{قتا}^{ن-٢}\text{س د س}$$

٣٩. $$\int \text{جا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}}\,\text{د س} = \text{س جا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{س}^{٢}} + \text{حـ}$$

٤٠. $$\int \text{جتا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}}\,\text{د س} = \text{س جتا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}} - \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{س}^{٢}} + \text{حـ}$$

٤١. $$\int \text{ظا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}}\,\text{د س} = \text{س ظا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}} - \frac{\text{أ}}{٢}\,\text{لي}\,(\text{أ}^{٢} + \text{س}^{٢}) + \text{حـ}$$

٤٢. $$\int \text{ظتا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}}\,\text{د س} = \text{س ظتا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{أ}}{٢}\,\text{لي}\,(\text{أ}^{٢} + \text{س}^{٢}) + \text{حـ}$$

٤٣. $$\int \text{قا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}}\,\text{د س} = \text{س قا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}} - \text{أ}\,\text{لي}\,\left|\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{أ}^{٢}}\right| + \text{حـ}$$

٢٤. $$\int \text{جتا م س جتا ن س د س} = \frac{\text{جا (م − ن)س}}{\text{٢ (م − ن)}} + \frac{\text{جا (م + ن)س}}{\text{٢ (م + ن)}} + \text{حـ، م}^{٢} \neq \text{ن}^{٢}$$

٢٥. $$\int \frac{\text{د س}}{\text{أ + ب جتا س}} = \frac{٢}{\sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}}\ \text{ظا}^{-١} \frac{\sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}\ \text{ظا (س/٢)}}{\text{أ + ب}}$$

$$+ \text{ حـ، أ}^{٢} > \text{ب}^{٢}$$

٢٦. $$\int \text{س}^{\text{ن}} \text{ جتا س د س} = \text{س}^{\text{ن}} \text{ جا س} - \text{ن} \int \text{س}^{\text{ن}-١} \text{ جا س د س}$$

٢٧. $$\int \text{جا م س جتا ن س د س} = \frac{\text{جتا (ن − م)س}}{\text{٢ (ن − م)}} - \frac{\text{جتا (ن + م)س}}{\text{٢ (ن + م)}} + \text{حـ، م}^{٢} \neq \text{ن}^{٢}$$

٢٨. $$\int \text{جا س جتا س د س} = \frac{١}{٢} \text{جا}^{٢} \text{ س + حـ}$$

٢٩. $$\int \text{ظا س د س} = - \text{لو} \left| \text{جتا س} \right| + \text{حـ}$$

٣٠. $$\int \text{ظا}^{\text{ن}} \text{ س د س} = \frac{\text{ظا}^{\text{ن}-١} \text{ س}}{\text{ن} - ١} - \int \text{ظا}^{\text{ن}-٢} \text{ س د س، ن} \neq ١$$

٣١. $$\int \text{ظتا س د س} = \text{لو} \left| \text{جا س} \right| + \text{حـ}$$

٣٢. $$\int \text{ظتا}^{\text{ن}} \text{ س د س} = - \frac{\text{ظتا}^{\text{ن}-١} \text{ س}}{\text{ن} - ١} - \int \text{ظتا}^{\text{ن}-٢} \text{ س د س، ن} \neq ١$$

٣٣. $$\int \text{قا س د س} = \text{لو} \left| \text{قا س + ظا س} \right| + \text{حـ}$$

١٥. $$\int \frac{\sqrt{\text{س}^{2}-\text{أ}^{2}}}{\text{س}}\,\text{د س} = \sqrt{\text{س}^{2}-\text{أ}^{2}} - |\text{أ}|\,\text{قا}^{-1}\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{حـ}$$

١٦. $$\int \frac{\sqrt{\text{أ}^{2}\pm\text{س}^{2}}}{\text{س}}\,\text{د س} = \sqrt{\text{أ}^{2}\pm\text{س}^{2}} - \text{أ لي}\left|\frac{\text{أ}+\sqrt{\text{أ}^{2}\pm\text{س}^{2}}}{\text{س}}\right| + \text{حـ}$$

١٧. $$\int \text{جا س د س} = -\,\text{جتا س} + \text{حـ}$$

١٨. $$\int \text{جا}^{\text{ن}}\,\text{س د س} = -\frac{1}{\text{ن}}\,\text{جا}^{\text{ن}-1}\,\text{س جتا س} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\int \text{جا}^{\text{ن}-2}\,\text{س د س}$$

١٩. $$\int \text{جا م س جا ن س د س} = \frac{\text{جا (م - ن)س}}{2\,(\text{م}-\text{ن})} - \frac{\text{جا (م + ن)س}}{2\,(\text{م}+\text{ن})} + \text{حـ}،\ \text{م}^{2} \neq \text{ن}^{2}$$

٢٠. $$\int \frac{\text{د س}}{\text{أ} + \text{ب س}} = \frac{2}{\sqrt{\text{أ}^{2}-\text{ب}^{2}}}\,\text{ظا}^{-1}\,\frac{\text{أ ظا س/2} + \text{ب}}{\sqrt{\text{أ}^{2}-\text{ب}^{2}}} + \text{حـ}،\ \text{أ}^{2} > \text{ب}^{2}$$

٢١. $$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{جا س د س} = -\,\text{س}^{\text{ن}}\,\text{جتا س} + \text{ن}\int \text{س}^{\text{ن}-1}\,\text{جتا س د س}$$

٢٢. $$\int \text{جتا س د س} = \text{جا س} + \text{حـ}$$

٢٣. $$\int \text{جتا}^{\text{ن}}\,\text{س د س} = \frac{1}{\text{ن}}\,\text{جتا}^{\text{ن}-1}\,\text{س جا س} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\int \text{جتا}^{\text{ن}-2}\,\text{س د س}$$

٧. $\int \frac{\text{د س}}{\text{أ}^2 - \text{س}^2} = \frac{1}{2\text{أ}} \text{ لي } \left| \frac{\text{أ} + \text{س}}{\text{أ} - \text{س}} \right| + \text{حـ} = \frac{1}{\text{أ}} \text{ ظه}^{-1} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{حـ}$

٨. $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^2 - \text{أ}^2} = \frac{1}{2\text{أ}} \text{ لي } \left| \frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + \text{أ}} \right| + \text{حـ} = - \frac{1}{\text{أ}} \text{ ظته}^{-1} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{حـ}$

٩. $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}^2 \pm \text{أ}^2}} = \text{لي } \left| \text{س} + \sqrt{\text{س}^2 \pm \text{أ}^2} \right| + \text{حـ}$

١٠. $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}} = \text{جا}^{-1} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{حـ}$

١١. $\int \frac{\text{س د س}}{\sqrt{\text{س}^2 \pm \text{أ}^2}} = \sqrt{\text{س}^2 \pm \text{أ}^2} + \text{حـ}$

١٢. $\int \frac{\text{س د س}}{\sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}} = - \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2} + \text{حـ}$

١٣. $\int \sqrt{\text{س}^2 \pm \text{أ}^2} \text{ د س} = \frac{\text{س}}{2} \sqrt{\text{س}^2 \pm \text{أ}^2} \pm \frac{\text{أ}^2}{2} \text{ لي } \left| \text{س} + \sqrt{\text{س}^2 \pm \text{أ}^2} \right| + \text{حـ}$

١٤. $\int \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2} \text{ د س} = \frac{\text{س}}{2} \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2} + \frac{\text{أ}^2}{2} \text{ جا}^{-1} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{حـ}$

١. $\int \text{س د ص} = \text{س ص} - \int \text{ص د س}$

٢. $\int \text{س}^{\text{ن}} \text{ د س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن} + 1} + \text{حـ}$، $\text{ن} \neq -1$

٣. $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}} = \text{لي } |\text{س}| + \text{حـ}$

٤. $\int e^{\text{أس}} \text{ د س} = \frac{e^{\text{أس}}}{\text{أ}} + \text{حـ}$

٥. $\int \text{لي س د س} = \text{س لي س} - \text{س} + \text{حـ}$

٦. $\int \frac{\text{د س}}{\text{أ}^2 + \text{س}^2} = \frac{1}{\text{أ}} \text{ ظا}^{-1} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{حـ}$

جداول التكامل

الملحق «١»

أوجد س (١) ، ص (١)، متخذاًهـ = ٢ , ٠ . تحقق من دقة جوابك بحساب القيمة المضبوطة.

٢ . اكتب برنامجاً باللغة الاساسية (أو لغة فورتران) لحل التمرين ١ ، مع هـ = ٠,٠١ قارن جوابك بالقيمة المضبوطة.

٣ . حل التمرين ١ مستعملاً طريقة أويلر المعدلة.

٤ . حل مسألة القيم الابتدائية صً = صَ + س ص^{٢}، ص (٠) = ١، صَ (٠) = ٠، لإيجاد ص (١) متخذاً هـ = ٢ , ٠ ، ومستعملاً طريقة أويلر.

٥ . أكتب برنامجاً باللغة الاساسية (أو لغة فورتران) لحل التمرين ٤ بطريقة أويلر متخذاً هـ = ٠,٠١ .

٦ . عدِّل القوانين (٨ ـ ٤٤) للتنبؤ والتصحيح لتناسب المنظومة في المثال ٨ ـ ٦ ـ ٢ . كم قيمة يلزم أن تعلم حتى تباشر الطريقة؟

٧ . اكتب برنامجاً باللغة الاساسية (او لغة فورتران) لقوانين التنبؤ والتصحيح (٨ ـ ٥٩) و(٨ ـ ٦٠) واستعمله لحل مسألة المثال ٨ ـ ٦ ـ ٢ متخذاً هـ = ٠,٠١

$ن_٤ = هـ ف (مـ. + هـ ، س. + م_٣ ، ص. + ن_٣)$

صار الآن واضحاً كيف تعمم هذه الطريقة حتى تشمل منظومات فيها اكثر من دالة واحدة. فاذا طبقنا القوانين السابقة على المنظومة (٨ ـ ٥٦) في المثال ٨ ـ ٦ ـ ٢ ، متخذين هـ = ١ ، ينتج :

$$م_١ = -٣ ، ن_١ = ٣ ؛ م_٢ = -\frac{٤٩}{٤} ، ن_٢ = \frac{١٣}{٤} ؛$$

$$م_٣ = -\frac{١١٣٧}{٦٤} ، ن_٣ = \frac{١٨٨١}{٦٤} ؛ م_٤ = -\frac{٤,١٠٠,٦٥٧}{(٦٤)^٢} ن_٤ = \frac{١,٢٧٥,٨٠٩}{(٦٤)^٢}$$

فنجد ان

$$س_١ \approx -١٧٦,٤ ، ص_١ \approx ٦٥,٣$$

ورغم ان هذه الطريقة تتضمن حسابيات معقدة مع كل خطوة، الا انها تحتاج الى عمل اقل مما يلزم لطرق التنبؤ والتصحيح . ولأنها دقيقة فلذا تفضل في الحسابات اليدوية.

التمارين ٨ ـ ٦

١ . طبق طريقة أويلر على مسألة القيم الابتدائية :

$$\frac{د س}{د مـ} = ٤س - ٢ص ، \quad س (٠) = ١$$

$$\frac{د ص}{د مـ} = ٥س + ٢ص ، \quad ص (٠) = ٢$$

فتصير القاعدة:

$$\text{س}_{١} = \text{س}_{.} + \frac{١}{٦}\left(\text{م}_{١} + ٢\,\text{م}_{٢} + ٢\,\text{م}_{٣} + \text{م}_{٤}\right)$$

$$\text{ص}_{١} = \text{ص}_{.} + \frac{١}{٦}\left(\text{ن}_{١} + ٢\,\text{ن}_{٢} + ٢\,\text{ن}_{٣} + \text{ن}_{٤}\right) \qquad (٨ - ٦٢)$$

حيث

$$\text{م}_{١} = \text{هـ ق}\left(\text{مـ}_{.} \text{ ، } \text{س}_{.} \text{ ، } \text{ص}_{.}\right)$$

$$\text{م}_{٢} = \text{هـ ق}\left(\text{مـ}_{.} + \frac{\text{هـ}}{٢} \text{ ، } \text{س}_{.} + \frac{\text{م}_{١}}{٢} \text{ ، } \text{ص}_{.} + \frac{\text{ن}_{١}}{٢}\right)$$

$$\text{م}_{٣} = \text{هـ ق}\left(\text{م}_{.} + \frac{\text{هـ}}{٢} \text{ ، } \text{س}_{.} + \frac{\text{م}_{٢}}{٢} \text{ ، } \text{ص}_{.} + \frac{\text{ن}_{٢}}{٢}\right)$$

$$\text{م}_{٤} = \text{هـ ق}\left(\text{م}_{.} + \text{هـ} \text{ ، } \text{س}_{.} + \text{م}_{٣} \text{ ، } \text{ص}_{.} + \text{ن}_{٣}\right) \qquad (٨ - ٦٣)$$

$$\text{ن}_{١} = \text{هـ ف}\left(\text{مـ}_{.} \text{ ، } \text{س}_{.} \text{ ، } \text{ص}_{.}\right)$$

$$\text{ن}_{٢} = \text{هـ ف}\left(\text{مـ}_{.} + \frac{\text{هـ}}{٢} \text{ ، } \text{س}_{.} + \frac{\text{م}_{١}}{٢} \text{ ، } \text{ص}_{.} + \frac{\text{ن}_{١}}{٢}\right)$$

$$\text{ن}_{٣} = \text{هـ ف}\left(\text{مـ}_{.} + \frac{\text{هـ}}{٢} \text{ ، } \text{س}_{.} + \frac{\text{م}_{٢}}{٢} \text{ ، } \text{ص}_{.} + \frac{\text{ن}_{٢}}{٢}\right)$$

$$س_{ن+٢} = س_{ن+١} + \frac{هـ}{٢} (- سَ_{ن} + ٣ سَ_{ن+١})$$

(٨ ـ ٥٩) ....

$$ص_{ن+٢} = ص_{ن+١} + \frac{هـ}{٢} (- صَ_{ن} + ٣ صَ_{ن+١})$$

ثم نستعمل هذه القيم لحساب $سَ_{ن+٢}$ ، $صَ_{ن+٢}$ باستعمال منظومة المعادلات التفاضلية (٨ ـ ٥٦) ثم لتصحيح هذه القيم نستعمل قاعدة سمبسون مرتين :

$$س_{ن+٢} = س_{ن} + \frac{هـ}{٣} (سَ_{ن} + ٤ سَ_{ن+١} + سَ_{ن+٢})$$

(٨ ـ ٦٠) ....

$$ص_{ن+٢} = ص_{ن} + \frac{هـ}{٣} (صَ_{ن} + ٤ صَ_{ن+١} + صَ_{ن+٢})$$

ثم نعيد حساب $سَ_{ن+٢}$ ، $ص_{ن+٢}$ ، مع (٨ ـ ٥٦).

واضح ان هذه الطرق طويلة جداً، الا انه من السهل اجراؤ ها على الحاسبة الالكترونية.

قانون رونج وكوتا

ان قانون رونج وكوتا حول منظومة المعادلات التفاضلية هو تعميم مباشر للمعادلتين (٨ ـ ٨) و (٨ ـ ٩) إفرض أننا أعطينا المنظومة

$$\frac{د س}{د م} = ق (م ، س ، ص) ، س (م_{٠}) = س_{٠}$$

(٨ ـ ٦١) ....

$$\frac{د ص}{د م} = ف (م ، س ، ص) ، ص (م_{٠}) = ص_{٠}$$

الجدول ٨ ـ ٧

س ن	ص ن	ع ن	صَ ن	عَ ن	ص ن+١	ع ن+١
٠,٠	١,٠٠	٢,٠٠	٢,٠٠	٣,٠٠	١,٤٠	٢,٦٠
٠,٢	١,٤٠	٢,٦٠	٢,٦٠	٤,٢٠	١,٩٢	٣,٤٤
٠,٤	١,٩٢	٣,٤٤	٣,٤٤	٥,٧٦	٢,٦١	٤,٥٩
٠,٦	٢,٦١	٤,٥٩	٤,٥٩	٧,٨٠	٣,٥٣	٦,١٥
٠,٨	٣,٥٣	٦,١٥	٦,١٥	١٠,٤٨	٤,٧٦	٨,٢٥
١,٠	٤,٧٦	٨,٢٥				

وحل (٨ ـ ٥٧) هو:

$$\text{ص}(\text{س}) = \frac{٣}{\sqrt{٥}}\left[\text{سا}\left(\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}\,\text{س}\right) - \text{سا}\left(\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}\,\text{س}\right)\right] - \text{س} + ١$$

فقيمة ص (١) $\approx$ ٦,٠٤٣ (فالخطأ ٢٧ في المئة).

ولأن طريقة أويلر المحسنة انما هي اجراء تنبؤ وتصحيح، فمن الواضح انها يمكن ان تكيف حتى تطبق على المنظومات.

المثال ٨ ـ ٦ ـ ٤ : كيِّف القانونين (٨ ـ٤٢) و(٨ ـ ٤٣) في التنبؤ والتصحيح لتلائم المنظومة في المثال ٨ ـ ٦ ـ ٢ .

سنفترض، بناء على حسابيات المثال ٨ ـ ٦ ـ ٢ ، ان $\text{س}_٠ = ١$ ، $\text{سَ}_٠ = -٣$ ، $\text{س}_١ = -٠,٢٥٨$ ، $\text{سَ}_١ = -٧,٢٧$ ، $\text{ص}_٠ = ٢$ ، $\text{صَ}_٠ = ٣$ ، $\text{ص}_١ = ٢,٦٩$ ، $\text{صَ}_١ = ٢,٥١$ ، هـ = ٠,٢٥ فبهذه القيم نتنبأ أولا بما يلي:

فبالقيمتين الابتدائيتين س٠ = ١ ، ص٠ = ٢ ، واتخاذ هـ = ٠,٢٥ تكون نتائج الحسابيات كما في الجدول ٨ ـ ٦ .

الجدول ٨ ـ ٦

هـ ن	س ن	ص ن	س̄ ن+١	ص̄ ن+١	س ن+١	ص ن+١
٠,٠٠	١,٠٠	٢,٠٠	٠,٢٥	٢,٧٥	٠,٢٥٨-	٢,٦٩٥
٠,٢٥	٠,٢٥٨-	٢,٦٩٥	٢,٠٧٦-	٣,٣٢٣	٢,٧٤٤-	٣,٩٠١
٠,٥٠	٢,٧٤٤-	٣,٩٠١	٧,١١٠-	٦,٦٣٤	١١,٢٢٣-	١٢,٣٢١
٠,٧٥	١١,٢٢٣	١٢,٣٢١	٥١,٧٩٣-	٤٦,٧٠٣	٣١٠,٥-	٣٧٠,٥٣٩
١,٠٠	٣١٠,٥-	٣٧٠,٥٣٩				

ومعادلات الرتب العليا يمكن ان تعامل كمنظومات من الرتبة الأولى

المثال ٨ ـ ٦ ـ ٣ : خذ

صً = س + ص + صَ ، ص (٠) = ١ ، صَ (٠) = ٢ . . . . . . (٨ ـ ٥٧)

لنفرض ان المطلوب ص (١) بطريقة أويلر واتخاذ هـ = ٠,٢

فيمكن تحويل (٨ ـ ٥٧) الى منظومة باتخاذ ع = صَ ، فيكون عَ = صً ويكون لدينا مسألة القيم الأولية التالية :

صَ = ع ، ص (٠) = ١

. . . . (٨ ـ ٥٨)

عَ = س + ص + ع، ع (٠) = ٢

حيث س هو المتغير المستقل، ص ، ع دالتا . . فحسابيات ص (١) بينها الجدول (٨ ـ ٧).

أصغر للخطوة هـ ولا ينشأ أي صعوبة عن وجود منظومات معادلات لا متجاوزة او لا خطية .

المثال ٨ ـ ٦ ـ ٢ : انظر في المنظومة اللاخطية التالية :

$$\frac{د\,س}{د\,مـ} = س - ص^{٢} + م \quad ، \quad س\,(٠) = ١$$

(٨ ـ ٥٦) ....

$$\frac{د\,ص}{د\,مـ} = س^{٢} + ص - مـ \quad ، \quad ص\,(٠) = ٢$$

المطلوب أن نجد س (١) ، ص (١) ، باتخاذ هـ = ٠,٢٥ واستعمال طريقة أويلر المحسنة .

هذه المسألة تفضي الى

$$\overline{س}_{ن+١} = س_{ن} + هـ\,سَ_{ن} = س_{ن} + هـ\,(س_{ن} - ص_{ن}^{٢} + مـ_{ن})$$

$$، \overline{ص}_{ن+١} = ص_{ن} + هـ\,صَ_{ن} = ص_{ن} + هـ\,(س_{ن}^{٢} + ص_{ن} - مـ_{ن})$$

$$، س_{ن+١} = س_{ن} + \frac{هـ}{٢}\,(سَ_{ن} + \overline{سَ}_{ن+١})$$

$$= س_{ن} + \frac{هـ}{٢}\,[(س_{ن} - ص_{ن}^{٢} + مـ_{ن}) + \overline{س}_{ن+١} - \overline{ص}_{ن+١}^{٢} + مـ_{ن+١})]$$

$$، ص_{ن+١} = ص_{ن} + \frac{هـ}{٢}\,(صَ_{ن} + صَ_{ن+١})$$

$$= ص_{ن} + \frac{هـ}{٢}\,[(س_{ن}^{٢} + ص_{ن} - مـ_{ن}) + (\overline{س}_{ن+١}^{٢} + \overline{ص}_{ن+١} - مـ_{ن+١})]$$

الفصل الأول

البند ١ ـ ١

١. أ) ص = س^{٢} / ٢ + ٣ س + ٢

ب) ص = لي $\left(\frac{\text{س}^{٢} + ٥}{٦}\right)$ + ٤

جـ) ص = ظا س − س + ١

د) ص = س^{٤} / ١٢ − ٩ س^{٢} / ٢ + ٣ س + ١

هـ) ص = جتا س − جا س + ٢ س + (١ − π) .

٣. ٢,١٣ قدم / ث^{٢} بقوة ٨٢٥ باوند .

٥. س (ن) = (ع. جتا θ) ن + س. ،

$$ص(ن) = -\frac{1}{2} جـ ن^{2} + (ع_{.} جا \theta) ن + ص_{.}$$

البند ١ ـ ٢

١ . أ) الأولى　　ب) الثانية　　حـ) الثالثة

د) الخامسة　　هـ) الثانية　　و) الأولى

ح) الثالثة

٥ . $ص_{1}(س) = e^{4س}$ ، $ص_{2}(س) = e^{-س}$

١١ . $\bar{\varphi}(1) = 5$ ، $\bar{\bar{\varphi}}(1) = 22$ ، $\bar{\bar{\bar{\varphi}}}(1) = 140$

البند ١ ـ ٣

١ . أ) الأولى　　ب) الثالثة　　حـ) الثانية

د) الأولى　　هـ) الخامسة　　و) الأولى

ز) الرابعة .

٥ . أ) $ع_{ن+2} = 1,3 ع_{ن}$　　ب) الثانية　　حـ) $ع_{2} = 1300$ ، $ع_{4} =$ ١٦٩٠

٧ . $ص_{ن}^{(1)} = 4^{ن}$ ، $ص_{ن}^{(2)} = (-1)^{ن}$

الفصل الثاني

البند ٢ ـ ١

١ . $ص = \sqrt{e^{س} + حـ}$

٣ . $ص = \frac{١}{٢}$ لي $(س^{٢} + ١) + حـ$

٥ . $ع =$ ظا $(\frac{ق^{٣}}{٣} + حـ)$

٧ . $ف = جـ\, e^{جاق - جتاق}$ ، $حـ > ٠$

٩ . $م = e^{(ن^{٣}/٣) - ٢ن}$

١١ . $ص = \frac{٢٤٠١}{(١ + س)^{٣}}$

١٣ . $ص = حـ$ جتا $س - ٣$

١٥ . $ص =$ جا $(حـ -$ حا$^{-١}$ $س)$

١٧ . $ص = ٢س / (٤س - ٣)$

١٩ . $١ / (١ - e^{س}) = e^{ن} / (١ - e)$

٢٣ . $س(ن) = \beta + (س(٠) - \beta)\, e^{-\alpha ن}$

٢٥ . $\frac{\frac{٢}{٣}\, ٢٩١٦}{\sqrt{٢جـ}}$ ثانية

٢٧ . فنجان الملك.

البند ٢ ـ ٢

١ . $س = حـ\, e^{٢\sqrt{ص/س}}$

٣ . $لي\, س + e^{-ص/س} = ١$

٥ . $ن = \sqrt{ش\, ن + حـ}$

٧ . $س\, ص\, (ص - س) = ٢$

٩ . $ص + \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = حـ\, س^{٢}$

١١ . $س = e^{(ص - س)/ص}$

١٣ . أ) $\frac{١}{٢}\, ظا^{-١}\left(\frac{س + ٢\, ص}{٢}\right) = س + حـ$

ب) $\frac{٣}{٢}\, لي\, \frac{٢ + س + ص}{٤ - س - ص} = س + حـ$

جـ) $س + ص + لي\, (س + ص - ١) = ٣\, س + حـ$

١٥ . $ن = -\frac{١}{٢}$ ، $س\, ص^{٢} = لي\, س + حـ$

البند ٢ ـ ٣

١ . $س = e^{٣ن}$

٣ . $س = ٢\, e^{ن} - ١$

٥ . $س = e^{-ص}\, ص^{ص}\, (e^{ص} + حـ)$

٧. $ص = س^{٤} + ٣ س^{٣}$

٩. $س = حـ e^{٢ن} + \frac{ن^{٣} e^{٢ن}}{٣}$

١١. $\hat{ش} = حـ e^{-ى} + \frac{ى^{٢}}{٢} e^{-ى} + ١$

١٣. $س = e^{-ص}(حـ + ص)$

١٥ أ) $\frac{١}{ك}$ لى٢ ب) $\frac{٢ \text{ لي } ٢}{ك}$

١٧. ٣ لي ١٠ ≈ ٦,٩ سنة.

البند ٢ ـ ٤

١. أ) عً − ع = ٠ ب) عً + ع = ٠ ج) عٌ + عً − ع = ٠

٣. $ص^{٢}(٦ + حـ e^{-س}) = س$

٥. $e^{٢س} ص^{٢} = (س^{٢} + حـ)$

٧. $٥ س^{٢} ص^{٣} = س^{٥} + ٤$

٩. $س^{٣} = ٣ \text{ جا ن} + \frac{٩ \text{ جتا ن}}{ن} - \frac{١٨ \text{ جا ن}}{ن^{٢}} - \frac{١٨ \text{ جتا ن}}{ن^{٣}} + \frac{حـ}{ن^{٣}}$

١١. $ص^{٢} = س^{٢}(حـ - ٢ \text{ لي} |س|)$

١٣ . ص = حـ س − $\frac{١}{٢}$ (حـ − ٤)^{٢} ؛ ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٤ س

١٥ . ص = حـ س + $\frac{١}{حـ}$ ، ص^{٢} = ٤ س

١٧ . ص = حـ س − $\sqrt{\text{حـ}}$ ، ٤ ص س + ١ = ٠

البند ٢ ـ ٥

١ . س^{٢} ص + ص = حـ

٣ . س^{٤} ص^{٣} + لي $\left|\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right|$ = $e^{٣}$ − ١

٥ . س^{٢} − ٢ ص جا س − $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ + ٢ = ٠

٧ . $e^{\text{س ص}}$ + ٤ س ص^{٣} − ص^{٢} + ٣ = ٠

٩ . س^{٢} ص + س $e^{\text{ص}}$ = حـ

١١ . ظا$^{-١}$ $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ + لي $\left|\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right|$ = حـ

١٣ . ٢ س + لي (س^{٢} + ص^{٢}) = حـ، س = ص =

١٥ . س^{٢} لي |س| − ص − حـ س^{٢} = ٠ ، س = ٠

١٧ . ٢ س^{٢} ص^{٢} + ٢ ص^{٤} + ٤ ص^{٢} = حـ

١٩. $\text{س}^2 \text{ص} = \text{حـ}$

البند ٢ ـ ٦

١. $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ص}_{\cdot} + 2\left(1 - \frac{1}{2^{\text{ن}}}\right)$

٣. $\text{ص}_{\text{ن}} = (-1)^{\text{ن}}\, \text{ص}_{\cdot}$

٥. $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ن} + 1$

٧. $\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{5^{\text{ن}+1}}{2} - \frac{1}{2}$

٩. $\text{ص}_{\text{ن}} = e^{-\text{ن}^2+\text{ن}}\left(\text{ص}_{\cdot} + \frac{e^{\text{ن}} - 1}{e - 1}\right)$

١١. $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}}$

١٣. $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}!}\, \text{ح}_{\cdot}$

١٧. أ) $(\text{ن} + 8)\, \text{س}_{\text{ن}+2} + 2\, \text{س}_{\text{ن}+1} - \text{س}_{\text{ن}} = 0$

ب) $2 \times 3^{\text{ن}}\,(3^{\text{ن}+1} - 2)\, \text{س}_{\text{ن}+2} - 2\,(3^{\text{ن}} - 1)\, \text{س}_{\text{ن}+1} + \text{س}_{\text{ن}} = 0$

البند ٢ ـ ٧

١. ١,٨١٧١ ٣. ٠,٥٦٧١ ٥. ١,١٦٥٦

$$\text{٧. } \text{س}_{\text{ن}+١} = \frac{\text{س}_{\text{ن}-١}\,\text{ق}(\text{س}_{\text{ن}}) - \text{س}_{\text{ن}}\,\text{ق}(\text{س}_{\text{ن}-١})}{\text{ق}(\text{س}_{\text{ن}}) - \text{ق}(\text{س}_{\text{ن}-١})}$$

البند ٢ ـ ٨

$$\text{١. } \text{ت}(١\,,\,٠) = ٠{,}٠١ + ٦٠٠\,\pi\,(١ - e^{-١٠})/[(١٠٠)^{٢} + (١٢٠\,\pi)^{٢}]$$

$$\text{٣. } \hat{\text{ش}}(٦٠) = \frac{١}{٢ \times ١٠^{٣}}\left[١ - e^{-١٠^{٦}\text{ن} + ١٠^{٥}\text{ن}^{٢}}\right]\Big|_{\text{ن} = ٦٠}$$

$$\text{٥. } \text{ت}(\text{ن}) = \frac{\text{ق . س}}{١\,(W\,\text{وس})^{٢}}\left[\text{وس}\,W^{٢}\,\text{جتا}\,W\,\text{ن} - W\,\text{جا}\,W\,\text{ن} + \frac{١}{\text{وس}}\,e^{-\text{ن}/\text{وس}}\right]\text{؛}$$

$$\hat{\text{ش}}(\text{ن}) = \frac{\text{ق س}}{١ + (W\,\text{وس})^{٢}}\left[(\text{جتا}\,W\,\text{ن} - e^{-\text{ن}/\text{وس}}) + W\,\text{وس}\,\text{جا}\,W\,\text{ن}\right]$$

البند ٢ ـ ٩

$$\text{٣. } \frac{\text{ص} + \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}}{\text{س}} = \left(\frac{\text{س}}{\text{ب}}\right)^{\text{ع}/\text{غ}}$$

أو ص = $\frac{س}{٢}$ [($\frac{س}{ب}$)$^{ع/غ}$ - ($\frac{ب}{س}$)$^{ع/غ}$]

٥. نعم، عند (ب، - $\frac{ب ع}{غ}$)

٩. أ وحدات

البند ٢ ـ ١٠

١. فخشب الألفي سنة ($\frac{١}{٢}$)$^{٢٠/٥٧}$ ≈ ٠,٧٨٤ من تركيز الخشب الحديث

٣. ص (ن) = $\frac{١ + ع}{١ + ع\ e^{-ك (١ + ع) ن}}$

٥. ن = ٢٥ لي ٢ ≈ ١٧,٣ دقيقة

٧. $\frac{٤٣}{٩١}$ ٤٧ غم في اللتر.

٩. ف (ن) = ٤٠٠ - $\frac{٤}{\pi}$ - $\frac{ن}{٦}$ - $\frac{٤}{\pi}$ جا $\frac{\pi}{١٢}$ (ن - ٦)

١١. س (ن) = $\frac{أ}{ك}$ (١ - $e^{-ك ن}$) + س (٠) $e^{-ك ن}$

+ $\frac{ب}{ك^{٢} + W^{٢}}$[ك جا W ن + W ($e^{-ك ن}$ - جتا W ن)]

الفصل الثالث

البند ٣ ـ ١

١ . خطية ، متجانسة . معاملات متغيرة .

٣ . لا خطية .

٥ . خطية لامتجانسة معاملات ثابتة .

٧ . خطية لامتجانسة معاملات متغيرة .

٩ . خطية متجانسة معاملات ثابتة .

البند ٣ ـ ٢

٧ . $-٢/س$

١١ . $-\frac{٣}{٢}$ جتا س $-\frac{٥}{٢}$ جا س $+\frac{٥}{٢}e^{س}$

البند ٣ ـ ٣

١ . $ص_{٢}(س) = س\, e^{س}$

٣ . $ص_{٢}(س) = \frac{٣س^{٢}-١}{٤}$ لي $\left|\frac{س+١}{س-١}\right| - \frac{٣س}{٢}$

٥ . $ص_{٢}(س) = \frac{١}{س^{٢}}$

٧. $ص_{٢}(س) = ج_{.}(س) \int \frac{د\,س}{س\,[ج_{.}(س)]^{٢}}$

٩. (ب) $ص_{٣} = \frac{١}{س}$

البند ٣ ـ ٤

١. $ص = حـ_{١}\, e^{٢س} + حـ_{٢}\, e^{-٢س}$

٣. $ص = حـ_{١}\, e^{س} + حـ_{٢}\, e^{٢س}$

٥. $س = (١ + \frac{٩}{٢}ن)\, e^{-٥ن/٢}$

٧. $س = -\frac{١}{٥}(e^{٣س} + ٤\, e^{-٢س})$

٩. $ص = حـ_{١} + حـ_{٢}\, e^{٥س}$

١١. $ص = e^{-\pi(س-١)}\left(\left[-١. - \frac{١}{\pi} - \pi\right] + \left[\frac{١}{\pi} + \pi\right]س\right)$

---

١٣. ب) $ص = حـ_{١}\, e^{\lambda_{١}س} + حـ_{٢}\, e^{\lambda_{٢}س} + حـ_{٣}\, e^{\lambda_{٣}س}$

جـ) $ص = حـ_{١}\, e^{\lambda_{١}س} + (حـ_{٢} + حـ_{٣}\,س)\, e^{\lambda_{٢}س}$

د) $ص = (حـ_{١} + حـ_{٢}\,س + حـ_{٣}\,س^{٢})\, e^{\lambda_{١}س}$

١٥ . $ص = (١ + س) e^{س}$

١٧ . $ص = \frac{٧}{٩} + \frac{١}{٩} (e^{٣س} + e^{-٣س})$

١٩ . $ص = \frac{حـ_١ e^{س} - حـ_٢ e^{-س}}{حـ_١ e^{س} + حـ_٢ e^{-س}}$

٢١ . $ص = \frac{عَ}{أ ع}$ ، حيث $ع = حـ_١ e^{\lambda_١ س} + حـ_٢ e^{\lambda_٢ س}$

$$\lambda_١ ، \lambda_٢ = \left\{ \frac{- ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أحـ}}{٢أ} \right.$$

البند ٣ ـ ٥

١ . $ص = e^{-س} (حـ_١ جتا س + حـ_٢ جا س)$

٣ . $س = e^{-ن/٢} (حـ_١ جتا \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ن + حـ_٢ جا \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ن)$

٥ . $س = - \frac{٣}{٢} جتا ٢ \theta + جا ٢ \theta$

٧ . $ص = ٢ e^{س} - جتا س$

١ . ص = حـ$_{١}$ جا ٢س + حـ$_{٢}$ جتا ٢س + جا س

٣ . ص = (حـ$_{١}$ $e^{\text{س}}$ + حـ$_{٢}$ $e^{٢\text{س}}$ + ٣ $e^{٣\text{س}}$

٥ . ص = $e^{\text{س}}$ (حـ$_{١}$ + حـ$_{٢}$ س − ٢ $\text{س}^{٢}$)

٧ . ص = ٣ $e^{٥\text{س}}$ − ١٠ $e^{٢\text{س}}$ + ١٠ س + ٧

٩ . ص = حـ$_{١}$ + حـ$_{٢}$ $e^{-\text{س}}$ + $\frac{\text{س}^{٤}}{٤}$ − $\frac{٤}{٣}$ $\text{س}^{٣}$ + ٤ $\text{س}^{٢}$ − ٨س

١١ . ص = حـ$_{١}$ $e^{٢\text{س}}$ جتا س + حـ$_{٢}$ $e^{٢\text{س}}$ جا س + ٥ س $e^{٢\text{س}}$ جا س

+ $\frac{e^{-٢\text{س}}}{٤}$ (٢ جتا س − جا س)

١٣ . ص = $e^{-٣\text{س}}$ (حـ$_{١}$ + حـ$_{٢}$ س + ٥ $\text{س}^{٢}$)

١٥ . ص = حـ$_{١}$ $e^{٣\text{س}}$ + حـ$_{٢}$ $e^{-\text{س}}$ + $\frac{٢٠}{٢٧}$ − $\frac{٧}{٩}$ س +

$\frac{١}{٣}$ $\text{س}^{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ $e^{\text{س}}$

١٧ . ص = (حـ$_{١}$ + حـ$_{٢}$ س) $e^{-٢\text{س}}$ + ($\frac{١}{٩}$ س − $\frac{٢}{٢٧}$) $e^{\text{س}}$

$+ \frac{٣}{٢٥}$ جا س $- \frac{٤}{٢٥}$ جتا س

البند ٣ ـ ٧

١ . $ص = حـ_١$ جتا س $+ حـ_٢$ جا س $- \frac{١}{٣}$ جتا ٢س

٥ . $ص = (حـ_١ + حـ_٢ س) e^{س} - e^{س}$ لي | ١ - س |

٣ . $ص = حـ_١$ جتا ٢س $+ حـ_٢$ جا ٢س $+ \frac{١}{٢}$ س جا ٢س

$+ \frac{١}{٤}$ جتا ٢س لي | جتا ٢س |

٧ . $ص = حـ_١ + حـ_٢ e^{-س} + \frac{e^{س}}{٤} - \frac{س e^{-س}}{٢}$

٩ . $ص = (حـ_١ + حـ_٢ س + \frac{س^٢}{٢}) e^{٢س}$

١١ . $ص = \frac{١}{٢} - \frac{س}{٤} + (\frac{س}{٢} - \frac{١}{٢س})$ لي | س + ١ |

١٥ . $ص = e^{٢س} / ١٧$

البند ٣ - ٨

١ . $\text{ص} = \frac{٤}{٣}\text{س}^{٢} + \frac{٥}{٣\,\text{س}}$

٣ . $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}\left(\text{حـ}_{١}\ \text{جتا لي}\ |\text{س}| + \text{حـ}_{٢}\ \text{جا لي}\ |\text{س}|\right)$

٥ . $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(١ + ٥\ \text{لي}\ |\text{س}|\right)$

٧ . $\text{ص} = \text{حـ}_{١}\,\text{س} + \text{حـ}_{٢}\,\text{س}^{٢} + \text{حـ}_{٣}\,\text{س}^{-٤}$

٩ . $\text{ص} = \text{حـ}_{١}\,e^{٣\text{ن}} + \text{حـ}_{٢}\,e^{-٤\text{ن}} = \text{حـ}_{١}\,\text{س}^{٣} + \text{حـ}_{٢}/\text{س}^{٤}$

١١ . $\text{ص} = \frac{\text{حـ}_{١}}{\text{س}^{٣}} + \frac{\text{حـ}_{٢}}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{١٢}$

١٣ . $\text{ص} = \text{حـ}_{١}\,\text{س}^{\sqrt{٢}} + \frac{\text{حـ}_{٢}}{\text{س}^{\sqrt{٢}}} - \frac{١}{٢}\,\text{لي س} + \frac{١}{٤}$ ، $\text{س} > ٠$

البند ٣ - ٩

١ . $\frac{\sqrt{\text{حـ}}}{٥٠}$ م/ث

٣. $\frac{٢\pi}{\sqrt{٥\pi \text{جـ}}}$ ثانية؛ س (ن) = $(\frac{١}{٥\pi} - ١)$ جتا $\sqrt{٥\pi \text{جـ}}$ ن

٥. $\lambda = \frac{١٠٠\pi^{٢} + ١}{١٦٠}$

٧. س (ن) = $e^{-١٧ن}$ (حـ$_{١}$ جتا ٩ن + حـ$_{٢}$ حا ٩ن)

+ (٤٧ جا ٢ن − ٢$\sqrt{١٧}$ جتا ٢ن)/ ٢٢٧٧٠

البند ٣ ـ ١٠

١. ت (ن) = $\frac{٨٠\sqrt{٨٧}}{٢٩}$ $e^{-٢٥ن/٢}$ جا $\frac{٢٥\sqrt{٨٧}}{٦}$ ن

ش (ن) = $\frac{٣}{٥}$ − $\frac{٨٧}{١٤٥}$ $e^{-٢٥ن/٢}$ جتا $\frac{٢٥\sqrt{٨٧}}{٦}$ ن

− $\frac{٢٥\sqrt{٨٧}}{١٤٥}$ $e^{-٢٥/٢}$ جا $\frac{٢٥\sqrt{٨٧}}{٦}$ ن

٣. ش (ن) = − $\frac{e^{-٦٠٠ن}}{١١٦,٠٠٠}$ (٩ جتا ٨٠٠ن + $\frac{٥١}{٤}$ جا ٨٠٠ن)

+ $\frac{١}{١١٦,٠٠٠}$ (٩ جتا ٦٠٠ن + ٨ جا ٦٠٠ن)؛

وبالتفاضل وايجاد القيمة عند ن = ٠,٠٠١ يتبين ان التيار الموقت أكبر.

٥. $ش = حـ_١ جتا \frac{ن}{\sqrt{ح س}} + حـ_٢ جا \frac{ن}{\sqrt{ح س}}$

+ (س ق. + ح س W ^٢) جا W ن ؛ واذا كان $W = \frac{١}{\sqrt{ح س}}$، يكون

$ش = (حـ_١ - \frac{ق. ن}{٢ W ح}) جتا W ن + حـ_٢ جا W ن$

٧. ب) $W = \frac{\sqrt{٤ح/س - و^٢}}{٢ ح}$

٩. ليس هنالك قيمة تتخذها W فتؤدي الى تجاوب.

البند ٣ ـ ١١

١. $ن = \frac{٢٥}{٢}$ لي ٣ ≈ ١٣,٧ دقيقة.

٥. ٩,٧٨٠ وحدة في الدقيقة.

البند ٣ ـ ١٢

٧. $ص = حـ_١ e^{س} + حـ_٢ س e^{س} + حـ_٣ س^٢ e^{س}$

٩. $ص = حـ_١ e^{٢س} + حـ_٢ س e^{٢س} + حـ_٣ e^{-٣س} + حـ_٤ س e$

١١ . $\text{ص} = \text{حـ}_{١} + \text{حـ}_{٢}\,\text{جتا س} + \text{حـ}_{٣}\,\text{جا س} + \text{حـ}_{٤}\,\text{س جتا س} + \text{حـ}_{٥}\,\text{س جا س}$

١٣ . $\text{ص} = e^{\sqrt{٢}\,\text{س}}\left(\text{حـ}_{١}\,\text{جتا}\,\sqrt{٢}\,\text{س} + \text{حـ}_{٢}\,\text{جا}\,\sqrt{٢}\,\text{س}\right)$

$+\; e^{-\sqrt{٢}\,\text{س}}\left(\text{حـ}_{٣}\,\text{جتا}\,\sqrt{٢}\,\text{س} + \text{حـ}_{٤}\,\text{جا}\,\sqrt{٢}\,\text{س}\right)$

١٥ . $\text{ص} = \frac{١١}{٣٠}\,e^{-٢\text{س}} + \frac{٩}{٥}\,e^{٣\text{س}} - \frac{٧}{٦}\,e^{٤\text{س}}$

١٧ . $\text{ص}_{\text{خ}} = \frac{\text{س}}{٢٤} + \frac{١}{٢٨٨}$

١٩ . $\text{ص}_{\text{خ}} = -\frac{e^{-٢\text{س}}}{٤}$

٢١ . $\text{ص}_{\text{خ}} = \frac{\text{س}}{٢٤} + \frac{٣٧}{٢٨٨}$

٢٣ . $\text{ص}_{\text{خ}} = \frac{\text{س}^{٥}}{١٢٠} + \frac{\text{س}^{٦}}{٣٦٠} + \frac{\text{س}^{٨}}{١٦٨٠}$

٢٥ . $\text{ص}_{\text{خ}} = \frac{١}{٤}\left(\text{جا س} + \text{جتا س}\right)$

٢٧ . $\text{ص}_{\text{خ}} = \text{س} - \frac{١}{٤}\,e^{-\text{س}}$

٢٩ . $\text{ص}_{\text{خ}} = -\frac{٤٥}{٨}\,\text{س} \quad \frac{٢١}{٨}\,\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٤}\,\text{س}^{٣} + \frac{١}{٨}\,\text{س}^{٤}$

$$-\frac{1}{6} e^{س}$$

الفصل الرابع

البند ٤ ـ ١

١ . خطية، لامتجانسة، معاملات ثابتة

٣. لا خطية

٥. خطية، متجانسة، معاملات ثابتة.

٧. لا خطية

٩. خطية لامتجانسة، معاملات ثابتة.

البند ٤ ـ ٢

١ . $ق_ن = -٢^ن$

٣ . $ق_ن = ١$ (لأن $جا (ن + ١) \frac{\pi}{٢} = جتا \frac{\pi}{٢}$،

$جتا (ن + ١) \frac{\pi}{٢} = جا (\frac{ن \pi}{٢})$

٥. $ق_ن = ١٢^ن$

البند ٤ ـ ٣

١ . $ص_ن = ن$

٣. $ص_ن = \sum_{ك=٠}^{ن-١} \frac{(-١)^{ك-١}}{(ك + ١)!}$

٥. $ص_ن = ٢^ن$

٧. $ن! \sum_{ك=٠}^{ن-١} \frac{(-١)^{ك}}{ك + ١}$

البند ٤ ـ ٤

١. $ص_ن = حـ_١ ٤^ن + حـ_٢ (-١)^ن$

٣. $ص_ن = (\frac{١}{٣})^{ن-١} - (\frac{١}{٢})^{ن-١}$

٥. $ص_ن = حـ_١ (-١)^ن + حـ_٢ ن (-١)^ن$

٧. $ص_ن = (\frac{١}{٣})^ن (حـ_١ + ن حـ_٢)$

٩. $ص_ن = حـ_١ (\frac{١ + \sqrt{٤١}}{٢٠})^ن + حـ_٢ (\frac{١ - \sqrt{٤١}}{٢٠})$

١١. $ح_ن = \frac{\sqrt{٥}}{٢} [(\frac{١ + ١/\sqrt{٥}}{٢})^ن - (\frac{١ - ١/\sqrt{٥}}{٢})^ن]$

؛ $ح_{١١} = ٠,٠٨٨$

١٣. $ح_ن = ١٠٠٠ (١,٦^ن + ١,٤^ن)$

١٥. $ص_ن = حـ_١ + حـ_٢ ٢^ن + حـ_٣ ٣^ن$

١٧. $ص_ن = حـ_١ + حـ_٢ ن + حـ_٣ (-٢)^ن$

١٩. $ص_ن = حـ_١ + حـ_٢ ن + حـ_٣ ن^٢$

البند ٤ ـ ٥

١. $ص_ن = حـ_١ جتا \frac{ن \pi}{٤} + حـ_٢ جا \frac{ن \pi}{٤}$

٣. $ص_ن = ٢^{٣\pi/٢} (حـ_١ جتا \frac{ن \pi}{٢} + حـ_٢ جا \frac{ن \pi}{٢})$

٩. $ص_ن = \frac{س_ن}{س_{ن+١}} + ١$ ؛ حيث $س_ن = حـ_١ (\frac{١}{\sqrt{٢}})^ن$

$+ حـ_٢ (-\frac{١}{\sqrt{٢}})^ن$

١١. $ص_ن = س_ن / س_{ن+١} + ٣/٤$،

حيث $س_ن = حـ_١ (\frac{-٢}{٣})^ن + حـ_٢ (\frac{-٤}{٣})^ن$

١٣. $ص_ن = حـ_١ ٢^ن + حـ_٢ جتا \frac{ن \pi}{٢} + حـ_٣ جا \frac{ن \pi}{٢}$

١٥. $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢}\ \text{جتا ن}\ \frac{\pi}{٢} + \text{ح}_{٣}\ \text{جا ن}\ \frac{\pi}{٢}$

١٧. $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ح}_{١}\ (-٦)^{\text{ن}} + ٢^{\text{ن}}\ (\text{ح}_{٢}\ \text{جتا ن}\ \frac{\pi}{٣} + \text{ح}_{٣}\ \text{جا ن}\ \frac{\pi}{٣})$

البند ٤ ـ ٦

١. $\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{١}{٦}\ (٥^{\text{ن}+١})$

٣. $\text{ص}_{\text{ن}} = ٢^{\text{ن}}\ (\frac{\text{ن}^{٣}}{٢٤} - \frac{\text{ن}^{٢}}{٨})$

٥. $\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{١}{٤}\ \text{جا}\ \frac{\text{ن}\pi}{٢}$

١١. $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ن}\ (٢^{\text{ن}-١}) + \frac{٢^{٢-\text{ن}}}{٣} + \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢}\ ٢^{\text{ن}}$

١٣. $\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{\text{جا ن} + \text{جا}\ (\text{ن} - ٢)}{٢\ (١ + \text{جتا}٢)} + \text{ح}_{١}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ن}\pi}{٢} + \text{ح}_{٢}\ \text{جا}\ \frac{\text{ن}\pi}{٢}$

١٥. $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ح}_{١}\ (-١)^{\text{ن}} + ٣^{\text{ن}/٢}\ [\text{ح}_{٢}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ن}\pi}{٦} + \text{ح}_{٣}\ \text{جا}\ \frac{\text{ن}\pi}{٦}]$

$+ \frac{٥}{٢٦}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ن}\pi}{٢} - \frac{١}{٢٦}\ \text{جا}\ \frac{\text{ن}\pi}{٢}$

١٧. $\text{ص}_{\text{ن}} = -٦ - ٢\text{ن} - \text{ن}^{٢} + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{\text{ن}/٢} [\text{حـ}_{١} \text{ جتا ن } \theta + \text{حـ}_{٢} \text{ جا ن } \theta]$،

حيث $\text{ظا } \theta = \sqrt{٥}$

البند ٤ ـ ٧

٣. الترددات الطبيعية هي $W_{\text{م}} = [٢ \sqrt{\text{س ح}} \text{ حا } \frac{\text{م } \pi}{٢ (\text{ن} + ١)}]^{-١}$ ؛

التردد المقطوع $W_{\text{ن}} \approx \frac{١}{٢ \sqrt{\text{ح س}}}$

البند ٤ ـ ٨

١. ٩ دنانير حتى تزيد فرصته عن ٥٠٪. لا تزيد فرصة ب عن ٥٥٪ لكسب كل ما مع أ، مهما كان ما معه.

٣. $\text{ح}_{\text{ن}+٣} + \frac{\text{جـ}}{\text{حـ}} \text{ح}_{\text{ن}+٢} - \frac{١}{\text{حـ}} \text{ح}_{\text{ن}+١} + \frac{\text{خـ}}{\text{حـ}} \text{ح}_{\text{ن}} = ٠$

$\text{ح}_{٠} = ٠ ، \text{ح}_{٢\text{ن}} = \text{ح}_{٢\text{ن}+١} = ١$

٥. الحل العام: $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{جـ}_{١} + \text{جـ}_{٢} (-١ + \sqrt{٢})^{\text{ن}} + \text{جـ}_{٣} (-١ - \sqrt{٢})^{\text{ن}}$ ،

واستعمل $\text{ح}_{٠} = ٠ ، \text{ح}_{٢\text{ن}} = \text{ح}_{٢\text{ن}+١} = ١$ وذلك لتقدير $\text{جـ}_{١}$ ، $\text{جـ}_{٢}$ ، $\text{جـ}_{٣}$.

٧. (أ) $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{٣\text{ن} + (-٢)^{\text{ن}-٢\text{ن}} - (-٢)^{-٢\text{ن}}}{٦\text{ن} + ١ - (-٢)^{-٢\text{ن}}}$ ؛ كلا؛ $\text{ح}_{١٠} \approx \frac{٣٠}{٦١}$

(ب) $ح_ن = \frac{٣ن + (-٢)^{ن-٣٠} - (-٢)^{-٣٠}}{٩١ - (-٢)^{-٣٠}}$ ؛ $ح_{١٠} \approx \frac{٣٠}{٩١}$

الفصل الخامس

البند ٥ ـ ١

١١ . نق = ١ ١٣ . نق = ٠ ١٥ . نق = ١/٤

البند ٥ ـ ٢

١ . $ص = ٤ e^{س}$

٣ . $ص = e^{س} + س + ١$

٥ . $ص = حـ_٠ e^{س^٢/٢}$

٧ . $ص = جـ_٠ س e^{س}$

٩ . $ص = حـ_ن س^ن$

١١ . $ص = جـ_٠$ جتا٢س + $جـ_١$ جا٢س

١٣ . $ص = جـ_٠$ جتزس + $جـ_١$ جزس

١٥ . $ص = جـ_٠ (١ + ظا^{-١}س) + جـ_١ س$

١٧ . $ص = جـ_٠$ جتاس + جـ١ جاز + $\frac{e^{٢س}}{٥}$

١٩ . $ص = حـ_٢ س^٢ + أ س^{-٢}$

٢١ . (أ) كلا (ب) كلا

البند ٥ ـ ٣

١ . $\text{ص}_{\cdot} = \text{جـ}_{\cdot}\ \text{جتا} \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}_{١}\ \text{جا} \sqrt{\text{س}}$

٣ . $\text{ص} = \text{جـ}_{\cdot} \dfrac{\text{جز س}}{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}_{١} \dfrac{\text{جتز س}}{\text{س}^{٣}}$

٥ . $\text{ص} = \text{جـ}_{\cdot} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}_{١} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

٧ . $\text{ص} = \text{جـ}_{\cdot}\ \text{س} + \dfrac{\text{جـ}_{١}}{\text{س}^{٢}}$

٩ . $\text{ص} = \text{جـ}_{\cdot} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}} + \text{جـ}_{١} \dfrac{\text{جتاس}}{\text{س}}$

١١ . $\text{ص} = \text{جـ}_{\cdot}\ e^{\text{س}} + \text{جـ}_{١}\ e^{\text{س}}\ \text{لي} \mid \text{س} \mid$

١٣ . $\text{ص} = \text{جـ}_{\cdot} \sqrt{\text{س}}\ e^{\text{س}} + \text{جـ}_{١} \sqrt{\text{س}}\ e^{\text{س}}\ \text{لي} \mid \text{س} \mid$

١٥ . $\text{ص} = \dfrac{\text{جـ}_{\cdot}}{١ - \text{س}} \quad \dfrac{\text{لي} \mid \text{س} \mid}{١ - \text{س}}$

١٧ . $\text{ص} = (\text{جـ}_{\cdot} + \text{جـ}_{١}\ \text{لي} \mid \text{س} \mid)\ (١ + \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢^{٢}} + \dfrac{\text{س}^{٤}}{(٢ \times ٤)^{٢}} +$

$- \text{جـ}_{١} (\dfrac{\text{س}^{٢}}{٤} - \dfrac{٣\text{س}^{٤}}{٨ \times ١٦} + \ldots)$

١٩ . $ص_{٠} = حـ_{٠} \sqrt{س} \left(١ - \frac{٧}{٦} س + \frac{٢١}{٤٠} س^{٢} + \ldots\right)$

$+ جـ_{١} (١ - ٣س + ٢س^{٢} + \ldots)$

٢١ . $ص = جـ_{٠} س + جـ_{١} \left(س لي |س| + \frac{(-١)^{ن}}{ن! ن} س^{ن+١}\right)$

٢٥ . (ب) $ص_{٢} = س e^{-١/س}$

البند ٥ ـ ٤

١ . $\left(\frac{٣٨٤}{س^{٤}} - \frac{٧٢}{س^{٢}} + ١\right) J_{١}(س) - \left(\frac{١٩٢}{س^{٣}} - \frac{١٢}{س}\right) J_{٠}(س)$

١٣ . استعمل المعادلة (٥ ـ ١١٧).

١٥ . ضع $ع = \sqrt{س}$، فيكون $ص = أ J_{ح}(\sqrt{س}) + ب ص_{ح}(\sqrt{س})$

١٧ . اجعل ص = س ى، فيكون $ص = س [أ J_{١}(س) + ب ص_{١}(س)]$

١٩ . اجعل $ص = ى س^{-ك}$ فيكون $ص = س^{-ك} [أ J_{ك}(س) + ب ص_{ك}(س)]$

٢١ . إجعل $ص = \sqrt{س}\, ى$، $ع = ك س^{٣/٣}$، فيكون

$ص = \sqrt{س} [أ J_{١/٦}(ك س^{٣/٣}) + ب ص_{١/٦}(ك س^{٣/٣})]$

البند ٥ ـ ٥

١ . $ح_{٥} = \frac{٦٣ س^{٥} - ٧٠ س^{٣} + ١٥ س}{٨}$ ،

$$ح_6 = \frac{231\ س^6 - 315\ س^4 + 105\ س^2 - 5}{16}$$

$$ح_7 = \frac{429\ س^7 - 693\ س^5 + 315\ س^3 - 35\ س}{16}؛$$

$$ح_8 = \frac{429\ (15\ س^8 - 28\ س^6) + 630\ (11\ س^4 - 2\ س^2) + 35}{128}$$

٩ . (د) $هـ_0$ (س) = ١ ، $هـ_1$ (س) = س ، $هـ_2$ (س) = $س^2$ − ١ ، $هـ_3$ (س) = $س^3$ − ٣ س ، $هـ_4$ (س) = $س^4$ − ٦ $س^2$ + ٣

الفصل السادس

البند ٦ ـ ١

١ . $\frac{5}{ز^2} + \frac{2}{ز}$

٣ . $\frac{2}{ز^3} + \frac{أ}{ز^2} + \frac{ب}{ز}$

٥ . $\frac{e^2}{ز - 5}$

٧ . (جتا ب) $\frac{ز}{ز^2 + أ^2}$ − (جا ب) $\frac{أ}{ز^2 + أ^2}$

٩. $(\text{جتزب})\,\frac{\text{ز}}{\text{ز}^{٢} - \text{أ}^{٢}} + (\text{جزب})\,\frac{\text{أ}}{\text{ز}^{٢} - \text{أ}^{٢}}$

١١. $\frac{١}{(\text{ز} + ١)^{٢} + ١}$

١٥. ٧ ن

١٧. $\text{أ}_{١} + \text{أ}_{٢}\text{ن} + \frac{\text{أ}_{٣}}{٢!}\text{ب}^{٢} + \ldots + \text{أ}_{\text{ب}+١}\frac{\text{ب}^{\text{ء}}}{\text{م}!}$

١٩. $٧\,e^{٣\text{ن}}$

٢١. $\text{جتا}\ ٣\text{ن} - \frac{٢}{٣}\,\text{جا}\ ٣\text{ن}$

البند ٦ ـ ٢

٩. $\frac{\text{ز}(\text{ز}^{٢} - \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢})}{(\text{ز}^{٢} - (\text{أ} + \text{ب})^{٢})(\text{ز}^{٢} - (\text{أ} - \text{ب})^{٢})}$

١١. $\frac{\text{ب}(\text{ز}^{٢} + \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})}{(\text{ز}^{٢} + \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}) - ٤\,\text{أ}^{٢}\,\text{ز}^{٢}}$

١٣. $\frac{٢\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{ز}}{(\text{ز}^{٢} + \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}) - ٤\,\text{أ}^{٢}\,\text{ز}^{٢}}$

١٩. $\frac{\text{ب}}{\text{ز}(e^{-\text{أز}} + ١)}$

٢١. $\frac{\text{ز}^{٢} + ٢\,\text{أ}^{٢}}{\text{ز}(\text{ز}^{٢} + ٤\,\text{أ}^{٢})}$

٢٣. $\frac{٢\text{أ}(٣\,\text{ز}^{٢} - \text{أ}^{٢})}{(\text{ز}^{٢} + \text{أ}^{٢})^{٣}}$

٢٥. $\frac{١ - e^{-\text{أز}}}{\text{ز}^{٢}(١ + e^{-٢\text{أز}})}$

٢٧. $\frac{(١ - e^{-\text{أز}})^{٢}}{\text{ز}^{٢}(١ + e^{-٢\text{أز}})}$

٢٩. $\frac{٢ (ز^{٢} - ٣ أ^{٢})}{(ز^{٢} + أ^{٢})^{٣}}$

٣١. $\frac{ز^{٢} + ٢ أ^{٢}}{ز^{٢} (ز^{٢} + ٤ أ^{٢})}$

٣٣. $e^{ن} - ١$

٣٥. $\frac{١ - جتا ٢ ن}{٢}$

٣٧. $\frac{(١ + أ)(١ - e^{-أن})}{أ}$

٣٩. $\frac{١ + جا ٢ ن - جتا ٢ ن}{٢}$

البند ٦ ـ ٣

١. جتا ن

٣. $أ جتز جـ ب + \frac{ب}{جـ} جز جـ ن$

٥. $e^{-ن} (جتا ٢ ن + جا ٢ ن)$

٧. $\frac{١}{٣} - e^{ن} + \frac{٥}{٣} e^{٣ن}$

٩. $- \frac{ن}{٩} + \frac{٢٣}{٢٧} e^{٣ن} + \frac{٤}{٢٧} e^{-٣ن}$

١١. $e^{-ن}$

١٣. $$\frac{١}{٢}\left(e^{ن} - e^{-ن}\right) = \text{جز ن}$$

١٥. $$\left(١ + \frac{ن}{٢ك}\right) \text{جا ك ن}$$

١٧. $$\left(\text{حـ} + \frac{١}{٢\,\text{حـ}^{٢}}\right) \text{جا جـ ن} + \left(\text{جـ} - \frac{ن}{٢\,\text{حـ}}\right) \text{جتا حـ ن}$$

١٩. $$\frac{٣}{٤}\,\text{جتز ن} - \frac{١}{٤}\left(\text{جتا ن} + \text{ن جا ن}\right)$$

٢١. $$\frac{ز^{٢} - ك^{٢}}{\left(ز^{٢} + ك^{٢}\right)^{٢}}$$

٢٣. $$\frac{٢\,ك\,ز}{\left(ز^{٢} + ك^{٢}\right)^{٢}}$$

٢٥. $$\frac{ز^{٢} + ١}{\left(ز^{٢} - ١\right)^{٢}}$$

٢٧. $$\frac{٢\,ز}{\left(ز^{٢} - ١\right)^{٢}}$$

٢٩. $$\text{ظا}^{-١}\,\frac{ك}{ز}$$

٣١. $\frac{١}{٢}\ \text{لي}\ \frac{\text{ز}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{\text{ز}^{٢}}$

٣٣. $\frac{١}{٢\ \text{ز}}\ \text{لي}\ \frac{\text{ز}^{٢} + \text{حـ}^{٢}}{\text{ز}}$

٣٥. $\frac{e^{\text{ز}^{٢}/٤}}{\text{ز}}\ (١ - \text{خق}\ (\frac{\text{ز}}{٢}))$

٣٧. $\frac{٢}{\text{ن}}\ (١ - \text{جتا حـ ن})$

٣٩. $\frac{\text{جتا ن}}{\text{ن}}$

البند ٦ ـ ٤

١. $\frac{!٣}{\text{ز}^{٤}\ (\text{ز}^{٢} + ١)}$

٣. $\frac{!٣\ !٥}{\text{ز}^{١٠}}$

٥. $\frac{!١٩}{\text{ز}^{٢٠}\ (\text{ز} - ١٧)}$

٧. $\frac{\text{حـ ن} - \text{جا حـ ن}}{\text{حـ}^{٢}}$

٩. $\frac{١}{\text{جـ}^{٢}}(١ - \text{جتا حـ ن})$

١١. $e^{-\text{ن}}(١ - \text{ن})^{٢}$

١٥. $e^{٣\text{ن}/٢}\left[\text{جتز}\frac{\sqrt{٥}\,\text{ن}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٥}}\,\text{جز}\frac{\sqrt{٥}\,\text{ن}}{٢}\right]$

البند ٦ ـ ٥

١. $\frac{١}{٥}\left((-١)^{\text{ن}} - (-٦)^{\text{ن}}\right)$

٣. $٣^{\text{ن}}(٥ - \text{ن})$

٥. $٢^{\text{ن}/٢}\left(\text{جتا}\frac{\text{ن}\pi}{٤} + \text{جا}\frac{\text{ن}\pi}{٤}\right)$

٧. $٢^{\text{ن}-٢}\left[\frac{\text{ن}^{٢}(\text{ن} + ١)}{٢} - \sum_{\text{ك}=٢}^{\text{ن}}(\text{ك}^{٢} - \text{ك})\right]$

٩. $\frac{١}{٢}\left(٤^{\text{ن}} - ٢^{\text{ن}}\right)$

١٧. $-٢٠ + ١٢٠\,(٢)^{\text{ن}}$

١٩. $\frac{١}{٤} - ن - \frac{٢}{٣}(٢)^{ن} + \frac{٥^{ن+١}}{١٢}$

الفصل السابع

البند ٧ ـ ١

١. $\acute{س} = -حـ\,س$، $\acute{ص} = حـ_{١}\,س - حـ_{٢}\,ص$

٣. عند ن = $\frac{١٠٠}{٢\sqrt{٣}}$ لي $\frac{٣٠+\sqrt{٣}}{٣-\sqrt{٣}} \approx$ ٣٨ دقيقة؛ ٣٩ باوند من الملح

٥. $م_{١}\,\ddot{س}_{١} = -\lambda_{١}\,س_{١} + \lambda_{٢}\,(س_{٢} - س_{١})$، $م_{٢}\,\ddot{س}_{٢} = -\lambda_{٢}\,(س_{٢} - س_{١})$
$+ \lambda_{٣}\,(س_{٣} - س_{٢})$؛ $م_{٣}\,\ddot{س}_{٣} = -\lambda_{٣}\,(س_{٣} - س_{٢})$

٧. (أ): $س_{١} = \left[\alpha\, س_{١}(٠)\, س_{٢}(٠)\, e^{(\alpha\, س_{١}(٠) - \beta)ن} + \alpha\, س_{١}^{٢}(٠) - \beta\, س_{١}(٠) - \alpha\, س_{١}(٠)\, س_{٢}(٠)\,\beta\right] \div \left[\alpha\, س_{١}(٠) - \beta\right]$

$$س_{٢} = س_{٢}(٠)\, e^{(\alpha\, س_{١}(٠) - \beta)ن}$$

$$س_{٣} = \frac{\beta\, س_{٢}(٠)\, e^{(\alpha\, س_{١}(٠) - \beta)ن} + \alpha\, س_{٣}(٠)\, س_{١}(٠) - س_{٣}(٠)\,\beta - س_{٢}(٠)\,\beta}{\alpha\, س_{١}(٠) - \beta}$$

(حـ) ينتشر وباء

البند ٧ ـ ٢

١. $سَ_{١} = س^{٢}$ ، $سَ_{٢} = -٣ س_{١} - ٢ س_{٢}$ ،

٣. $سَ_{١} = س_{٢}$ ، $سَ_{٢} = س_{٣}$ ، $سَ_{٣} = س_{١}^{٣} - س_{٢}^{٢} + س_{٣} + ن$

٥. $سَ_{١} = س_{٢}$ ، $سَ_{٢} = س_{٣}$ ، $سَ_{٣} = س_{١}^{٤} س_{٢} - س_{١} س_{٣} + جا ن$

٧. $سَ_{١} = س_{٢}$ ، $سَ_{٢} = س_{٣}$ ، $سَ_{٣} = س_{١} - ٤ س_{٢} + ٣ س_{٣}$

٩. (أ) $س_{١}(ن) = حـ_{١} e^{ن}$ ، $س_{٢}(ن) = حـ_{٢} e^{ن}$ ، $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ ثابتان

البند ٧ ـ ٣

١. $س = حـ_{١} e^{-ن} + حـ_{٢} e^{٤ن}$ ، $ص = -حـ_{١} e^{-ن} + \frac{٣}{٢} حـ_{٢} e^{٤ن}$

٣. $س = حـ_{١} e^{-٣ن} + حـ_{٢} (ن - ١) e^{-٣ن}$ ، $ص = -حـ_{١} e^{-٣ن} + حـ_{٢} ن e^{-٣ن}$

٥. $س = حـ_{١} e^{١٠ن} + حـ_{٢} ن e^{١٠ن}$ ، $ص = (-٢ حـ_{١} + حـ_{٢}) e^{١٠ن}$

$- ٢ حـ_{٢} ن e^{١٠ن}$

٧. $س = \frac{١}{٨} (-٢ن^{٢} - ١٨ ن - ٦) + حـ_{١} - ٣ حـ_{٢} e^{٢ن}$ ،

$ص = \frac{١}{٨} (٢ن^{٢} + ١٤ ن) - حـ_{١} + حـ_{٢} e^{٢ن}$

٩. $س = e^{٤ن} (١٧ حـ_{١} جتا ٢ن + ١٧ حـ_{٢} جا ٢ن)$ ،

ص = $e^{4ن}$ [(٨ حـ$_1$ - ٢ حـ$_2$) جتا ٢ن + (٨ حـ$_2$ + ٢ حـ$_1$) جا ٢ن]

١١. س$_1$ = ٢ حـ$_1$ $e^{ن}$ ، س$_2$ = -٣ حـ$_1$ $e^{ن}$ + حـ$_2$ $e^{ن}$ جتا ٢ن
+ حـ$_3$ $e^{ن}$ جا ٢ن،

س$_3$ = ٢ حـ$_1$ $e^{ن}$ + حـ$_2$ $e^{ن}$ جا ٢ن - حـ$_3$ $e^{ن}$ جتا ٢ن

البند ٧ ـ ٤

١. (ب) ر = $e^{-6ن}$

(حـ) { حـ$_1$ $e^{-3ن}$ + حـ$_2$ (١ - ن) $e^{-3ن}$ ، - حـ$_1$ $e^{-3ن}$ + حـ$_2$ ن $e^{-3ن}$ }

البند ٧ ـ ٥

١. { $e^{ن}$ ، $e^{ن}$ } ، { ٣ $e^{-ن}$ ، ٥ $e^{-ن}$ }

٣. { $e^{ن}$ جتا ن، $e^{ن}$ (٢ جتا ن - جا ن) } ، { $e^{ن}$ جا ن ، $e^{ن}$ (٢ جا ن + جتا ن)}

٥. { $e^{-3ن}$ ، - $e^{-3ن}$ } ، { (ن - ١) $e^{-3ن}$ ، -ن $e^{-3ن}$ }

٧. { ٣ ، ٤ } ، { $e^{-2ن}$ ، ٢ $e^{-2ن}$ }

١١. { $\frac{1}{8}$ (-٢ ن^2 - ١٨ ن - ٦) ، $\frac{1}{8}$ (٢ ن^2 + ١٤ ن) }

١٣. { جا ن - جتا ن ، ٢ جا ن - جتا ن }

١٥. (أ) سَ = -٠,١٣٤ س + ٠,٠٢ ص ، صَ = ٠,٠٣٦ س - ٠,٠٢ ص .

(ب) { ١٠ حـ$_1$ $e^{-0,14ن}$ + حـ$_2$ $e^{-0,014ن}$ ، -٣ حـ$_1$ $e^{-0,14ن}$ +
٦ حـ$_2$ $e^{-0,014ن}$ }

١. { ١ − ١,٠٢٥ $e^{-٠,٠٥}$ ، ١ − ١,٠٥ $e^{-٠,٠٥}$ }

٣. { ١٠٠ (ك$_١$ $e^{\lambda_١ ن}$ + ك$_٢$ $e^{\lambda_٢ ن}$) + ١ ، −٨ (ك$_١$ $\lambda_١$ $e^{\lambda_١ ن}$ +
ك$_٢$ $\lambda_٢$ $e^{\lambda_٢ ن}$) + ١ }

حيث { ك$_١$ ، ك$_٢$ } = $\frac{\pm ٣\sqrt{٢} - ٤}{٨٠٠}$ ، { $\lambda_١$ ، $\lambda_٢$ } = − ٥٠ ± ٢٥ $\sqrt{٢}$

٥. الحل العام { ت$_ح$ ، ت$_و$ } = { ت$_ح$ ، ت$_{وخ}$ } + { ت$_ح$ ، ت$_و$ }$_{خ}$

ويساوي :

{ ت$_ح$ ، ت$_و$ }$_{خ}$ = { أ جا W ن + ب جتا W ن ، حـ جا W ن + د جتا W ن }

حيث : W = ٦٠ π ،

$\triangle$ = W^٢ + ٢٥٠٠ ، أ = (٢٥٠٠ / $\triangle$)^٢ ، ب = −٢٥ W (W^٢ + ٧٥٠٠) / $\triangle^٢$

جـ = −٢٥٠٠ (W^٢ − ٢٥٠٠) / $\triangle^٢$ ، د = −٢٥٠٠٠٠ W / $\triangle^٢$ ، و:

(أ) { ت$_ح$ ، ت$_ر$ } = { $\frac{e^{٥٠ ن}}{٢}$ [ك$_١$ + ك$_٢$ (ن + $\frac{١}{٢٥}$]،

$e^{-٥٠ ن}$ [ك$_١$ + ك$_٢$ (ن + $\frac{١}{٢٥}$)] }

(ب) $\{\text{ت}_{\text{ح}} ،\ \text{ت}_{\text{رجـ}}\} = \{e^{-\text{٥٠ن}}[\text{ك}_{١}\ \text{جتا}\ ٥٠\sqrt{٣}\text{ن} + \text{ك}_{٢}\ \text{جا}\ ٥٠\sqrt{٣}\text{ن}]،$

$e^{-\text{٥٠ن}}[\text{ك}_{٣}\ \text{جتا}\ ٥٠\sqrt{٣}\text{ن} + \text{ك}_{٤}\ \text{جا}\ ٥٠\sqrt{٣}\text{ن}]\}$

(جـ) $\{\text{ت}_{\text{ح}} ،\ \text{ت}_{\text{رحـ}}\} = \{e^{-\text{٥٠ن}}(\text{ك}_{١}\, e^{٢٥\sqrt{٢}\text{ن}} + \text{ك}_{٢}\, e^{-٢٥\sqrt{٢}\text{ن}})،$

$e^{-\text{٥٠ن}}[(٢ - \sqrt{٢})\,\text{ك}_{١}\, e^{٢٥\sqrt{٢}\text{ن}} + (٢ + \sqrt{٢})\,\text{ك}_{٢}\, e^{-٢٥\sqrt{٢}\text{ن}}]\}$

٧. $\text{ت}_{١} = \frac{١}{٢٠}(٨\ \text{جا ن} - ٦\ \text{جتا ن} + ٥\, e^{-\text{ن}} + e^{-\text{٣ن}})$

$\text{ت}_{٢} = \frac{١}{٢٠}(٢\ \text{جا ن} - ٤\ \text{جتا ن} + ٥\, e^{-\text{ن}} - e^{-\text{٣ن}})$

البند ٧ ـ ٧

١. أ) $\frac{\text{سً}}{\text{س}} - (\frac{\text{سَ}}{\text{س}})^{٢} + \text{ب}_{١}\,\text{سَ} =$

$(\text{أ}_{١} - \text{ب}_{١}\,\text{س} - \frac{\text{سَ}}{\text{س}})[-\text{أ}_{٢} + \text{حـ}_{٢}\,\text{س} + \frac{\text{ب}_{٢}}{\text{حـ}_{١}}(\text{أ}_{١} - \text{ب}_{١}\,\text{س} - \frac{\text{س}}{\text{س}})]$

ب) $(٠ ،\ \text{أ}_{٢}/\text{ب}_{٢})$ ، $(\text{أ}_{١}/\text{ب}_{١} ،\ ٠)$ ، $(\frac{\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{حـ}_{١}}{\text{ب}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{حـ}_{١}\text{حـ}_{٢}} ،\ \frac{\text{أ}_{٢}\text{ب}_{١} - \text{أ}_{١}\text{حـ}_{٢}}{\text{ب}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{حـ}_{١}\text{حـ}_{٢}})$.

حـ) $\text{ص} = \text{حـ}\,\text{س}$

د) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (\frac{\text{ص}}{\text{س}})(\frac{\text{ب}_{٢}(\text{ص}/\text{س}) + \text{حـ}_{٢}}{\text{ب}_{١} + \text{حـ}_{١}(\text{ص}/\text{س})})$ ؛ يموت النوعان جوعاً

٣. أ) $(\text{ن}\,\pi ،\ ٠)$ ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . هذه النقاط هي المواضع التي يكون فيها البندول في أعلى أو اسفل مساره.

ج) $\theta = \theta_{.}\ \text{جتا}\sqrt{\frac{\text{جـ}}{\text{ل}}}\ \text{ن}$ ؛ $\psi = -\sqrt{\frac{\text{جـ}}{\text{ل}}}\ \theta_{.}\ \text{جا}\sqrt{\frac{\text{جـ}}{\text{ل}}}\ \text{ن}$ ،

$\text{ف} \approx ٢\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{جـ}}}$

البند ٧ ـ ٨

١. س = جتز ن ، ص = جز ن

٣. $\text{س} = e^{٣\text{ن}}\,(٢\ \text{جتا}\ ٣\text{ن} + ٢\ \text{جا}\ ٣\text{ن})$، $\text{ص} = e^{٣\text{ن}}\,(-٢\ \text{جتا}\ ٣\text{ن} + ٤\ \text{جا}\ ٣\text{ن})$

٥. $\text{س} = \frac{٣}{٢}\ \text{جتان} + \frac{١}{٢}\ \text{جا ن} + \frac{٧}{٢}\,e^{\text{ن}} - ٥\,e^{-\text{ن}} - ٤\text{ن}$

$\text{ص} = \text{جتا ن} + \frac{٧}{٢}\,e^{\text{ن}} - \frac{٥}{٢}\,e^{-\text{ن}} - ١ - ٣\text{ن}$

٧. $\text{س} = \frac{e^{٣\text{ن}}}{٤\,(١٣)^{٣}}\,(٦٨٨٧\ \text{جتا}\ ٢\text{ن} + ٢٦٣٧\ \text{جا}\ ٢\text{ن})$

$+ \frac{e^{\text{ن}}}{٤} - \frac{٥\,\text{ن}^{٢}}{١٣} - \frac{٣٤\text{ن}}{(١٣)^{٢}} - \frac{٧٤}{(١٣)^{٣}}$

$$\text{ص} = \frac{e^{\text{٣ن}}}{\text{٤ (١٣)}^{\text{٣}}} \left(-\ \text{٩٥٢٤ جتا ٢ن} + \text{٤٢٥٠ جا ٢ن}\right)$$

$$+ \frac{\text{٤}}{\text{١٣}} \text{ن}^{\text{٢}} + \frac{\text{٤٨ن}}{(\text{١٣})^{\text{٢}}} + \frac{\text{١٨٤}}{(\text{١٣})^{\text{٣}}}$$

البند ٧ ـ ٩

٣. $\text{س}_{\text{ن+١}} = \text{ص}_{\text{ن}}$ ، $\text{ص}_{\text{ن+١}} = -\text{ن}^{\text{٢}}\ \text{س}_{\text{ن}} + \text{ن ص}_{\text{ن}} + \text{٣}^{\text{ن}}$

٥. $\text{س}_{\text{ن+١}} = \text{ص}_{\text{ن}}$ ، $\text{ص}_{\text{ن+١}} = -\ \text{س}_{\text{ن}}\ \text{ص}_{\text{ن}}$

٧. $\text{س}_{\text{ن}} = \text{حـ}_{\text{١}}\ \text{٢}^{\text{ن}} + \text{حـ}_{\text{٢}}\ (-\text{٣})^{\text{ن}}$ ، $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{حـ}_{\text{١}}\ \text{٢}^{\text{ن+٢}} - \text{حـ}_{\text{٢}}\ (-\text{٣})^{\text{ن}}$

٩. $$\text{س}_{\text{ن}} = \begin{cases} -\text{٣} \text{ ، ن} = \text{١} \\ \text{٠ ، ن} \neq \text{٠} \end{cases}$$

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \begin{cases} \text{١ ، ن} = \text{٠ ، ١} \\ \text{٠ ، ن} = \text{٢ ، ٣ ، . . .} \end{cases}$$

١١. $\text{س}_{\text{ن}} = -\frac{\text{١}}{\text{٤}} (\text{٣}^{\text{ن}} - \text{٥}) + \frac{\text{ن}}{\text{٢}}$ ،

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} (\text{٣}^{\text{ن}} - \text{١}) + \frac{\text{ن}}{\text{٢}}$$

١٣. $\text{٥١} \times \text{١٠}^{-\text{٧}}$ ، $\text{٥٢,٥} \times \text{١٠}^{-\text{٧}}$ ، $\text{٥٢} \times \text{١٠}^{-\text{٧}}$ غم/م$^{\text{٣}}$ عند ن = ساعة واحدة.

الفصل الثامن

البند ٨ ـ ١

١ . أ) ص (١) $\approx$ ٢,٩٨ (ص (١) = ٢ (e - ١) $\approx$ ٣,٤٤)

ب) ص (٣) $\approx$ ٢,١٦ (ص (٣) = ٢ (١ + $\frac{١}{e^٢}$) $\approx$ ٢,٢٧)

جـ) ص (١) $\approx$ ٠,٧٢ . (ص (١) = $\sqrt{٣}$ - ١ $\approx$ ٠,٧٣)

٣ . لا تصح أي طريقة ، لأن حل المعادلة التفاضلية هو القطع الزائد س^٢ - ٢ س ص - ص^٢ = ٤ وهذه غير معرفة عند س = ١ .

البند ٨ ـ ٢

١ . | $e_ن$ | $\leqslant$ ٠,٨٥٩ هـ

ب) هـ = ٠,١ ، | $e_ن$ | $\leqslant$ ٠,٠٨٦ ، هـ = ٠,٢ ، | $e_ن$ | $\leqslant$ ٠,١٧٢

٣ . | $e_ن$ | $\leqslant$ ٦,٠٦ هـ أ) ١,٢١٢,٠٠٠ ب) ١٢,١٢٠,٠٠٠

البند ٨ ـ ٣

١ . أ = $\frac{١}{٤}$ ، ب = ٠ ، حـ = $\frac{٣}{٤}$ ، د = ٠

٣ . ن = ل = $\frac{٢}{٣}$

٥ . لأن محددة المنظومة ٤ × ٤ تساوي صفراً . هنالك عدد لا نهاية له من الحلول . كلا

البند ٨ ـ ٤

٩. ص (١) $\approx$ ٣,٣٣٣ (ص (١) = ٣,٤٣٦٥)

البند ٨ ـ ٦

١. س (١) $\approx$ -١٧,٤٣ ؛ ص (١) = ٧,٧٦؛ القيم الدقيقة: س (١) = -٢٢,٧٢ ، ص (١) = -٣٦,٩٣

٥. ص (١) $\approx$ ١,٢٢ ، صَ (١) = ٠,٨١

الملحق ٤

١. أ) ح = -٢ ، $س_١$ = ٣ ، $س_٢$ = ٠ ، ب) ح = ٠، لا حل

جـ) ح = ٠ ، عدد لا نهائي من الحلول، من النوع $س_١$ = حـ،

$س_٢ = \frac{٣ - حـ}{٢}$، حيث حـ عدد ثابت

د) ح = ٠، عدد لا نهائي من الحلول، من النوع $س_١$ = حـ، $س_٢$ = ٢حـ - ١

هـ) ح = ٠، لا حل.

و) ح = ٦، $س_١ = \frac{١}{٢}$، $س_٢$ = ٠

٣. أ) نعم ب) كلا

١ . نعم، $\delta = \frac{١}{٢١٦}$ ، (وأحسن من ذلك $\delta = \frac{١}{٥٠}$)

٣ . نعم، ولكن أ = ب = ١ غير ممكنة، يلزم أ + ب < ١ .

فاذا كان أ = ب = $\frac{٢}{٣}$ ، يكون $\delta = \frac{١}{٤}$

٥ . نعم، $\delta = ١$.

٧ . نعم، ولكن يلزم ان يكون ب < ١ . فاذا كان ب = $\frac{١}{٢}$ يكون $\delta = ١$

٩ . نعم، $\delta = \frac{١}{٢}$ (والقيمة الأحسن $\delta = +\infty$. وهناك حل وحيد معرف لكل
$-\infty <$ ن $< \infty$

١١ . أ) ك = ١، ب) ك=١

حـ) ك = ٣(هنالك ثابت أصغر هو $\left| ٢\,\text{س جا}\,\frac{١}{\text{س}} - \text{جتا}\,\frac{١}{\text{س}} \right|$ $|\text{س}| \leq ١$

د) $٩٧٢\sqrt{٣} \approx ١٦٨٣$

١٣ . $\text{س}_{ء}(\text{ن}) = ٣ \sum_{\text{ك}=٠} \frac{(\text{ن} - ٣)^{\text{ك}}}{\text{ك}!}$

قاموس المصطلحات

A

Abel's formula	صيغة آبل
amplitude	سعة
analytic	تحليلي
auxiliary equation	معادلة مساعدة

B

band-pass filter	مصفاة حاصرة
Bernoulli's equation	معادلة برنولي
Bessel function of order zero	اقتران بيزيل الصفري
binomial coefficient	معامل حداني
binomial series	المتسلسلة الحدانية
binomial theorem	نظرية ذات الحدين
boundary values	قيم حاصرة

C

capacitance	مواسعة
capacitor	مواسع
Casoration	القيسارية
Center of convergence	مركز التقارب
center of series	مركز المتسلسلة
Chemical Kinetics	علم الحركة الكيمياوية
Clairaut's equation	معادلة كلير وه
closed system	منظومة مغلقة
combination	توفيقة ، توفيق
comparison test	الاختبار بالمقارنة
compartment	حجرة
compartmental analysis	التحليل بالحجرات
complementary error function	متممة اقتران الخطأ
complex variable	متغير مركب
conjugate	مرافق
convergence	تقارب
convergent	متقارب ، تقاربي
convolution integral	تكامل ملتف
critical point	نقطة حاسمة
curve of pursuit	منحنى المطاردة
cut-off frequency	تردد قاطع

D

damped discrete harmonic motion	حركة توافقية متميزة مكبوحة
damped vibration	تأرجح مكبوح
damping factor	عامل كبح
dead space	حيز خافت
De Moivre formula	صيغة دي مويفر
dependence	تبعية
dependent	تابع
determinant	محددة
difference equation	معادلة فرق (أو فروق)
differential equation	معادلة تفاضلية
Dirac delta function	دلتة ديراك
discontinuity	انقطاع
discrete function	اقتران متميز (معتزل)
discretization error	خطأ العزل
divergence	تباعد

E

electric circuit	دائرة كهربائية
equilibrium	توازن
equilibrium population	أعداد التوازن (السكاني)
error function	اقتران الخطأ
Euler equation	معادلة أويلر
exact equation	معادلة محكمة
existence	الموجودية
exponential growth	تزايد أسي
exponential decay	تلاشٍ أسي
exponentiate	يرفع (للأساس e)

F

Fibonacci numbers	أعداد فيبوناتشي
formula	صيغة ، قاعدة
forced vibration	تأرجح مدفوع
fractional transfer coefficient	معامل تحويل كسري
free fall	سقوط حر
function	اقتران ، دالة

G

gamma function	اقتران جاما
generating function	اقتران توليد
geometric series	متسلسلة هندسية
growth rate	سرعة النمو

H

harmonic motion	حركة توافقية
Heaviside function	اقتران هيفايد
Heun's formula	صيغة هيون
Hermite function	اقتران هرمايت
high-pass filter	مصفاة رافعة
homogeneous	متجانس
Hooke's law	قانون هوك

improper integral	تكامل معتل
improved Euler method	طريقة أويلر المحسنة
indicial equation	معادلة المؤشرات
inductance	حث (كهربائي)
initial value problem	مسألة القيم الابتدائية

inverse Laplace transform	معكوس (أو مقابل) محول لابلاس
irregular singular point	نقطة منفردة شاذة
integrating factor	عامل تكامل
interval of convergence	فترة التقارب
iteration	تواتر، متواترة

J , K

jump discontinuity	انقطاع قافز
junction	مفرق
Kirchhoff laws	قوانين كرتشوف
Kutta-Simpson rule	قاعدة كوتا وسمبسون

L

Laguerre polynomial	حدودية لاجوير
Laplace transform	محول لابلاس
Legendre equation	معادلة لاجاندر
linear combination	توفيقة خطية
linear dependence	ترابط خطي
linearity	خطية
linearly dependent	مترابطة خطيا

logistic equations	معادلة حركية
loop	عروة
Lotka-Volterra equations	معادلة لوتكا وفولترا
low-pass filter	مصفاة خافضة

M , N

Maclaurin's series	متسلسلة مكلورين
Method of Frobenius	طريقة فروبينيوس
Neuman function	اقتران نيومان
Newton's law of cooling	قانون نيوتن في التبريد
Newton's method	طريقة نيوتن
nonhomogeneous	لامتجانس، غير متجانس
non-linear	لاخطي ، غير خطي
nth practical sum	المجموع الجزئي النوني
numerical analysis	تحليل عددي
numerical instability	اضطراب عددي

O , P

Ohm's law	قانون أوم
open system	منظومة مفتوحة

order of equation	رتبة المعادلة
ordinary equation	معادلة عادية
parabola	قطع مكافيء
partial differentiation	تفاضل جزئي
partial fractions	كسور مجزأة
particular solution	حل خاص
pendulum	بندول، نواس
period	فترة
piece wise	بالأجزاء
point of equilibrium	نقطة توازن
polar coordinates	احداثيات قطبية
polynomial	حدودية
population equilibrium	التوازن العددي (للسكان)
potential theory	نظرية الكمون
predictor-corrector formula	قاعدة التنبوء فالتصحيح
power series	متسلسلة قوى
principle of superposition	مبدأ التراكم
propagation of error	أنتشار الخطأ

Q , R

quadratic convergence	تقارب تربيعي
quadratic formula	صيغة المعادلة التربيعية
quadrature formula	قاعدة التربيع
radius of convergence	نصف قطر التقارب
ratio test	الاختبار بالنسبة
recurrence relation	علاقة تكرارية
Recatti equation	معادلة ركاتي
recursion formula	صيغة دورية
regula falsi	حساب الخطأين
regular singular point	نقطة منفردة نظامية
remainder after nth term	الباقي بعد الحد النوني
resonance	تجاوب
retarded fall	سقوط معوّق
Rodrigues formula	صيغة ردريجز
round-off error	خطأ مدور
Runge-Kutta	طريقة رونج وكوتا

S , T

separation of variables	فصل المتغيرات
shifting theorem	نظرية النقل
Simpson s rule	قاعدة سمبسون
singular point	نقطة منفردة
substitution method	طريقة التعويض
system	منظومة ، نظام
Taylor series	متسلسلة تايلر
terminal velocity	حد السرعة
three-point method	طريقة النقط الثلاث
Torricelli's law	قانون توريشللي
tractrix	مجرورة
trajectory	مسار
trivial solution	حل عاطل

U, V, W

uniform convergence	تقارب متناسق
unit impulse function	اقتران النبضة الواحدة
unit step function	اقتران الدرجة الواحدة
Van der Pol equation	معادلة فاندربُل
variation of constants	تغيير الثوابت
vibratory motion	حركة تأرجح
Volterra integral equation	معادلة فولترا التكاملية
Weierstrass test	اختبار فيرشتراس
Wronskian	الرنسكية